华东师范大学统计学院教学材料

随 机 过 程

李育强　　编著

2018年 7 月

目录

第一章　随机过程概述

本章我们将简要地解释随机过程的基本概念并介绍两类基础随机模型：直线上简单随机游动与泊松过程。这两类随机过程在一定意义上可以看作是独立同分布随机变量部分和及其“逆”。它们在应用领域有着广泛的应用。

1.1　随机过程的基本概念

随机过程简单而言是人们为认识复杂随机现象动态变化规律而建立的一种数学模型, 通常以一族(通常是无穷多的)随机变量的形式出现. 虽然在概率论中我们对无穷多随机变量的极限性质做了初步研究, 但这在应用中远远不够. 先看下面两个具体的例子.

例1.1 观察赌场里某个赌徒正在进行的赌博(比如抽扑克牌比大小). 若赌徒在输完筹码才会离开, 问要进行多少局，赌局才会结束？由于赌局的随机性，每一局后赌徒拥有的赌资是随机的. 要对这个问题做出估计，可以用随机变量$Y(n)$ 表示第n局后赌徒拥有的筹码, 那么所估计的赌局数为

$$k = \inf\{n; Y(n) \le 0\}.$$

要合理估计k值, 一般要掌握随机变量族$\{Y(n), n \ge 0\}$的随机变化规律.

例1.2 观察一只股票的价格波动，是否存在“稳赢”的投资策略？一般地, 股票价格变化具有一定的随机性(如下图所示).

用随机变量$X(t)$ 表示股票在t 时刻的价格, 如果想通过买卖该股票获利，那么我们应该掌握随机变量族$\{X(t);\ t \geq 0\}$的统计规律. 当我们想通过某种策略获利, 比如13元买入15元卖出, 我们首先要解决的问题就是对应的买入时机和卖出时机是否存在？在什么时候？

以上例子表明, 许多问题会涉及动态变化的随机现象. 为了解决问题, 我们可以用一族(一般是无穷多)随机变量刻画(描述)这些现象. 通常我们就称这族随机变量是一个随机过程. 介绍随机过程的各种统计规律和研究方法就是随机过程课程的主要内容.

定义1.1 称$X = \{X(t);\ t \in T\}$为概率空间$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 上随机过程, 若它是该概率空间上一族随机变量(可以是向量值的). 称$X(t)$, $t \in T$, 的所有可能取值域S为随机过程X的状态空间, T 称为是指标集或参数集, 特别若指标集具有时间属性时, 也称之为时间参数.

按指标集和状态空间的不同, 通常我们把随机过程分成四类：连续参数离散状态、连续参数连续状态、离散参数离散状态、离散参数连续状态随机过程.

注1.1 对随机过程还可从其他角度进行分类. 比如, 若对所有$t \in T$, $X(t) \in R^d$其中$d > 1$, 则也称X是向量值随机过程; 若$T \in R^n$ 的子集时(此时T往往对应空间或时空指标), 我们又称X为随机场. 为了简单, 本书不讨论随机场这种情形, 从现在起本书讨论的随机过程, 如无特别说明, 都是实值随机过程, 即$S \in \mathbb{R}$.

随机过程从函数角度看也是集合$T \times \Omega \to \mathbb{R}$的二元函数. 对给定的时刻$t, \omega$, $X(t, \omega)$是一个实数; 对给定的t和变化的ω, 随机过程$X(t, \cdot)$ 为随机变量; 对变化的t和给定的$\omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$是一个指标集T上的函数:

$$X(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R} \quad 对任意t \in T, X(\cdot, \omega)(t) = X(t, \omega).$$

通常我们称函数$X(\cdot,\omega)$ 为随机过程X的轨道(函数)或样本(函数).

对概率空间$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$上有限个随机变量$X_1,\cdots,X_m$, 我们一般用联合分布函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m)\triangleq\mathbb{P}(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_m\le x_m),$$

其中$x_1,\cdots,x_m\in\mathbb{R}$ 刻画他们的统计规律. 对于随机过程, 我们可以借用这一工具.

定义1.2 任取$X=\{X(t);\ t\in T\}$的k个参数, $t_1,t_2,\cdots,t_k$, 称$X_{t_1},\cdots,X_{t_k}$ 的联合分布函数

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

为随机过程X的一个k阶有限维分布, 称函数族

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k);\ t_1,\cdots,t_k\in T,k\ge 1\}$$

为随机过程X的有限维分布族.

注1.2 当S为离散时,有限维分布族可用如下有限维分布列代替

$$P_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k):=\mathbb{P}(X_{t_1}=x_1,\cdots,X_{t_k}=x_k);\ \ x_1,\cdots,x_k\in S.$$

性质1.1 随机过程的有限维分布满足

(1) 对称性, 即对任意k以及$(1,2,\cdots,k)$的一个置换$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$,

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_k}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}).$$

(2) 相容性, 即对任意$n>m$,

$$F_{t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)=F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m).$$

证明 性质由有限维分布定义直接可得. □

下面定理表明有限维分布族在一定意义下确定唯一的随机过程; 证明省略.

定理1.2*(Kolmogorov) 设$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k);t_1,\cdots,t_k\in T,k\ge 1\}$是满足对称性和相容性的概率分布函数族, 则在样本空间

$$\Omega=S^T=\{(s_t;t\in T);s_t\in S\},$$

以及σ-代数

$$\mathfrak{F}=\sigma\Big\{\{(s_t,t\in T);\ (s_{t_1},\cdots,s_{t_n})\in B\};\\ B\subset\mathfrak{B}(S^n),\ t_1,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\Big\}$$

上存在唯一的概率$\mathbb{P}$, 使得$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$上随机过程$X=\{X(t),t\in T\}$, 其中

$$X(t,\omega)=\omega_t,\qquad\qquad \omega=(\omega_t)_{t\in T},$$

的有限维分布族恰好是$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k);\ t_1,\cdots,t_k\in T,k\geq 1\}$.

注1.3* 定理中$\mathfrak{B}(S^n)$表示由S^n中所有开集产生的σ-代数, 通常称之为Borel代数. 特别, 若 S^n为离散集, 那么$\mathfrak{B}(S^n)$就是由S^n中所有子集构成的集合类.

下面是一个解释在数学上如何利用Kolmogorov定理给出随机过程及对应概率空间的严格构造的简单例子.

例1.3* 从装有M个红球和N个白球的袋中重复做有放回的抽取, 若抽到红色记作0，白球记作1, 试建立严格的数学模型描述随机抽取的动态变化.

解 令$p=\frac{N}{N+M}$, $q=1-p$, a_i, $i\geq 1$, 取值为0 或1. 显然该过程中任意抽取s次, 抽取结果为$a_1,\cdots,a_s$的概率为

$$p^{a_1+\cdots+a_s}q^{s-(a_1+\cdots+a_s)}.$$

由抽取过程我们可以得到如下的有限分布列族

$$\{P_{n_1,n_2,\cdots,n_s}(a_1,\cdots,a_s);\ n_1,n_2,\cdots,n_s\text{为互不相同的正整数},$$

$$a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,s,s\geq 1\}$$

其中$P_{n_1,n_2,\cdots,n_s}(a_1,\cdots,a_s)=p^{a_1+\cdots+a_s}q^{s-(a_1+\cdots+a_s)}$. 容易验证, 该有限维分布列簇是对称的且具有相容性. 因此由Kolmogorov定理, 令

$$\begin{aligned}\Omega&=\{0,1\}^{\mathbf{N}}=\{(a_1,a_2,\cdots,);\ a_i=0,1,i=1,2,\cdots\},\\ \mathfrak{F}&=\sigma\Big\{\{(\omega_i,i\geq 1);\ \omega_{i_1}=a_{i_1},\cdots,\omega_{i_k}=a_{i_k}\};\\ &\qquad\qquad i_l\in T,a_{i_l}\in\{0,1\},l=1,\cdots,k,k\geq 1\Big\}\end{aligned}$$

存在唯一概率$\mathbb{P}$使得随机过程$X=\{X_n,n\geq 1\}$, 其中$X_n(\omega)=\omega_n$的有限维分布与已知观察一致. 此时Ω中随机事件

$$\{(\omega_n;\ n\geq 1);\ \omega_{i_k}=a_{i_k},k=1,2,\cdots,s\}$$

发生概率$P=p^{a_{i_1}+\cdots+a_{i_s}}q^{s-(a_{i_1}+\cdots+a_{i_s})}$. □

定义1.3 设$X=\{X_t;t\in T\}$, $Y=\{Y_t;t\in T\}$都是概率空间$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$上的随机过程, 称$Y$是$X$ 的一个版本(Version), 若X,Y有限维分布族相同; 称Y是X的一个修正(Modification), 若对任意$t\in T$, $\mathbb{P}(X_t=Y_t)=1$; 称X与Y不可区分(Indistinguish), 若$\mathbb{P}(X_t=Y_t,t\in T)=1$.

显然衡量两个过程是否一样，概念“不可区分”是最强的. 两个随机过程是不可区分的，那么他们一定互为修正；两个过程互为修正则一定互为版本. 这两个结论一般都逆不真, 但若X,Y 为离散参数随机过程, 那么”不可区分”与”修

正"等价.

定义1.4 设$X=\{X_t;t\in T\}$, $Y=\{Y_u;u\in T\}$都是概率空间$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$上的随机过程, 若对任意$k,m\geq 1, t_1,\cdots,t_k,u_1,\cdots,u_m\in T$, $(X_{t_1},\cdots,X_{t_k})$与$(Y_{u_1},\cdots,Y_{u_m})$独立, 则称X和Y是独立的.

例1.4 设W_i, $i\geq 1$是独立同分布的随机变量, S_n为W_i的部分和序列, N为一个固定常数. 对任意$k\geq 1$, 令$T_k=S_{N+k}-S_N$. 那么随机过程$\{T_k,k\geq 1\}$与$\{S_n,1\leq n\leq N\}$独立. 事实上对任意$m\geq 1$, 任取$k_1,\cdots,k_m\geq 1$, 由W_i, $i\geq 1$独立同分布可知

$$(T_{k_1},T_{k_2},\cdots,T_{k_m})=\Big(\sum_{i=N+1}^{N+k_1}W_i,\sum_{i=N+1}^{N+k_2}W_i,\cdots,\sum_{i=N+1}^{N+k_m}W_i\Big)$$

与

$$(S_1,S_2,\cdots,S_N)=(W_1,W_1+W_2,\cdots,\sum_{i=1}^{N}W_i)$$

是独立的. □

我们也可以通过随机变量的数值特征在一定程度上了解随机过程.

定义1.5 设$X=\{X(t);t\in T\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$上的随机过程, 分别称如下的函数

$$m_X(t)=\mathbb{E}(X(t)),\qquad D_X(t)=\mathbb{V}ar(X(t)),$$
$$R_X(s,t)=\mathbb{E}(X(s)X(t)),\qquad \mathbb{C}ov_X(s,t)=\mathbb{C}ov(X(s),X(t))$$

为随机过程X的均值函数，方差函数，自相关函数与协方差函数.

定义1.6 若对任意的$t_1<\cdots<t_n\in T$以及$h\in T$,

$$(X(t_1),\cdots,X(t_n))\ 与\ (X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))$$

同分布, 则称对随机过程$X=\{X(t),t\in T\}$为严平稳过程.

严平稳过程的一个具体例子就是在初等概率论中常提及的独立同分布随机变量序列. 应用中严平稳要求较苛刻, 人们更多考虑如下的所谓平稳过程。

定义1.7 称随机过程X为平稳过程, 若对任意$t\in T$, $\mathbb{E}(X(t))$ 与t无关, 且对任意$t,h\in T$, 协方差函数$\mathbb{C}ov(X(t),X(t+h))$与$t$ 无关.

显然若X是平稳过程, 那么对任意$t\in T$, $\mathbb{E}(X^2(t))<\infty$, 即$X(t)$的二阶矩存在(简称这样的过程为二阶矩过程); 二阶矩存在的严平稳过程一定是平稳过程.

平稳过程的理论是时间序列分析的基础, 本书对平稳过程的介绍从略.

定义1.8 称随机过程$X=\{X(t);t\in T\}$是独立增量过程, 若对任意n以及$t_1<$

$\cdots < t_n \in T$

$$X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立(若指标集T有最小元素t_0, 那么还要求

$$X(t_0),X(t_1)-X(t_0),X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立). 进一步, 若对任意$t,t+h,s,s+h\in T$, $X(t+h)-X(t)$与$X(s+h)-X(s)$的分布相同, 则称X为平稳独立增量过程.

如果$X=\{X(t),t\geq 0\}$为平稳独立增量过程, 均值函数$m(t)$与方差函数$D(t)$都存在且连续. 那么对任意$t\geq 0$，

$$m(t)=Ct+\mathbb{E}(X(0)),\quad D(t)=C_1t+\mathbf{Var}(X(0)), \tag{1.1.1}$$

其中$C=\mathbb{E}(X(1))-\mathbb{E}(X(0))$, $C_1=\mathbf{Var}(X(1))-\mathbf{Var}(X(0))$.

如果T为非负整数, 独立增量过程就是一列相互独立随机变量的部分和；初值为0的平稳独立增量过程就是一列独立同分布随机变量的部分和.

例1.6 随机过程$X=\{X_n;n\geq 1\}$称为伯努利过程, 若$\{X_n;n\geq 1\}$ 为独立同分布(i.i.d)随机变量, 且

$$\mathbb{P}(X_n=1)=p,\qquad \mathbb{P}(X_n=0)=q=1-p,\quad 0<p<1,n\geq 1.$$

例1.3中构造的随机模型其实就是一个伯努利过程. 伯努利过程常用来描述一列独立重复实验, 通常将$\mathbb{P}(X_n=1)=p$看作第n次实验成功概率, $\mathbb{P}(X_n=0)=q$看作第n次实验失败的概率. 令$T_0=0$,

$$T_1=\inf\{n>0;X_n=1\},$$

其中规定$\inf\emptyset=+\infty$. 因此T_1是个可以取$+\infty$的(广义)随机变量, 而且由

$$\{T_1=n\}=\{X_n=1,X_1,\cdots,X_{n-1}\text{均不为}1\} \tag{1.1.2}$$

可知$T_1=n$是否发生由$X_1,\cdots,X_n$的取值确定或者说由时刻n记此前观察到的结果确定. 通常我们称T_1为**停时**.

进一步, 对任意$k>1$, 我们还可以定义$T_k=\inf\{n>T_{k-1};X_n=1\}$. 那么$T_k$表示第$k$ 次伯努利实验成功的时刻而且也是停时.

任取数列$\{f(n);n\geq 1\}$. 由

$$f(T_k)=f(T_{k-1}+1)X_{T_{k-1}+1}+\cdots+f(T_k-1)X_{T_k-1}+f(T_k)X_{T_k},$$

可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}f(T_k)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)X_n.$$

这表明若$\sum\limits_{n\geq 1}|f(n)|<\infty$, 则

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}f(T_k)\Big)=\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{m}f(n)X_n)=p\sum_{n=1}^{\infty}f(n). \tag{1.1.3}$$

例1.7 设在某种仪器在单位时间内损坏事件构成一个伯努利过程, 若损坏后更新的费用为c元, 为使仪器损坏时用户能免费更换, 厂方在卖出产品时应合理定价, 假设投资1元到下一个单位时间可增值到$1/\alpha$元, 问厂家预期应至少多定价多少?

解: 以T_k表示第k次损坏一个仪器的时间, 此时更换仪器要c 元, 为此厂家需额外收取$c\alpha^{T_k}$ 元费用. 要保证长期使用则应多收取的费用为$\sum_{k=1}^{\infty}c\alpha^{T_k}$. 因此由(1.1.3), 预期应增收费用为

$$D=\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}c\alpha^{T_k}\Big)=cp\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k=\frac{cp\alpha}{1-\alpha}.$$ □

练习题

1.1 试解释对离散参数随机过程而言, “不可区分”与“修正”等价.

1.2 验证(1.1.1)中$m(t)$与$D(t)$的表达式.

1.3 证明随机过程$\{X_t,t\in T\}$与$\{Y_t,t\in T\}$独立当且仅当对任意$m\geq 1$以及任意选取的$t_1,\cdots,t_m\in T$, $(X_{t_1},\cdots,X_{t_m})$与$(Y_{t_1},\cdots,Y_{t_m})$独立.

1.2 直线上随机游动

(A) 模型及其刻画

定义2.1 设$X_n, n \geq 1$为独立同分布的随机变量, 随机变量X_0 与$\{X_n, n \geq 1\}$独立. 令

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} X_k, \quad n \geq 0.$$

称随机过程$W = \{W_n;\ n \geq 0\}$为(直线上)随机游动或1维随机游动. 称X_0的取值为随机游动W的初值或初始位置. 若随机游动W定义中X_0是整数值随机变量且

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p,$$

则称随机过程$W = \{W_n;\ n \geq 0\}$为直线上的简单随机游动或(q, p)-简单随机游动. 其中$p = q = 1/2$时简称W为简单对称随机游动.

注2.1 用初等概率论的眼光看, 随机游动W实质就是独立同分布随机变量的部分和. 但当我们把X_n形象地理解成困在一根细管中的蚂蚁随机走出的一步时, W就描述了这只蚂蚁在细管中随机走过的路程. 这也是我们称W为随机游动的一种形象解释. 为了叙述方便, 有时也形象地称X_n为第n步的步长.

注2.2 由定义可知随机游动W是平稳独立增量过程.

由大数定律我们知道$W_n/n \overset{a.s.}{\to} \mathbb{E}(X_1)$. 因此, 只要$p \neq q$, 简单随机游动$|W_n| \overset{a.s.}{\to} +\infty$, 从而对几乎所有的$\omega$, 以及任意常数$C$, $|W_n(\omega)| \leq C$ 只能出现有限次, 换句话说, 存在某个$N(\omega)$, 在此之后，$|W_n(\omega)|$都比C 大. 显然, 这种趋势性的认识对我们整体把握随机现象是非常有必要的, 也是非常基础的. 但这还不够, 因为我们还经常会对随机现象发展过程出现的问题产生兴趣. 比如, 某种特定现象在什么时候首次出现？这种现象会反复出现吗？在众多的现象中哪种现象会更早出现？几率多大？这类问题不仅有趣而且跟实际应用密切相关, 也是我们用随机过程刻画随机现象时常要解决的问题. 下面我们就从随机游动这一模型出发, 围绕这类问题简单地做些介绍. 为了简便, 我们只讨论**整数值的随机游动**, 即$X_k, k \geq 0$, 都是整数值随机变量.

首先我们引进记号

$$p_n(x, y) := \mathbb{P}(W_n = y | W_0 = x).$$

$p_n(x, y)$表示随机游动在初值为x条件下, 时刻n时值为y的概率. 注意到X_i 是独立

同分布的随机变量, 对任意$k \geq 0$, 条件概率

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{k+n}=y|W_k=x) &= \frac{\mathbb{P}(W_{n+k}=y, W_k=x)}{\mathbb{P}(W_k=x)} = \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=n+1}^{n+k} X_i = y-x, W_k=x)}{\mathbb{P}(W_k=x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=k+1}^{n+k} X_i = y-x)\mathbb{P}(W_k=x)}{\mathbb{P}(W_k=x)} \\ &= \mathbb{P}\Big(\sum_{i=k+1}^{n+k} X_i = y-x\Big) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i = y-x\Big).\end{aligned}$$

进而

$$\mathbb{P}(W_{k+n}=y|W_k=x) = \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = y-x, X_0=0)}{\mathbb{P}(X_0=0)} = p_n(0, y-x).$$

由此可知

$$\mathbb{P}(W_{k+n}=y|W_k=x) = \mathbb{P}(W_n=y|W_0=x) = p_n(x,y) = p_n(0,y-x). \quad (1.2.1)$$

因此$p_n(x,y)$不仅表示随机游动起点由x出发经n步到达位置y的概率, 也表示从任一时刻所在位置x出发经过n步到位置y的概率, 他们都等于从位置0出发经n步到达位置$y-x$ 的概率. 我们常把后者简记成$p_n(y-x)$. 特别, 若W的初值取定为0, 那么对任意x, $\mathbb{P}(W_n=x)=p_n(x)$.

为获得随机游动W的任意有限维分布, 任取

$$0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_n, \;\; r_0, r_1, \cdots, r_n \in \mathbf{Z}.$$

由X_i的独立同分步性质可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{k_0}=r_0, W_{k_1}=r_1, \cdots, W_{k_n}=r_n) \\ &= \mathbb{P}\Big(X_0=r_0, \sum_{i=k_0+1}^{k_1} X_i = r_1-r_0, \cdots, \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i = r_n - r_{n-1}\Big) \\ &= \mathbb{P}(X_0=r_0)\mathbb{P}\Big(\sum_{i=k_0+1}^{k_1} X_i = r_1-r_0\Big)\cdots\mathbb{P}\Big(\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} X_i = r_n-r_{n-1}\Big) \\ &= \mathbb{P}(X_0=r_0)\mathbb{P}(W_{k_1-k_0}=r_1-r_0)\cdots\mathbb{P}(W_{k_n-k_{n-1}}=r_n-r_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_0=r_0)p_{k_1}(r_0,r_1)p_{k_2-k_1}(r_1,r_2)\cdots p_{k_n-k_{n-1}}(r_{n-1},r_n). \quad (1.2.2)\end{aligned}$$

可见条件概率簇$\{p_n(x,y)\}$是我们认识随机游动的统计规律的基础.

命题2.1 若W是整数值的随机游动, 那么对任意$0 \leq k < m$以及$i_0, \cdots, i_m \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_m=i_m, \cdots, W_{k+1}=i_{k+1}|W_k=i_k, \cdots, W_0=i_0) \\ &\qquad = \mathbb{P}(W_{m-k}=i_m-i_k, \cdots, W_1=i_{k+1}-i_k|W_0=0).\end{aligned}$$

证明 对任意$n\geq 1$以及整数x,y, 令$p_n(x,y):=\mathbb{P}(W_n=y|W_0=x)$. 由(1.2.2)可知

$$\mathbb{P}(W_m=i_m,\cdots,W_{k+1}=i_{k+1},W_k=i_k,\cdots,W_0=i_0)=\mathbb{P}(X_0=i_0)\prod_{r=0}^{m-1}p_1(i_r,i_{r+1})$$

$$\mathbb{P}(W_k=i_k,\cdots,W_0=i_0)=\mathbb{P}(X_0=i_0)\prod_{r=0}^{k-1}p_1(i_r,i_{r+1})$$

从而

$$\mathbb{P}(W_m=i_m,\cdots,W_{k+1}=i_{k+1}|W_k=i_k,\cdots,W_0=i_0)=\prod_{r=k}^{m-1}p_1(i_r,i_{r+1}).$$

另一方面由(1.2.2)和(1.2.1)可知

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{m-k}=i_m-i_k,\cdots,W_1=i_{k+1}-i_k|W_0=0)\\&=p_1(0,i_{k+1}-i_k)\prod_{r=k+1}^{m-1}p_1(i_r-i_k,i_{r+1}-i_k)\\&=p_1(i_k,i_{k+1})\prod_{r=k+1}^{m-1}p_1(i_r,i_{r+1})=\prod_{r=k}^{m-1}p_1(i_r,i_{r+1}).\end{aligned}$$

由此可知命题2.1成立. □

一般地, 若令$\bar{A}_n=\{i-i_k:i\in A_n\}:=A_n-i_k$ 其中$A_n\subset\mathbf{Z}$, $k<n\leq m$, 那么

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_m\in A_m,\cdots,W_{k+1}\in A_{k+1}|W_k=i_k,\cdots,W_0=i_0)\\&=\mathbb{P}(W_{m-k}\in\bar{A}_m,\cdots,W_1\in\bar{A}_{k+1}|W_0=0).\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

证明请读者自己完成(见习题6-1).

对简单随机游动, 我们可以非常方便地计算$\{p_n(x,y)\}$. 由于简单随机游动每次步长只能是+1(向前一步)或−1(向后一步), 要从位置x出发经n步到达y, 意味着其中有$(n+y-x)/2$ 步向前, $(n+x-y)/2$ 步向后. 所以

$$p_n(x,y)=\begin{cases}C_n^{(n+y-x)/2}p^{(n+y-x)/2}q^{(n+x-y)/2}, & |y-x|\leq n\text{且同奇偶};\\0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{1.2.4}$$

例2.1 设W是(q,p)-简单随机游动. 对$s\in[0,1)$, 令$\phi(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n(0,0)s^n$. 求$\phi(s)$.

解 由(1.2.4)可得

$$p_n(0,0)=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\C_{2k}^kp^kq^k, & n=2k.\end{cases}$$

因此

$$\phi(s) = 1+\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^k p^k q^k s^{2k} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!k!}(pqs^2)^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(2pqs^2)^k$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}(-4pqs^2)^k$$

注意到函数$(1+x)^{-1/2}$的幂级数展开式为

$$(1+x)^{-1/2} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!}x^k, \quad |x|<1.$$

因此所求函数$\phi(s) = (1-4pqs^2)^{-1/2}$. □

(B) 一些随机事件的概率

设$W=\{W_k, k\ge 0\}$为整数值的随机游动. 对任意整数i, 令

$$\tau_i = \inf\{n\ge 1;\ W_n = i\}\ \text{以及}\ \ \kappa_i = \inf\{n\ge 0;\ W_n = i\}.$$

通常我们分别称之为首回时和首达时. 直观看, κ_i表示W 首次到到i的时间; 若$W_0=i$, τ_i表示W首次回到位置i的时间. 显然若$W_0\ne i$, $\tau_i=\kappa_i$. 由定义可知

$$\{\tau_i = n\} = \{W_1\ne i,\cdots,W_{n-1}\ne i, W_n = i\}.$$

定义2.2 称整数值的随机游动不带右跳(或右连续), 若其步长满足条件

$$\mathbb{P}(X_n=1)>0\ \text{而且}\ \sum_{k=-\infty}^{1}\mathbb{P}(X_n=k)=1.$$

对不带右跳整数值的随机游动而言, 若其初值为0, 那么其到达位置$i>0$的首达时满足

$$\{\tau_i = n\} = \{W_1 < W_n,\cdots,W_{n-1}<W_n, W_n = i\}, \tag{1.2.5}$$

而到达位置$i<0$的首达时满足

$$\{\tau_i = n\} = \{W_1 > W_n,\cdots,W_{n-1}>W_n, W_n = i\}.$$

定理2.2 设W是初值为0不带右跳的随机游动, 对任意正整数m,

$$\mathbb{P}(W_1<W_n,\cdots,W_{n-1}<W_n, W_n=m) = \frac{m}{n}\mathbb{P}(W_n=m).$$

我们先证明一个排列组合方面的结论.

引理2.3 对任意正整数m, 在满足$x_1+\cdots+x_n=m$, 其中$x_i\le 1$, $i=1,\cdots,n$, 的任意一个整数解(可以是负数)$(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的n个循环排列中恰有m个循环排列使得其前$n-1$ 项部分和都严格小于m.

例如, 取$n=5$, $m=2$, 那么$(-2,1,1,1,1)$ 是方程$x_1+\cdots+x_n=m$满足条

件的一组解, 这一组的循环排列有5种, 分别是

$$(-2,1,1,1,1),(1,-2,1,1,1),(1,1,-2,1,1),(1,1,1,-2,1),(1,1,1,1,-2),$$

其中只有第一，第二两种排列满足前$n-1=4$项部分和严格小于$m=2$. 事实上排列$(-2,1,1,1,1)$ 和$(1,-2,1,1,1)$的前4项部分和分别是$(-2,-1,0,1)$和$(1,-1,0,1)$.

证明* 设$(u_1,u_2,\cdots,u_n)$是方程$x_1+\cdots+x_n=m$的整数解. 由于$(u_1,u_2,\cdots,u_n)$的循环都是整数解, 因此我们可以选择一个好的循环作为分析的对象. 记$\{u_i\}$的部分和序列为$S_1,\cdots,S_n$. 设其最大值为M 并令$l=\min\{k,S_k=M\}$. 那么$M\geq m$, $u_l=1$且对任意$l<i\leq n$, $u_{l+1}+\cdots+u_i\leq 0$. 选择循环排列$(u_{l+1},\cdots,u_n,u_1,\cdots,u_l)$ 作为我们分析对象, 并将其重新记为$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$. 可得:

(1) 对任意$k<n$, 部分和$v_1+\cdots+v_k<v_1+\cdots+v_n=m$.

(2) 由于部分和$v_1+\cdots+v_{n-l}=u_{l+1}+\cdots+u_n\leq 0$而且$v_i$最大只能取到$+1$, 因此对任意$1\leq j\leq m$, 一定存在一个指标$n_k$ 使得部分和

$$v_1+\cdots+v_{n_k}=j$$

并记这些指标中最小的指标为k_j, 其中k_0规定为0. 由(1)知$k_m=n$,并且由于部分序列$v_1+\cdots+v_i$是从0值开始而且v_i最大只能取到$+1$可得k_j 随着j的增加而增加.

(3) 对任一$j<m$, 序列块$(v_{k_j+1},\cdots,v_{k_{j+1}})$一定满足

$$v_{k_j+1}+\cdots+v_{k_{j+1}}=1,\ \ v_{k_{j+1}}=1$$

而且若存在$k_j+1\leq i<k_{j+1}$, 则$v_{k_j+1}+\cdots+v_i\leq 0$(否则$i\geq k_{j+1}$导出矛盾).

由此我们可以检验$(v_1,v_2,\cdots,v_n)$的循环排列中所有

$$(v_{k_j+1},\cdots v_n,v_1,\cdots,v_{k_j}),\quad j=0,1,\cdots,m-1$$

满足引理要求. 其他的任何一个循环

$$(v_i,\cdots,v_n,v_1,\cdots,v_{i-1})$$

都不满足引理要求, 因为此时存在一个j使得$k_j+1<i\leq k_{j+1}$, 该循环的前$n-i+k_j$的部分和为

$$v_i+\cdots+v_n+v_1+\cdots+v_{k_j}=v_1+\cdots+v_n-(v_{k_j+1}+\cdots+v_{i-1})$$

$$= m - (v_{k_j+1} + \cdots + v_{i-1}) \geq m.$$

所以在$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$的循环排列中有且仅有m个满足引理要求. □

利用该引理, 我们很容易证明定理2.2. 证明如下.

证明 记$A = \{W_n = m\} = \{X_1 + \cdots + X_n = m\}$,

$$\begin{aligned} B &= \{W_1 < W_n, \cdots, W_{n-1} < W_n, W_n = m\} \\ &= \{X_1 + \cdots + X_k < m, k = 1, \cdots, n-1, X_1 + \cdots + X_n = m\} \end{aligned}$$

任取A中一个基本事件$u = (u_1, \cdots, u_n)$, 该基本事件的n个循环排列也是A 中的基本事件, 记u及其循环排列事件构成的集合为Γ_u, 此时

$$A = \bigcup_{\substack{\Gamma_u \in A \\ \text{且互不相交}}} \Gamma_u,$$

并且由于A中至多有可数个基本事件u, 因此上式只涉及至多可数个事件Γ_u的并. 另一方面, 由引理2.3, 对任意$u \in A$, Γ_u中有且仅有m 个循环排列事件属于B. 注意到X_i是独立同分布的随机变量, 每个循环排列发生概率相同, 因此

$$\frac{\mathbb{P}(B \cap \Gamma_u)}{\mathbb{P}(A \cap \Gamma_u)} = \frac{m}{n}.$$

注意到$B \subset A$, 我们可得

$$\mathbb{P}(B \cap \Gamma_u) = \mathbb{P}(B \cap A \cap \Gamma_u) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Gamma_u)}{\mathbb{P}(A \cap \Gamma_u)} \mathbb{P}(A \cap \Gamma_u) = \frac{m}{n} \mathbb{P}(A \cap \Gamma_u).$$

因此由全概率公式

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \bigcup_{\substack{\Gamma_u \in A \\ \text{且互不相交}}} \Gamma_u) = \sum_{\substack{\Gamma_u \in A \\ \text{且互不相交}}} \mathbb{P}(B \cap \Gamma_u) = \frac{m}{n} \sum_{\substack{\Gamma_u \in A \\ \text{且互不相交}}} \mathbb{P}(A \cap \Gamma_u) = \frac{m}{n} \mathbb{P}(A).$$

所以定理2.2成立. □

例2.2 设W是初值为0的(q, p)简单随机游动. 对任意$i \geq 1$, 求$\mathbb{P}(\tau_i = n)$.

解 由定理2.2以及(1.2.5) 可得

$$\mathbb{P}(\tau_i = n) = \frac{i}{n} \mathbb{P}(W_n = i) = \begin{cases} \frac{i}{n} C_n^{(n+i)/2} p^{(n+i)/2} q^{(n-i)/2}, & \frac{n+i}{2} \leq n \text{且为正整数}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

下面我们计算τ_0的分布列. 为了简单, 此时我们只讨论(q, p)简单随机游动的情形, 并记

$$f_0(n) = \mathbb{P}(\tau_0 = n | W_0 = 0), \qquad f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n).$$

直观地看, $f_0(n)$表示从0出发在n时刻首次回到0的概率, 而f_0表示从0 出发在有限时间内回到0的概率.

例2.3 设W是(q, p)简单随机游动, 求$f_0(n)$与f_0.

解 由于简单随机游动必须偶数步才可能从位置0回到0, 因此n 为奇数时$f_0(n)=0$. 下设$n=2k$其中$k\geq 1$, 由全概率公式

$$\begin{aligned} f_0(2k) &= \mathbb{P}(\tau_0 = 2k|W_0=0) \\ &= \mathbb{P}(\tau_0=2k, W_1=1|W_0=0)+\mathbb{P}(\tau_0=2k,W_1=-1|W_0=0). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_0=2k,W_1=1|W_0=0) &= \frac{\mathbb{P}(\tau_0=2k,W_1=1,W_0=0)}{\mathbb{P}(W_1=1,W_0=0)}\frac{\mathbb{P}(W_1=1,W_0=0)}{\mathbb{P}(W_0=0)} \\ &= \mathbb{P}(W_1=1|W_0=0)\mathbb{P}(\tau_0=2k|W_1=1,W_0=0) \\ &= p\mathbb{P}(W_{2k}=0,W_i\neq 0,1<i<2k|W_1=1,W_0=0). \end{aligned}$$

由(1.2.3)可知

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(W_{2k}=0,W_i\neq 0,1<i<2k|W_1=1,W_0=0) \\ &= \mathbb{P}(W_{2k-1}=-1,W_i\neq -1,0<i<2k-1|W_0=0)= \\ &= \mathbb{P}(\tau_{-1}=2k-1|W_0=0). \end{aligned}$$

注意从0出发的(q,p)简单随机游动首达-1的时间与从0出发的(p,q)简单随机游动首达1的时间分布相同, 由例2.2可得

$$\mathbb{P}(\tau_{-1}=2k-1|W_0=0)=\frac{1}{2k-1}\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}q^kp^{k-1}=\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}q^kp^{k-1}.$$

从而

$$\mathbb{P}(\tau_0=2k,W_1=1|W_0=0)=p\mathbb{P}(\tau_{-1}=2k-1|W_0=0)=\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}q^kp^k.$$

同理可得

$$\mathbb{P}(\tau_0=2k,W_1=-1|W_0=0)=q\mathbb{P}(\tau_1=2k-1)=\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}q^kp^k.$$

由此可得

$$f_0(2k)=\mathbb{P}(\tau_0=2k|W_0=0)=2\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}q^kp^k=\begin{cases} 2pq, & k=1, \\ \frac{(2k-3)!!}{2^k}\frac{(4pq)^k}{k!}, & k\geq 2. \end{cases}$$

另一方面, 由泰勒展式可知

$$1-(1-4pqs^2)^{1/2}=2pqs^2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k}\frac{(4pq)^k}{k!}s^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}f_0(2k)s^{2k}.$$

注意到$f_0(2k)$非负且随着$s\uparrow 1$, $f_0(2k)s^{2k}\uparrow f_0(2k)$. 因此

$$f_0=\sum_{k=1}^{\infty}f_0(2k)=\lim_{s\uparrow 1}F_0(s)=1-\sqrt{1-4pq}=\begin{cases} 1, & p=q=1/2, \\ 1-|p-q|, & p\neq q. \end{cases} \square$$

由例2.3可知对简单对称随机游动而言, 从状态(位置)0出发在有限步内必然

回到0, 即我们可以反复地, 无穷多次地观察到状态0. 一般地我们称具有这种性质的状态为常返状态.

例2.4 设W为(q,p)-简单随机游动, 记$\rho = p/q$. 任给两个状态(整数)u, v使得$u < 0, v > 0$, 从0出发, 求在到达v之前先到达u的概率$\mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_0 = 0)$.

解 对任意整数$x \le 0 \le y$, 令$g(x,y) = \mathbb{P}(\kappa_x < \kappa_y | W_0 = 0)$, 易知

$$g(0,v) = 1; \qquad g(u,0) = 0; \qquad u < 0, v > 0. \tag{1.2.6}$$

由全概率公式可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_0 = 0) &= \mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v, W_1 = 1 | W_0 = 0) + \mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v, W_1 = -1 | W_0 = 0) \\
&= \mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_1 = 1, W_0 = 0)\mathbb{P}(W_1 = 1 | W_0 = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_1 = -1, W_0 = 0)\mathbb{P}(W_1 = -1 | W_0 = 0) \\
&= p\mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_1 = 1, W_0 = 0) + q\mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_1 = 1, W_0 = 0).
\end{aligned}$$

进一步由(1.2.3)可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_1 = 1, W_0 = 0) \\
&= \sum_{n > m = 1} \mathbb{P}\Big(W_m = u, W_n = v, W_k \notin \{u, v\}, 1 \le k < m, \\
&\qquad W_l \ne v, m+1 \le l < n \Big| W_1 = 1, W_0 = 0\Big) \\
&= \sum_{n > m = 0} \mathbb{P}\Big(W_m = u-1, W_n = v-1, W_k \notin \{u-1, v-1\}, \\
&\qquad 0 \le k < m, W_l \ne v-1, m+1 \le l < n \Big| W_0 = 0\Big) \\
&= \mathbb{P}(\kappa_{u-1} < \kappa_{v-1} | W_0 = 0) = g(u-1, v-1).
\end{aligned}$$

同理可知

$$\mathbb{P}(\kappa_u < \kappa_v | W_1 = -1, W_0 = 0) = g(u+1, v+1).$$

因此

$$g(u,v) = pg(u-1, v-1) + qg(u+1, v+1).$$

由此可得

$$g(u+1, v+1) - g(u,v) = \rho(g(u,v) - g(u-1, v-1)), \quad u < 0, v > 0.$$

反复使用该递推关系式并最后使用(1.2.6)得

$$\begin{aligned}
&g(0, v+|u|) - g(-1, v+|u|-1) \\
&\quad = \rho^{|u|}(g(u,v) - g(u-1, v-1))
\end{aligned}$$

$$= \rho^{|u|+v-1} g(u-v+1,1).$$

从而由

$$1 = g(0, v+|u|) = \begin{cases} \frac{1-\rho^{|u|+v}}{1-\rho} g(u-v+1,1), & \rho \neq 1, \\ (|u|+v) g(u-v+1,1), & \rho = 1; \end{cases}$$

可得

$$g(u,v) = \begin{cases} \frac{1-\rho^v}{1-\rho} g(u-v+1,1) = (1-\rho^v)/(1-\rho^{v-u}), & \rho \neq 1, \\ v g(u-v+1,1) = v/(v-u), & \rho = 1. \end{cases}$$

□

(C) 反射原理与对称原理

通过上面的计算, 我们发现许多问题都可以转化为求“随机过程在一段时间落在某个范围”这类随机事件的概率。对随机游动而言, 反射原理与对称原理是计算这种事件概率的基本工具.

定理2.4(对称原理) 若W是初值为0的**随机游动**, 那么对任意$n \geq 1$ 以及$b > a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(W_1 > 0, \cdots, W_{n-1} > 0, W_n \in [a,b]) = \mathbb{P}(W_1 < W_n, \cdots, W_{n-1} < W_n, W_n \in [a,b]).$$

证明 令$Y_1 = X_n$, $Y_2 = X_{n-1}, \cdots, Y_n = X_1$ 以及对任意$k = 1, \cdots, n$,

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i = \sum_{i=n}^{n-k+1} X_i = W_n - \sum_{i=1}^{n-k} X_i = W_n - W_{n-k}.$$

由于$X_1, \cdots, X_n$是独立同分布的随机变量, 因此$(X_1, \cdots, X_n)$ 与 $(Y_1, \cdots, Y_n)$有相同分布. 从而

$$(W_1, \cdots, W_n) \text{ 与 } (S_1, \cdots, S_n)$$

分布相同. 因此

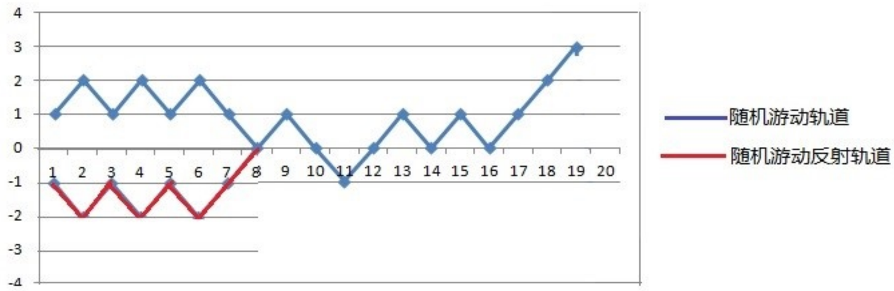
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_1 > 0, \cdots, W_{n-1} > 0, W_n \in [a,b]) &= \mathbb{P}(S_1 > 0, \cdots, S_{n-1} > 0, S_n \in [a,b]) \\ &= \mathbb{P}(W_n - W_{n-1} > 0, \cdots, W_n - W_1 > 0, W_n \in [a,b]) \\ &= \mathbb{P}(W_1 < W_n, \cdots, W_{n-1} < W_n, W_n \in [a,b]). \end{aligned}$$

□

注2.3 对称原理主要利用增量的独立同分布性质(平稳独立增量), 因而对所有的随机游动都成立. 定理2.4中的结论表达式只是对称原理的一种表达式. 根据问题需要, 可以写出不同表示.

引理2.5(反射原理) 设x, y为正整数, 对**简单随机游动**W而言, 从(n,x)到$(n+m, y)$并途中位置回到零点的轨道数与从$(n,-x)$到$(n+m,y)$的轨道数相同.

所谓随机游动的轨道就是将**随机游动**W中其各位置点(n, W_n)在平面上绘点, 并按n的次序用直线依次相连所得到的折线. 参见下图蓝色折线.



证明 令A表示从(n,x)到$(n+m,y)$并途中位置回到零点的所有轨道, B 为从$(n,-x)$到 $(n+m,y)$的所有轨道.

任取A中一个轨道

$$(n,x),(n+1,s_1),\cdots,(n+k,s_k),\cdots,(n+m,y),$$

设从n开始首次到达位置零点的时刻为$n+k$, 即$s_k=0$, 但s_1到s_{k-1}都大于0. 将(n,x) 到 $(n+k,0)$的轨道沿时间轴翻转得到一条连接$(n,-x)$ 与$(n+k,0)$的轨道(如上图红线所示), 再与原来$(n+k,0)$ 到$(n+m,y)$轨道拼接, 得到一条从$(n,-x)$到$(n+m,y)$的轨道. 显然这种轨道产生方式是一对一的, 因此A 中轨道数不超过B中轨道数.

反过来, 任取B中一轨道

$$(n,-x),(n+1,s_1),\cdots,(n+k,s_k),\cdots,(n+m,y).$$

由于简单随机游动每次只能移动一步, 而$-x<0<y$, 因此由$(n,-x)$到$(n+m,y)$的过程中必有某个时刻到达位置0. 设$n+k$是首个这样的时刻. 同样可将$(n,-x)$到$(n+k,0)$的轨道沿时间轴翻转得到一条由(n,x)到$(n+k,0)$的轨道, 进而得到一条从(n,x) 到$(n+m,y)$的轨道. 显然这种轨道产生方式也是一对一的, 因此B中轨道数不超过A中轨道数.

综合两方面可知A,B中轨道数相同. □

命题2.6 若W是**简单对称随机游动**, 那么对任意$x,y>0$,

$$\mathbb{P}(W_{n+m}=y,\min_{n<k<m}W_k\le 0|W_n=x)=\mathbb{P}(W_{n+m}=y|W_n=-x).$$

证明 注意到W是对称随机游动, 即$p=q=1/2$时, 随机游动每一步向上或向下走的机会是对称的. 将W的任意两个可能点(n,x), $(n+m,y)$ 它们连接起来的轨道是等可能的, 而且与从(n,x)出发走过m步的任一轨道发生的概率相同. 注意到

从(n,x)出发走过m步的轨道数为2^m, 由引理2.5得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{n+m}=y, \min_{n<k<m} W_k \le 0 \mid W_n = x) &= \frac{A\text{中轨道数}}{2^m} \\ &= \frac{B\text{中轨道数}}{2^m} = \mathbb{P}(W_{n+m}=y|W_n=-x). \end{aligned}$$ □

(D) 应用举例

例2.5 某娱乐公司为了吸引顾客推出一种特别活动. 活动规则如下：顾客可以参与一种赌博游戏, 输赢概率各50%. 公司为顾客第一局买单：即赢了的顾客获得一个筹码而输了的顾客则无需付出. 若顾客继续游戏, 那么按正常游戏规则执行, 即赢了的顾客获得一个筹码而输了的顾客付出一个筹码. 假设某个顾客参与了该活动但没有购买任何筹码, 包括第一局, 问他至少能玩10局的机会是多少？

解 以W_n表示该顾客第n局结束后手上有的筹码数, 那么W是初值为0的简单对称随机游动, 所求概率为

$$\mathbb{P}(W_1>0, W_2>0, \cdots, W_{10}\ge 0).$$

因此$W_1>0$意味着$W_1=1$, 而且W_{10} 只取偶数, 因此由全概率公式

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1>0,\cdots,W_{10}\ge 0) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_9>0,W_{10}=2k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(W_1=1,\min_{1<m<9}W_m>0,W_9=2k-1)\end{aligned}$$

利用$\{\min_{1<m<9}W_m>0\}$的对立事件$\{\min_{1<m<9}W_m\le 0\}$得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_1>0,\cdots,W_{10}\ge 0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}[\mathbb{P}(W_1=1,W_9=2k-1)-\mathbb{P}(W_1=1,\min_{1<m<9}W_m\le 0,W_9=2k-1)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(W_1=1)[\mathbb{P}(W_9=2k-1|W_1=1) \\ &\qquad -\mathbb{P}(\min_{1<m<9}W_m\le 0,W_9=2k-1|W_1=1)].\end{aligned}$$

由命题2.6可知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_1>0,\cdots,W_{10}\ge 0) &= \mathbb{P}(W_1=1)\sum_{k=1}^{\infty}[p_8(1,2k-1)-p_8(-1,2k-1)] \\ &= \mathbb{P}(W_1=1)\sum_{k=1}^{\infty}[p_8(2k-2)-p_8(2k)] = \frac{p_8(0)}{2} = \frac{35}{256}.\end{aligned}$$ □

例2.6(选票问题), 在一次选举中候选人A得到了n张票, 候选人B得到m张票, $n>m$. 问计票过程中A始终领先B的可能性有多大?

解 以$X_i=1$表示第i个人投票给了A, $X_i=-1$表示第i个人投票给了B. 假定X_i是独立同分布的, 那么

$$\mathbb{P}(X_i=1)=p=\frac{n}{n+m},\ \ \mathbb{P}(X_i=-1)=q=\frac{m}{n+m}.$$

以随机游动$W_k=X_1+\cdots+X_k$表示计票过程中得票变化情况. 结果为$W_{n+m}=n-m>0$. 所求问题转为求(q,p)随机游动的如下条件概率

$$\mathbb{P}(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_{n+m-1}>0|W_{n+m}=n-m).$$

由对称原理及定理2.2

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_{n+m-1}>0,W_{n+m}=n-m)\\&\quad=\mathbb{P}(W_1<W_{n+m},\cdots,W_{n+m-1}<W_{n+m},W_{n+m}=n-m)\\&\quad=\frac{n-m}{n+m}\mathbb{P}(W_{n+m}=n-m).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_{n+m-1}>0|W_{n+m}=n-m)\\&\quad=\frac{\mathbb{P}(W_1>0,W_2>0,\cdots,W_{n+m-1}>0,W_{n+m}=n-m)}{\mathbb{P}(W_{n+m}=n-m)}\\&\quad=\frac{n-m}{n+m}.\end{aligned}$$

□

例2.7(实验设计) 甲乙两种新药对某种疾病可能的治愈率分别假定为p_1, p_2. 为判定两种药物的优劣, 我们关心p_1, p_2间的大小关系. 为此给出如下的试验与判别准则：每次试验治疗两病人, 一人接受甲药治疗, 一人接受乙药治疗. 观察每次治疗效果, 当一种药物的累积治愈人数超过另一种药物的累积治愈人数并达到预先给定的一个标准时, 试验就停止并判定该药比另一种药物疗效好. 问这种试验判别的失误率？

分析 不妨假定对药物在不同患者的疗效是独立的. 试验停止标准为累积治愈人数差达到M人.

$$\text{令}X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{对病人中接受A药治疗者被治愈},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

$$Y_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{对病人中接受B药治疗者被治愈},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

那么$\mathbb{P}(X_i=1,Y_i=0)=p_1(1-p_2)$, $\mathbb{P}(X_i=0,Y_i=1)=p_2(1-p_1)$. 由于试验关注的是治愈人数的差, 因此只需要关注引起治愈人数差值改变的试验, 即那些同

时治愈或同时无效的试验可以不考虑.

解 令$U_i = X_i - Y_i$, 其中X_i, Y_i如上定义. 那么

$$\mathbb{P}(U_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, Y_i = 0 | X_i - Y_i \neq 0) = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)} \triangleq p,$$

$$\mathbb{P}(U_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 0, Y_i = 1 | X_i - Y_i \neq 0) = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)} \triangleq q.$$

若$p_1 > p_2$则$p > q$, 此时试验出现失误表现在(q,p)-随机游动

$$W_0 = 0, \qquad W_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

在没有到达M之前先到达$-M$, 因此由例2.4可知, 失误率

$$P = g(-M, M) = \frac{1-\rho^M}{1-\rho^{2M}}, \quad \rho = p/q.$$

假设$p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.5$, $M = 10$. 此时$p = 0.6$, $q = 0.4$, $\rho = 1.5$, 失误率

$$P = (1.5^{10} - 1)/(1.5^{20} - 1) = 1/(1.5^{10} + 1) \approx 0.017. \qquad \square$$

练习题

2.1 证明(1.2.3).

2.2 设W为(q,p)简单随机游动. 对任意非负整数u, 求$\mathbb{P}(\tau_u < \infty | W_0 = 0)$.

2.3 设赌徒在每一赌局中以概率p赢得一个单位财富, 以概率$q = 1 - p$输掉一个单位财富. 假定赌徒财富累积到N时自动离开而财富为0时则输光被迫离开. 若赌徒初始财富为M, $0 < M < N$, 求该赌徒输光的概率.

2.4 (接例2.5) 若此人玩了至少10 局, 试预测他在第10 局结束时的筹码数.

2.5 对初值为0的简单对称随机游动W,

(1) 对任意$n \geq 1$, 证明$\mathbb{P}(W_1 \neq 0, W_2 \neq 0, \cdots, W_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(W_{2n} = 0)$.

(2) 令$F_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_1 = k | W_0 = 0) s^k$ 其中$|s| < 1$, 求$F_1(s)$.

(3) 求概率$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{8} \{0 < W_i < 5\})$.

1.3　泊松(Poisson)过程

泊松过程是一种应用广泛的简单随机过程, 它与指数分布密切相关, 具有良好的性质.

(A) 计数过程

用数学模型刻画随机现象时, 最基本的工作就是观察所关心随机事件发生的次数. 由此所得到的数学模型常被称为计数过程, 其准确定义如下:

定义3.1 称非负整数值的随机过程$N=\{N(t);t\ge 0\}$为计数过程或点过程, 若其样本函数为右连续的单调不降函数. 若还有$\mathbb{P}(N(t)-N(t-)\le 1$对任意$t\ge 0)=1$, 则称$N$ 是简单计数过程, 其中$N(t-)$表示N在t 点的左极限.

直观地看简单计数过程要求在同一时刻至多发生一次随机事件.

对任意给定的$\omega\in\Omega$, 由于计数过程的样本函数$N(t,\omega)$关于t单调不降且右连续. 因此对任意给定的整数$k\ge 1$,

$$T_k(\omega):=\inf\{t\ge 0;\ N(t,\omega)\ge k\}$$

有意义, 其中$T_0\equiv 0$并约定$\inf\emptyset=\infty$. 由定义可知,

(1) T_k就是第k次事件发生的随机时刻, 通常称之为第k次(随机事件)到达时间.

(2) 对任意$u\ge 0$以及$\omega\in\Omega$, $u\in\{t\ge 0,N(t,\omega)\ge N(u,\omega)\}$, 因此$T_{N(u,\omega)}(\omega)\le u$. 这表明对任意$t\ge 0$, $T_{N(t)}\le t$.

(3) 对任意$\omega\in\Omega$, 若$T_k(\omega)<\infty$, 那么由T_k定义, 存在一列t_n单调下降地收敛到$T_k(\omega)$并且$N(t_n,\omega)\ge k$. 由N 的右连续性, $N(T_k(\omega),\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}N(t_n,\omega)\ge k$. 即对任意$\omega$, $N(T_k(\omega),\omega)\ge k$. 特别$N$为简单计数过程时, 对几乎所有的$\omega$都有$N(T_k)=k$.

由以上分析可知, 计数过程N可表示成

$$N(t)=\sup\{k\ge 0;T_k\le t\},\tag{1.3.1}$$

即对任意ω, $N(t,\omega)=\sup\{k;T_k(\omega)\le t\}$, 其中约定$\sup\emptyset=0$. 因此$N(t)$表示时刻$t$之前(包含$t$)发生的随机事件总数.

与随机游动一样, 我们也可以从随机变量的部分和序列出发认识计数过程.

设$S=\{S_k,k\ge 0\}$是非负随机变量$X_i,i\ge 0$, 的部分和序列. 对任意给定的ω, 当X_i恒正时, S_k是严格增加的. 映射$k\to S_k$ 可逆. 逆映射$S^{-1}:D=$

$\{x_k;\ x_k = S_k, k \geq 0\} \mapsto \mathbb{N}$使得$S^{-1}(x_k) = k$. 容易看出这个逆映射还可推广到非负实数$\bar{\mathbb{R}}_+$上, 使得对任意$x \in \bar{\mathbb{R}}_+$, 当$x_k \leq x < x_{k+1}$时$S^{-1}(x) = k$, 即

$$S^{-1}(x) = \sup\{k \geq 0; S_k \leq x\}. \tag{1.3.2}$$

如果X_i可以为0, 那么S_k作为k的函数不一定可逆, 但(1.3.2)定义的函数$S^{-1}(x)$仍有意义, 而且$S^{-1}(x)$就是使部分和$S_k \leq x$成立的最大求和项数. 通常, 我们称过程

$$S^{-1} = \{S^{-1}(t), t \geq 0\}$$

为部分和序列$\{S_k, k \geq 0\}$的逆过程.

对计数过程N而言, 令$W_k = T_k - T_{k-1}$. 那么W_k 表示第$k-1$ 个事件与第k 个事件之间的时间间隔, 一般地我们称其为第k个间隔时间, 称$W = \{W_k, k \geq 1\}$为间隔时间序列. 此时事件发生的时间$\{T_k, k \geq 0\}$就是间隔时间序列的部分和. 由(1.3.1)可知, 计数过程N就是部分和序列$\{T_k, k \geq 0\}$ 的逆过程.

(B) 泊松过程及其刻画

定义3.2 称计数过程$N = \{N(t);\ t \geq 0\}$是强度为λ的泊松过程, 若N具有独立同分布的间隔时间序列$\{W_k;\ k \geq 1\}$ 且间隔时间分布服从速率为λ的指数分布.

例3.1 假设某房间只有一盏电灯, 而且电灯泡坏了能得到及时更换. 由于灯泡的寿命一般假定独立且服从相同的指数分布, 以$N(t)$表示在$[0, t]$ 时间内更换下来的灯泡数, 那么N就是泊松过程.

由初等概率论可知随机变量X服从参数为$\lambda > 0$的指数分布, 是指X是正的随机变量, 且分布函数$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, 其中$x \geq 0$. X的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

而且$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, $\mathbf{Var}(X) = 1/\lambda^2$. 我们也常称参数$\lambda$ 为速率参数.

指数分布具有以下性质.

(1) 对任意$n \geq 1$, 若$X_1, \cdots, X_n$是服从参数为λ的指数分布的独立变量, 那么$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$服从$\Gamma(n, \lambda)$ 分布. 该分布的密度函数为

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(2) 若$X_1, \cdots, X_n$是分别服从参数为λ_i的指数分布的独立随机变量, 那么$\min\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$

服从参数为$\lambda_1+\cdots+\lambda_n$的指数分布.

(3) 若X是非负连续型随机变量. X服从指数分布当且仅当X是无记忆的, 即对任意$t,s\geq 0$, $\mathbb{P}(X>t+s|X>s)=\mathbb{P}(X>t)$.

以$W_k,k=1,2,\cdots$表示泊松过程的间隔时间变量簇, 那么它们是独立且服从参数为λ的指数分布的随机变量列. 对任意$k\geq 1$, 第k次事件发生时刻$T_k=\sum\limits_{i=1}^{k}W_i$服从$\Gamma(k,\lambda)$分布, 概率密度函数为$\gamma_k(x)$. 并且对任意$t\geq 0$, 泊松过程

$$N(t)=\sup\{k\geq 0;T_k\leq t\}=\sup\{k\geq 0;\sum_{n=1}^{k}W_n\leq t\},\quad t\geq 0,$$

其中约定$\sum\limits_{n=1}^{0}=0$.

由$\{N(0)>0\}\subset\{W_1=0\}$以及

$$\{\text{存在}t\geq 0\text{使得}N(t)-N(t-)\geq 2\}=\{\text{存在某个}k\text{使得}W_k=0\}$$

可得$\mathbb{P}(N(0)=0)=1-\mathbb{P}(N(0)\geq 1)\geq 1-\mathbb{P}(W_1=0)=1$而且

$$\mathbb{P}(\text{存在}t\geq 0\text{使得}N(t)-N(t-)\geq 2)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(W_k=0)=0.$$

因此泊松过程是初值为0的简单计数过程.

下面的命题在一定程度上解释了为什么我们称$N=\{N(t)\}$为泊松过程.

命题3.3 强度为λ的泊松过程在任一时刻$t>0$都服从强度为λt的泊松分布. 因此

$$\mathbb{E}(N(t))=\lambda t,\quad \mathbb{V}ar(N(t))=\lambda t.$$

证明 对任意给定的$t>0$和非负整数k, 由(1.3.1)可知

$$\{N(t)=k\}=\{T_k\leq t<T_{k+1}\},\tag{1.3.3}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(N(t)=k\big)&=\mathbb{P}(T_k\leq t<T_{k+1})=\mathbb{P}(T_k\leq t)-\mathbb{P}(T_{k+1}\leq t)\\&=\int_0^t[\gamma_k(x)-\gamma_{k+1}(x)]\mathrm{d}x=\int_0^t\Big[\frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{\lambda^{k+1}x^k}{k!}\Big]\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由分部积分可得

$$\mathbb{P}\big(N(t)=k\big)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

这表明$N(t)$服从强度为λt的泊松分布. □

定理3.4 强度为λ的泊松过程是一个平稳独立增量过程且对任意$t,s\geq 0$, $N(t+s)-N(s)$服从强度为λt的泊松分布, 即对任意整数$k\geq 0$,

$$\mathbb{P}(N(s+t)-N(s)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.\tag{1.3.4}$$

证明* 由习题3.9可知, 只要证明对任意$n \geq 1$以及$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$和非负整数$k_1, \cdots, k_n$, 总有

$$\mathbb{P}\Big(N(t_r) = \sum_{i=1}^{r} k_i, r = 1, 2, \cdots, n\Big) = \mathrm{e}^{-\lambda t_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!}. \tag{1.3.5}$$

为了表示简便, 记N的间隔时间序列为$\{W_r\}$, 事件发生时刻为$\{T_r\}$. 对任意$r \geq 1$, 令$s_r = \sum_{i=1}^{r} k_i$以及

$$A_r = \{T_{s_1} \leq t_1, T_{s_1+1} > t_1, \cdots, T_{s_{r-1}} \leq t_{r-1}, T_{s_{r-1}+1} > t_{r-1}\},$$
$$B_r = \{T_{s_r} \leq t_r, T_{s_r+1} > t_r\},$$
$$C_r = \{T_{s_1} \leq t_1, T_{s_1+1} > t_1, \cdots, T_{s_{r-1}} \leq t_{r-1}\}.$$

利用等式(1.3.3), (1.3.5)可简写为

$$\mathbb{P}\big(A_{n+1}\big) = \mathrm{e}^{-\lambda t_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!}. \tag{1.3.6}$$

当$n = 1$时由命题3.3可知(1.3.6)显然成立. 下设$n = m - 1$时成立, 即

$$\mathbb{P}\big(A_m\big) = \mathrm{e}^{-\lambda t_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!}.$$

当$n = m$时, 注意到$A_{m+1} = A_m B_m$, 由归纳假设,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{m+1}) &= \mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(B_m|A_m)\\ &= \mathbb{P}(B_m|A_m)\mathrm{e}^{-\lambda t_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!}.\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

下面我们分情况讨论.

(1)当$k_m = 0$时, $s_m = s_{m-1}$, $B_m = \{T_{s_{m-1}} < t_m, T_{s_{m-1}+1} > t_m\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_m|A_m) &= \frac{\mathbb{P}(A_m B_m)}{\mathbb{P}(A_m)} = \frac{\mathbb{P}(C_m, T_{s_{m-1}+1} > t_m)}{\mathbb{P}(C_m, T_{s_{m-1}+1} > t_{m-1})}\\ &= \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{C_m}\mathbb{P}(W_{s_{m-1}+1} > t_m - T_{s_{m-1}}|T_1, \cdots, T_{s_{m-1}}))}{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{C_m}\mathbb{P}(W_{s_{m-1}+1} > t_{m-1} - T_{s_{m-1}}|T_1, \cdots, T_{s_{m-1}}))}\\ &= \frac{\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_m - T_{s_{m-1}})}\big)}{\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m-1} - T_{s_{m-1}})}\big)} = \mathrm{e}^{-\lambda(t_m - t_{m-1})}.\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

(2)当$k_m = 1$时, $s_m = s_{m-1} + 1$, $B_m = \{T_{s_m} < t_m, T_{s_m+1} > t_m\}$, 因此

$$\mathbb{P}(B_m|A_m) = \frac{\mathbb{P}(A_m B_m)}{\mathbb{P}(A_m)} = \frac{\mathbb{P}(C_m, t_{m-1} < T_{s_m} < t_m, T_{s_m+1} > t_m)}{\mathbb{P}(C_m, T_{s_{m-1}+1} > t_{m-1})}.$$

与(1.3.8)类似处理可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(C_m, t_{m-1} < T_{s_m} < t_m, T_{s_m+1} > t_m)\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{C_m} \int_{t_{m-1} - T_{s_{m-1}}}^{t_m - T_{s_{m-1}}} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s \int_{t_m - T_{s_{m-1}} - s}^{\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}u\Big)\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{C_m}\lambda(t_m - t_{m-1})\mathrm{e}^{-\lambda(t_m - T_{s_{m-1}})}\big)$$
$$= \lambda(t_m - t_{m-1})\mathrm{e}^{\lambda(t_m - t_{m-1})}\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m-1} - T_{s_{m-1}})}\big)$$

因此$k_m = 1$时,

$$\mathbb{P}(B_m|A_m) = \frac{\lambda(t_m - t_{m-1})\mathrm{e}^{\lambda(t_m - t_{m-1})}\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m-1} - T_{s_{m-1}})}\big)}{\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_{m-1} - T_{s_{m-1}})}\big)}$$
$$= \lambda(t_m - t_{m-1})\mathrm{e}^{\lambda(t_m - t_{m-1})}. \tag{1.3.9}$$

(3)当$k_m > 1$时, $s_m \geq s_{m-1} + 2$, $B_m = \{T_{s_m} < t_m, T_{s_m+1} > t_m\}$, 因此

$$\mathbb{P}(A_m B_m) = \mathbb{P}(C_m \cap \{T_{s_{m-1}+1} > t_{m-1}\} \cap B_m)$$
$$= \mathbb{P}(C_m, t_m - T_{s_{m-1}} > T_{s_{m-1}+1} - T_{s_{m-1}} > t_{m-1} - T_{s_{m-1}},$$
$$T_{s_m} - T_{s_{m-1}+1} < t_m - T_{s_{m-1}+1}, T_{s_m+1} - T_{s_m} > t_m - T_{s_m}). \tag{1.3.10}$$

由$\{T_k\}$的独立增量性, 以及对任意$k > l$,

$$T_k - T_l \sim \gamma_{k-l}(x) = \frac{\lambda^{k-l}}{(k-l-1)!}x^{k-l-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

(1.3.10)等于

$$\mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{C_m}\int_{t_{m-1}-T_{s_{m-1}}}^{t_m - T_{s_{m-1}}}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s\int_0^{t_m - s - T_{s_{m-1}}}\gamma_{k_m-1}(u)\mathrm{d}u\int_{t_m - T_{s_{m-1}} - s - u}^{\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda v}\mathrm{d}v\bigg)$$
$$= \mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_m - T_{s_{m-1}})}\int_{t_{m-1}-T_{s_{m-1}}}^{t_m - T_{s_{m-1}}}\mathrm{d}s\int_0^{t_m - s - T_{s_{m-1}}}\frac{\lambda^{k_m}u^{k_m-2}}{(k_m-2)!}\mathrm{d}u\bigg)$$
$$= \mathbb{E}\bigg(\mathbf{1}_{C_m}\mathrm{e}^{-\lambda(t_m - T_{s_{m-1}})}\frac{\lambda^{k_m}(t_m - t_{m-1})^{k_m}}{k_m!}\bigg).$$

因此$k_m > 1$时,

$$\mathbb{P}(B_m|A_m) = \frac{\mathbb{P}(A_m B_m)}{\mathbb{P}(A_m)} = \frac{\lambda^{k_m}(t_m - t_{m-1})^{k_m}}{k_m!}\mathrm{e}^{-\lambda(t_m - t_{m-1})}. \tag{1.3.11}$$

分别将(1.3.8), (1.3.9)和(1.3.11)代入(1.3.7)可知不论k_m取什么值, (1.3.6)对$n = m$也成立. 由归纳法原理, (1.3.6)对一切$n \geq 1$ 都成立, 因而定理得证. □

定理3.5 N为泊松过程当且仅当N是初值为0的非零简单计数过程且具有平稳独立增量.

记N的间隔时间序列为$\{W_k;\ k \geq 1\}$, 令$T_k = \sum_{i=1}^k W_i$, $k \geq 1$. 为证明定理3.5，我们需要如下的引理.

引理3.6 $\{W_k;\ k \geq 1\}$ 为服从参数为λ的指数分布的独立同分布随机变量列当且仅当对任意$k \geq 1$及任意$0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$,

$$\mathbb{P}(T_k \leq t_k, k = 1, 2, \cdots, n) = \int_0^{t_1}\mathrm{d}s_1\int_{s_1}^{t_2}\mathrm{d}s_2\cdots\int_{s_{n-1}}^{t_n}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda s_n}\mathrm{d}s_n. \tag{1.3.12}$$

证明 由数学归纳法容易证明必要性，留作习题. 充分性由例1.2可得, 此略. □

引理3.7 若计数过程N初值为零且具有平稳独立增量, 那么对任意$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$以及非负整数$k_0 < k_1 < \cdots < k_{n+1}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(t_{n+1}) \ge k_{n+1} | N(t_m) = k_m, N(t_m-) = k_m - 1, 0 \le m \le n)\\&= \mathbb{P}(N(t_{n+1} - t_n) \ge k_{n+1} - k_n).\end{aligned}$$

证明 由于计数过程单调不降, 对任意$t \ge 0$, $N(t-) = \lim_{s \uparrow t} N(s)$. 因此,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(t_{n+1}) \ge k_{n+1}, N(t_m) = k_m, N(t_m-) = k_m - 1, 0 \le m \le n)\\&= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(N(t_{n+1}) \ge k_{n+1}, N(t_m) = k_m, N(t_m - \varepsilon) = k_m - 1, 0 \le m \le n).\end{aligned}$$

不妨设$0 < \varepsilon < \min_{1 \le k \le n}\{t_k - t_{k-1}\}$, 由平稳独立增量性可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N(t_{n+1}) \ge k_{n+1}, N(t_m) = k_m, N(t_m-) = k_m - 1, 0 \le m \le n)\\&= \mathbb{P}(N(t_{n+1}) - N(t_n) \ge k_{n+1} - k_n)\\&\qquad \times \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}(N(t_m) = k_m, N(t_m - \varepsilon) = k_m - 1, 0 \le m \le n).\\&= \mathbb{P}(N(t_{n+1} - t_n) \ge k_{n+1} - k_n)\mathbb{P}(N(t_m) = k_m, N(t_m-) = k_m - 1, 0 \le m \le n).\end{aligned}$$

由此可知引理成立. □

定理3.5的证明 必要性由定理3.4和泊松过程简单性质可得. 下证充分性. 为此, 我们需证明$W_k, k \ge 1$为独立同分布随机变量且服从参数为λ 的指数分布. 由引理3.6, 我们只需证明(1.3.12) 对任意$n \ge 1$成立.

当$n = 1$时, 对任意$t \ge 0$, 注意到

$$\mathbb{P}(T_1 \le t) = \mathbb{P}(N(t) \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(N(t) = 0)$$

令$f(t) = \mathbb{P}(N(t) = 0)$. 对任意$s, t > 0$, 由平稳独立增量性以及条件$N(0) = 0$可得

$$f(s + t) = \mathbb{P}(N(s + t) = 0) = \mathbb{P}(N(s + t) = 0, N(t) = 0) = f(s)f(t).$$

由于$N(t)$右连续且不恒为0, $0 \le f(t) < 1$且右连续. 因此

$$f(t) \equiv 0 \ \text{ 或存在}\lambda > 0\text{使得} f(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

若$f(t) \equiv 0$, 则$\mathbb{P}(N(t + s) - N(s) \ge 1) = 1 - f(t) = 1$, 从而对任意$1 > s > 0$, 由

$$(\{N(1) - N(s) \ge 2\} \supset \{N(1) - N(\frac{1+s}{2}) \ge 1\} \cap \{N(\frac{1+s}{2}) - N(s) \ge 1\},$$

可知

$$\mathbb{P}(N(1) - N(s) \ge 2) = 1.$$

令$s \to 1$得

$$\mathbb{P}(N(1) - N(1-) \ge 2) = 1.$$

这与N为简单计数过程矛盾, 因此

$$\mathbb{P}(T_1 \le t) = \mathbb{P}(N(t) \ge 1) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds, \tag{1.3.13}$$

即$n = 1$时(1.3.12)成立.

下设$n = m - 1$时(1.3.12)也成立, 那么$n = m$时,由归纳假设

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_k \le t_k, 1 \le k \le m) = & \int_0^{t_1} ds_1 \cdots \int_{s_{m-2}}^{t_{m-1}} \lambda^{m-1} e^{-\lambda s_{m-1}} \\ & \times \mathbb{P}(T_m \le t_m | T_k = s_k, 1 \le k < m) ds_{m-1}\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

由于N是初值为0的简单计数过程, 具有平稳独立增量, 由引理3.7和(1.3.13)可知

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(T_m \le t_m | T_k = s_k, 1 \le k < m) \\ &= \mathbb{P}(N(t_m) \ge m | N(s_k) = k, N(s_k-) = k-1, 1 \le k < m) \\ &= \mathbb{P}(N(t_m - s_{m-1}) \ge 1) \\ &= \int_0^{t_m - s_{m-1}} \lambda e^{-\lambda s_m} ds_m = \int_{s_{m-1}}^{t_m} \lambda e^{-\lambda (s_m - s_{m-1})} ds_m.\end{aligned}$$

将其代入(1.3.14)整理后即得(1.3.12). □

由定理3.4和3.5可知不恒为0的计数过程N是强度为λ的泊松过程当且仅当N是初值为0简单计数过程且具有平稳独立增量, 增量$N(t+s) - N(s)$服从参数为λt的泊松分布.

例3.2 假设某银行顾客按强度为λ的泊松过程N到达, 已知T时刻到达银行的顾客数是10. 问(1)再经过时间T, 新增顾客的平均数c. (2)再等待5位顾客的平均时间t.

解 (1) 所求新增顾客平均数$c = \mathbb{E}(N(2T) - N(T))$. 由平稳独立增量性可知

$$c = \mathbb{E}(N(T)) = \lambda T.$$

(2)对任意t, 令$\tilde{N}(t) = N(t+T) - N(T)$. 那么由$N$的平稳独立增量性可知$\tilde{N}$ 仍然具有平稳增量性, 从而还是强度为λ的泊松过程. 因此要再等待5位顾客对$\tilde{N}$而言意味着还要计数到5. 所以所求平均时间$t = \mathbb{E}(T_5)$. 由T_5服从$\Gamma(5, \lambda)$分布可知$t = 5/\lambda$. □

(C) 到达时间的条件分布

定理3.8 设$\{T_n, n \ge 1\}$是强度为λ的泊松过程$N = \{N(t), t \ge 0\}$的到达时刻序列, 那么对任意$0 \le s_1 < t_1 < \cdots \le s_n < t_n \le t$,

$$\mathbb{P}(T_j \in (s_j, t_j), 1 \le j \le n | N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \prod_{j=1}^n (t_j - s_j).$$

证明 任取$0=t_0\le s_1<t_1\le s_2<\cdots\le s_n<t_n\le t$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_j\in(s_j,t_j],1\le j\le n|N(t)=n)\\
&=\mathbb{P}\big(N(t_j)-N(s_j)=1,N(s_j)-N(t_{j-1})=0,\\
&\qquad\qquad 1\le j\le n,N(t)-N(t_n)=0\big|N(t)=n\big)\\
&=\prod_{j=1}^{n}[\lambda(t_j-s_j)\mathrm{e}^{-\lambda(t_j-t_{j-1})}]\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_n)}/[\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}]=\frac{n!}{t^n}\prod_{j=1}^{n}(t_j-s_j).
\end{aligned}
$$

定理得证. □

已知n个独立$(0,t]$上均匀分布随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$的次序统计量

$$(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$$

的概率密度函数为

$$p(x_1,\cdots,x_n)=n!t^{-n},\quad 0<x_1<x_2<\cdots<x_n<t,$$

从而对任意$0\le s_1<t_1<\cdots\le s_n<t_n\le t$, 概率

$$\mathbb{P}(X_{(j)}\in(s_j,t_j),1\le j\le n)=\frac{n!}{t^n}\prod_{j=1}^{n}(t_j-s_j).$$

比较上式与定理3.8结论，我们可知在分布意义下

$$(T_1,T_2,\cdots,T_n|N(t)=n)\overset{d}{=}(X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}),$$

即给定条件$N(t)=n$后, $T_1,\cdots,T_n$可看作n个独立的$(0,t]$上均匀分布随机变量的次序统计量.

例3.3 (接例3.2)求第10位顾客到达的时间分布和平均时间.

解 由定理3.8, 在条件$N(T)=10$下, 第10个顾客到达时间T_{10}与10个独立的$(0,T]$上均匀分布随机变量的最大次序统计量相同. 因此T_{10}的密度函数为

$$f(x)=10\frac{x^9}{T^{10}}.$$

平均时间

$$\mathbb{E}(T_{10})=\int_0^T xf(x)\mathrm{d}x=10T\int_0^1 x^{10}\ dx=\frac{10T}{11}.$$ □

作为定理3.8的应用, 我们有如下推论.

推论3.9 设n元函数$f(x_1,x_2\cdots,x_n)$满足对于任意一个n 级排列$(t_1,t_2,\cdots,t_n)$都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n}).$$

那么

$$\mathbb{E}(f(T_1,T_2,\cdots,T_n)|N(t)=n)=\mathbb{E}(f(X_1,X_2,\cdots,X_n)),$$

其中$X_1, \cdots, X_n$服从$(0,t]$上均匀分布的独立随机变量.

证明 由定理3.8可知

$$\mathbb{E}(f(T_1, T_2, \cdots, T_n)|N(t)=n) = \mathbb{E}(f(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}).$$

由于次序统计量只是$X_1, \cdots, X_n$的一种排列, 由f的条件假设可知

$$\mathbb{E}(f(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}) = \mathbb{E}(f(X_1, \cdots, X_n)),$$

进而结论成立. □

例3.4 旅客依强度为λ的泊松过程到达车站, 若火车在时刻t离站, 求在$(0,t)$ 区间内到达的旅客的平均总等待时间.

解 记第k位旅客到达时刻为T_k, t之前到达总旅客数位$N(t)$, 则总等待时间为

$$T = \sum_{i=1}^{N(t)} (t - T_i).$$

所求平均总等待时间为

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t))\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)|N(t)=n\big)\mathbb{P}(N(t)=n)\end{aligned}$$

显然改变T_i次序不会影响$\sum_{i=1}^n (t-T_i)$的结果, 由推论3.10,

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(t-X_i)\Big)\mathbb{P}(N(t)=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(nt - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}X_i)\Big)\mathbb{P}(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt}{2}\mathbb{P}(N(t)=n) = \frac{t}{2}\mathbb{E}(N(t)) = \frac{\lambda t^2}{2}.\end{aligned}$$ □

例3.5* 设泊松过程N的强度为λ, T_k为到达时刻, $k \geq 1$. 若$\int_0^\infty |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$, 证明

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty} f(T_n)) = \lambda\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t.$$

证明 先设f非负. 此时由单调收敛定理

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty}f(T_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}(f(T_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty f(t)\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对一般的f, 注意到$f = f^+ - f^- = f \vee 0 - (-f) \vee 0$. 由$f$非负情形的讨论可知

$$\mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^{\infty}|f(T_n)|\big) < \infty, \quad \mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^{\infty}f^+(T_n)\big) < \infty, \quad \mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^{\infty}f^-(T_n)\big) < \infty.$$

这表明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(T_n)|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f^+(T_n)$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f^-(T_n)$ 都几乎处处收敛. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(T_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(f^+(T_n)-f^-(T_n))=\sum_{n=1}^{\infty}f^+(T_n)-\sum_{n=1}^{\infty}f^-(T_n),$$

几乎处处成立. 从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^{\infty}f(T_n)\big)&=\mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^{\infty}f^+(T_n)\big)-\mathbb{E}\big(\sum_{n=1}^{\infty}f^-(T_n)\big)\\&=\lambda\int_0^{\infty}[f^+(t)-f^-(t)]\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$ □

(D) 稀疏过程

对于计数过程$N=\{N(t)\}$记录的随机事件, 有时我们需要对随机事件进行分类, 比如我们记录到达银行的顾客, 可以将顾客按性别分成两类, 对应地计数过程就会被分拆. 特别, 如果我们要求每个事件**独立于其他事件**以概率p_i归为第i类事件, 其中 $i=1,\cdots,m$且 $\sum_{i=1}^m p_i=1$, 那么我们称记录第i类事件发生次数的计数过程$N_i=\{N_i(t)\}$为N的稀疏过程. 计数过程N与它的稀疏过程N_i之间满足: 对任意t,

$$N(t)=\sum_{i=1}^m N_i(t).$$

对任意$s<t$, 在给定$(s,t]$时段内总的随机事件数$N(t)-N(s)$条件下, 该区间内各类事件发生次数

$$(N_1(t)-N_1(s),N_2(t)-N_2(s),\cdots,N_m(t)-N_m(s))$$

的联合分布是以$p_1,p_2,\cdots,p_m$为发生概率的多元二项分布(参见例1.1), 而且与其它不相交区间发生的随机事件无关. 即对任意非负整数$k_i, 1\le i\le m$, 令$k=\sum_{i=1}^m k_i$, 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=k_i,1\le i\le m|N(t)-N(s)=k)\\=\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m},\end{aligned}\tag{1.3.15}$$

而且对任意$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, 以及非负整数$k_{ij}, 1\le i\le m, 1\le j\le n$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{ij},1\le i\le m,1\le j\le n|N(t_l)-N(t_{l-1}),l=1,\cdots,n)\\&=\prod_{j=1}^n\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{ij},1\le i\le m|N(t_l)-N(t_{l-1}),l=1,\cdots,n)\\&=\prod_{j=1}^n\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{ij},1\le i\le m|N(t_j)-N(t_{j-1})).\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

定理3.10 若N是强度为λ的泊松过程, 那么它的稀疏过程$N_1,N_2,\cdots,N_m$是独立

的泊松过程, 强度分别$\lambda p_1,\cdots,\lambda p_m$.

证明* 我们先证明对任意$i\geq 1$, N_i是强度为λp_i 的泊松过程.

对任意$n\geq 1$, 任取$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$以及非负整数$k_1,\cdots,k_n$. 由N 的独立增量性和(1.3.16) 可知

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_j, j=1,\cdots,n)\\
&=\mathbb{E}[\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_j, j=1,\cdots,n|N(t_l)-N(t_{l-1}), l=1,\cdots,n)]\\
&=\mathbb{E}\big[\prod_{j=1}^n \mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_j|N(t_j)-N(t_{j-1}))\big]\\
&=\prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_j|N(t_j)-N(t_{j-1}))]\\
&=\prod_{j=1}^n \mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_j).
\end{aligned}$$

因此N_i具有独立增量. 注意到对任意$t>s\geq 0$以及非负整数k,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=k)=\sum_{r=0}^\infty \mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=k, N(t)-N(s)=k+r)\\
&\quad=\sum_{r=0}^\infty \mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=k|N(t)-N(s)=k+r)\mathbb{P}(N(t)-N(s)=k+r).
\end{aligned}$$

由(1.3.15)得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=k)&=\sum_{r=0}^\infty C_{k+r}^k p_i^k(1-p_i)^r\frac{[\lambda(t-s)]^{k+r}}{(k+r)!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\\
&=\frac{[p_i\lambda(t-s)]^k\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{k!}\sum_{r=0}^\infty\frac{[\lambda(1-p_i)(t-s)]^r}{r!}\\
&=\frac{[p_i\lambda(t-s)]^k\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p_i)(t-s)}=\frac{[p_i\lambda(t-s)]^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda p_i(t-s)}.
\end{aligned}$$

因此N_i有平稳增量且增量$N_i(t)-N_i(s)$服从强度为$p_i\lambda(t-s)$的泊松分布. 由定理3.5可知N_i是强度为λp_i的泊松过程.

对任意$n\geq 1$以及任意$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, 任取非负整数$k_{i,j}$, $1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$, 并令$k_j=\sum_{i=1}^m k_{i,j}$以及

$$A=\{N(t_j)-N(t_{j-1})=k_j,\ 1\leq j\leq n\}.$$

由条件概率公式和(1.3.16)可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{i,j}, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)\\
&\quad=\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{i,j}, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n|A)\mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(A)\prod_{j=1}^{n}\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{i,j}, 1\le i\le m|N(t_j)-N(t_{j-1})=k_j).$$

再由(1.3.15)和N的独立增量泊松分布可知

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{i,j}, 1\le i\le m, 1\le j\le n)\\
&\quad=\prod_{j=1}^{n}\Big[\frac{k_j!}{k_{1,j}!k_{2,j}!\cdots k_{m,j}!}p_1^{k_{1,j}}\cdots p_m^{k_{m,j}}\frac{[\lambda(t_j-t_{j-1})]^{k_j}}{k_j!}\mathrm{e}^{-\lambda(t_j-t_{j-1})}\Big]\\
&\quad=\prod_{i=1}^{m}\Big[\prod_{j=1}^{n}\frac{[\lambda p_i(t_j-t_{j-1})]^{k_{i,j}}}{k_{i,j}!}\mathrm{e}^{-\lambda p_i(t_j-t_{j-1})}\Big]\\
&\quad=\prod_{i=1}\mathbb{P}(N_i(t_j)-N_i(t_{j-1})=k_{i,j}, 1\le j\le n).
\end{aligned}$$

因此$(N_i(t_1),\cdots,N_i(t_n)), i=1,\cdots,m$ 相互独立. 由随机过程独立性判别条件(参见习题5-3)可知稀疏过程$N_i, i=1,\cdots,m$独立. □

例3.6 某商场顾客以一个强度为每小时20人的泊松过程到达, 其中10%为男性, 90% 为女性. (1)问半个小时内至少有1个男顾客到达的概率p. (2)已知一小时内有4个男顾客到达条件下, 到达顾客总数的期望n.

解 以$N_1(t), N_2(t)$分别记录t之前男, 女顾客到达的人数. 那么N_1, N_2分别是强度为2和18的泊松过程且独立. 所以

(1)所求概率$p=\mathbb{P}(N_1(0.5)\ge 1)=1-\mathbb{P}(N_1(0.5)=0)=1-\mathrm{e}^{-1}$.

(2)所求期望为$n=4+\mathbb{E}(N_2(1)|N_1(1)=4)=4+\mathbb{E}(N_2(1))=4+18=22$. □

(E) 非齐次泊松过程

泊松过程要求强度为常数, 这个条件使泊松过程简单易处理, 但与现实情况会有较大差异. 泊松过程的一种推广是所谓非齐次泊松过程, 它的定义如下：

定义3.3 称计数过程$N=\{N(t), t\ge 0\}$是一个强度为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程, 若她满足:

(1) $N(0)=0$;

(2) N具有独立增量;

(3) 对任意$0\le s<t$, $N(t)-N(s)$服从强度为$\int_s^t\lambda(u)\mathrm{d}u$的泊松分布.

由定义可知对非齐次的泊松过程, 在任意时刻t, $N(t)$服从强度为$\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u$的泊松分布. 因此此计数过程首个事件发生时间$T_1$的分布满足

$$\mathbb{P}(T_1>t)=\mathbb{P}(N(t)=0)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u},$$

从而密度函数为

$$f(t)=\lambda(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u},\quad t\geq 0.$$

例3.7 已知某网店在不同时间段顾客访问事件是独立的, 在晚上$11:00$到$11:30$, 顾客按10人/小时的速度访问, 而$11:30-12:00$按6人/小时的速度访问. 问在$11:00-12:00$没有顾客访问的概率?

解 由于假定不同时间段顾客访问事件是独立的, 而且不同时间访问速度不同, 因此可以用非齐次泊松过程刻画$N(t)$. 以晚11:00为起始时间, 在$0<t\leq 0.5$时间段内$N(t)$的强度为10, 在$0.5<t\leq 1$时间段内强度为6. 因此所求概率$p=\mathrm{e}^{-8}$. □

非齐次泊松过程也会自然出现在泊松过程的稀疏过程中, 推广定理3.10得:

定理3.11 若强度为λ的泊松过程在任意时刻t记录的事件以概率$p_i(t)$归为第i类事件, 且与其他事件独立, 其中 $i=1,\cdots,m$ 且 $\sum_{i=1}^m p_i(t)=1$. 那么记录第i类事件发生次数的计数过程$N_i=\{N_i(t)\}$就是一个强度为$\lambda p_i(t)$的非齐次泊松过程, 而且$N_1,N_2,\cdots,N_m$相互独立.

证明* 首先, 从定理条件假设容易看出, (1.3.16)仍然成立.

对任意给定的$0\leq s<t$和非负整数n, 任取非负整数$n_1,\cdots,n_m$使得$n_1+\cdots+n_m=n$. 将指标$1,2,\cdots,n$随机地分成m组使得每组中指标个数分别是$n_1,n_2,\cdots,n_m$. 将所有这种分法的集合记成A. 由组合数计算可知A中共有$K:=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$ 种分法, 并用记号$b_i,1\leq i\leq K$ 表示. 以$B_i(j),1\leq j\leq m$ 表示在b_i这种分法下落入第j组的n_j 个指标构成的集合. 对任意$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in(s,t]^n$, 定义

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^K\prod_{r\in B_i(1)}p_1(x_r)\prod_{r\in B_i(2)}p_2(x_r)\cdots\prod_{r\in B_i(m)}p_m(x_r).$$

函数f满足

(1) 任意调换$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的次序(记调换后的结果为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$), 由组合的无次序性以及乘法的可交换性可知

$$\begin{aligned}f(y_1,y_2,\cdots,y_n)&=\sum_{i=1}^K\prod_{r\in B_i(1)}p_1(y_r)\prod_{r\in B_i(2)}p_2(y_r)\cdots\prod_{r\in B_i(m)}p_m(y_r)\\&=\sum_{i=1}^K\prod_{r\in B_i(1)}p_1(y_r)\prod_{r\in B_i(2)}p_2(y_r)\cdots\prod_{r\in B_i(m)}p_m(y_r)\\&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

(2) 若考察条件概率

$$\mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=n_i, 1\le i\le m|T_1,\cdots,T_n, N(t)-N(s)=n)$$

其中$T_1,\cdots,T_n$表示N在(s,t)内n次事件发生的时刻. 注意在给定$N(t)-N(s)=n$以及$T_1,\cdots,T_n$条件下, 事件$\{N_i(t)-N_i(s)=n_i, 1\le i\le m\}$ 可看作在n个具有m种可能结果的独立随机实验中(每次实验结果出现的概率可以不同),各种结果出现次数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_m$的随机事件. 因此构成该随机事件的所有可能的组合方法恰为集合A, 而A每种组合b_i出现的概率为

$$\prod_{r\in B_i(1)} p_1(T_i)\prod_{r\in B_i(2)} p_2(T_r)\cdots\prod_{r\in B_i(m)} p_m(T_r).$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=n_i, 1\le i\le m|T_1,\cdots,T_n, N(t)-N(s)=n)\\ &\quad=\sum_{i=1}^{K}\prod_{r\in B_i(1)} p_1(T_i)\prod_{r\in B_i(2)} p_2(T_r)\cdots\prod_{r\in B_i(m)} p_m(T_r)\\ &\quad=f(T_1,T_2,\cdots,T_n).\end{aligned}$$

由泊松过程的平稳独立增量性质, 推论3.9以及条件数学期望性质可知

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_i(t)-N_i(s)=n_i, 1\le i\le m|N(t)-N(s)=n)\\ &=\mathbb{E}(f_n(T_1,\cdots,T_n)|N(t)-N(s)=n)=\mathbb{E}(f(X_1,\cdots,X_n))\\ &=\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in B_i(1)} p_1(X_r)\prod_{r\in B_i(2)} p_2(X_r)\cdots\prod_{r\in B_i(m)} p_m(X_r)\Big)\\ &=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}\Big[\frac{1}{t-s}\int_s^t p_1(u)\mathrm{d}u\Big]^{n_1}\cdots\Big[\frac{1}{t-s}\int_s^t p_m(u)\mathrm{d}u\Big]^{n_m},\end{aligned}\tag{1.3.17}$$

其中$X_1,\cdots,X_n$为n个独立的(s,t)均匀分布随机变量.

将(1.3.17)替换(1.3.15), 重复定理3.10的证明可得定理结论. □

例3.8 假设商场顾客按强度为K人/小时的泊松过程到达, 每个顾客在商场停留时间服从速率为λ的指数分布. 商场监控系统在c时开始工作、$c+d$时停止, 假设顾客被监控系统捕捉到的概率p 与商场监控系统工作时顾客在商场停留时间u满足关系式$p=1-\mathrm{e}^{-u}$, 求商场监控系统工作d 小时捕捉到的平均顾客数m(假定顾客行为是相互独立的).

解 记任意时刻t进入商场的顾客停留时间为U_t. 那么由题设可知, 当$t\le c$时, 顾客被监控到的概率

$$p_t=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{c-t\le U_t\}}(1-\mathrm{e}^{-(U_t-c+t)\wedge d}))=\frac{1-\mathrm{e}^{-d(1+\lambda)}}{1+\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(t-c)}.$$

当$d+c>t>c$时, 顾客被监控到的概率

$$p_t = \mathbb{E}(1-\mathrm{e}^{-U_t \wedge (d+c-t)}) = \frac{1-\mathrm{e}^{(1+\lambda)(t-c-d)}}{1+\lambda}.$$

因此在$[0,c+d]$时段内, 被监控到的顾客按强度为Kp_t的非齐次泊松过程到达. 从而被监控的平均顾客数为

$$m = K\int_0^{d+c} p_t \mathrm{d}t = K\Big[\frac{(1-\mathrm{e}^{-d(1+\lambda)})(1-\mathrm{e}^{-\lambda c})}{\lambda(1+\lambda)} + \frac{d}{1+\lambda} - \frac{1-\mathrm{e}^{-(1+\lambda)d}}{(1+\lambda)^2}\Big]. \qquad \square$$

练习题 以下总设$N=\{N(t),t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程.

3.1 设$T_0=0$, $\{T_k\}_{k\geq 1}$ 是单调不降的非负随机变量序列. 对任意$t\geq 0$, 令$N(t)=\sup\{k\geq 0: T_k\leq t\}$. 证明

(1) 对任意$k\geq 1$, $T_k=\inf\{t: N(t)\geq k\}$. (2) $N(t)+1=\inf\{k\geq 0: T_k>t\}$.

3.2* 若例3.2中泊松过程N的强度λ未知, 试给出λ的极大似然估计并由此计算c和t.

3.3 对任意$0<s<t$, $n\geq 1$, 证明

$$\mathbb{P}(N(s)=k|N(t)=n) = C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n$$

3.4 设随机变量T与N独立且对任意$t>0$, $\mathbb{P}(T>t)=\mathrm{e}^{-\mu t}$. 证明

$$\mathbb{P}(N(T)=k) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

3.5 对任意$k\geq 0$, 令T_k表示第k次随机事件发生的时间序列. 对任意$t>x>0$, 求(1) $\mathbb{P}(t-T_k>x|N(t)=k)$, (2) $\mathbb{P}(t-T_{N(t)}>x)$.

3.6 对任意$k\geq 1$, 令W_k表示第k次事件的间隔时间, 对任意$x>0$, 求(1) $\mathbb{P}(W_{k+1}>x|N(t)=k)$, (2) $\mathbb{P}(W_{N(t)+1}>x)$.

3.7 电影院观众到达服从强度为50人每小时的泊松过程, 其中40%是男性, 60%是女性. 假定观众到达是完全独立的. (1)求前三个到达的观众是女性的概率?; (2)已知最后两名观众在放映前5 分钟内到达, 问他们是放映前两分钟到达的概率? (3)假定观众50%可能不买爆米花, 30%买1袋爆米花, 20%买两袋爆米花. 以N_0,N_1,N_2分别表示一小时内没买, 买一袋, 买两袋爆米花人数, 求(N_0,N_1,N_2)的联合分布.

3.8* 证明引理3.6的必要性.

3.9* 若$N(0)=0$且对任意$n\geq 1$以及$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$和非负整数$k_1,\cdots,k_n$, (1.3.5)总成立, 证明$N=\{N(t),t\geq 0\}$ 是平稳独立增量过程且对任意$t,s\geq 0$, $N(t+s)-N(s)$服从强度为λt的泊松分布

第二章　离散时间马氏链

上一章介绍的两类随机过程都具有平稳独立增量性质. 这种性质给我们讨论带来很大的方便, 但在现实问题中这样的性质并不常有. 人们更容易观察或更能近似观察到所谓的马氏性. 对这种现象建模可以使用所谓的马氏过程. 本章介绍其中一类简单的模型——离散时间离散状态的马氏过程.

2.1　马氏链的定义与举例

2.1.1　条件独立与马氏链

♣**定义2.1.1.** *称随机事件A, B在事件C(要求$\mathbb{P}(C) > 0$), 发生条件下独立, 若*

$$\mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C).$$

简称A, B条件独立.

对条件独立, 如下性质成立

■**性质2.1.2.** *设A, B, C均为概率非0事件, 那么以下三条等价:*

(1) *A, B在事件C下条件独立;*

(2) *$\mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|C)$;*

(3) *$\mathbb{P}(B|AC) = \mathbb{P}(B|C)$.*

证明 (1) ⇒ (2), (3): 由$\mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$可得

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(AC)\mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(BC)$$

从而

$$\mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|C), \qquad \mathbb{P}(B|AC) = \mathbb{P}(B|C).$$

(2) ⇒ (1): 由$\mathbb{P}(A|BC) = \mathbb{P}(A|C)$可知

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(BC)$$

两边除以$\mathbb{P}(C)$得$\mathbb{P}(AB|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$.

类似可得(3) $\Rightarrow$ (1). 证毕. $\square$

将条件独立的假设用到随机过程上就可定义所谓的马氏性(Markov Property). 直观而言就是要求在随机过程已知任一时刻t的确切状态后, t之后发生的随机事件与t 之前的随机事件独立. 比如

▶**例2.1.3.** *假定例1.1中的赌徒在某个时刻t(现在)手中筹码为x, 经验告诉我们, 他在此后(未来)的输赢取决于此刻的筹码数而与t 之前(过去)的筹码及输赢无关.*

▶**例2.1.4.** *假定一个罐子里有红白两种颜色共$2N$个球, 做如下的抽球游戏并观察其中红球的动态变化: 从罐中任意抽出一个球, 如果是红球就放入一个白球, 如果抽出是白球就放入一个红球. 以X_n 表示第n次抽取后罐里红球数. 若已知第k(现在)次抽取后罐里有m个红球, 那么k之后(未来)从罐里取出红/白球的情况与k之前(过去)取出红/白球情况无关.*

称具有这种马氏性的随机过程为马氏过程. 本课程只介绍其中具有离散参数和离散状态的情形, 我们称这种马氏过程为离散时间马氏链, 简称为马氏链. 由于可数状态空间中元素总可以通过适当标号区分, 因此本章内容对状态离散的向量值随机过程也成立. 但为叙述方便, 以下我们总设状态空间S 为整数构成的集合. 马氏链定义如下:

♣**定义2.1.5.** *设$X = \{X_n; n \geq 0\}$是概率空间$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$上的随机过程, 状态空间$S \subset \mathbb{Z}$, 称$X$为离散时间马氏链, 如果对任意$n \geq 1$, $i_0, \cdots, i_{n-1}, i, j \in S$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (2.1.1)$$

▶**例2.1.6.** *设$\xi_i, i \geq 1$, 为一列独立同分布的非负整数值随机变量. 令*

$$X_0 = K, \qquad X_n = \begin{cases} 0 \vee (X_{n-1} - \xi_n), & k < X_{n-1} \leq K, \\ 0 \vee (K - \xi_n), & X_{n-1} \leq k, \end{cases} \quad n \geq 1,$$

其中$k < K$为给定的两个正整数. 那么$X = \{X_n, n \geq 0\}$为离散时间马氏链.

证明 显然X的状态空间$S = \{0, 1 \cdots, K\}$. 对任意$n \geq 1$ 以及$i_1, \cdots, i_{n+1} \in S$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = K) \\ &\quad = \begin{cases} \mathbb{P}((K - \xi_{n+1}) \vee 0 = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_0 = K), & i_n \leq k, \\ \mathbb{P}((i_n - \xi_{n+1}) \vee 0 = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_0 = K), & k < i_n \leq K, \end{cases} \end{aligned}$$

对任意$i \geq 1$, 由X_i的定义可知X_i为X_{i-1}与ξ_i的函数, 如此递归代入后可知X_i是随机变量$\xi_1, \cdots, \xi_i$的函数. 这表明事件

$$\{X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = K\}$$

由随机变量$\xi_1, \cdots, \xi_n$确定. 再由$\{\xi_i, i \geq 1\}$的独立性

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = K) \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}((K - \xi_{n+1}) \vee 0 = i_{n+1}), & i_n \leq k, \\ \mathbb{P}((i_n - \xi_{n+1}) \vee 0 = i_{n+1}), & k < i_n \leq K, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}((K - \xi_{n+1}) \vee 0 = i_{n+1} | X_n = i_n), & i_n \leq k, \\ \mathbb{P}((i_n - \xi_{n+1}) \vee 0 = i_{n+1} | X_n = i_n), & k < i_n \leq K, \end{cases} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).
\end{aligned}$$

所以X为离散时间马氏链. □

一般称该马氏链为离散存储模型, 其中ξ_i表示第i个周期的市场需求量, X_i表示第i个周期末的商品仓储量, K为最大库存量, k为补货策略边界值, 即在每个周期末若商品仓储量大于k则不补货, 若不大于k, 则在下一个周期开始时补足货物到K.

♠**注记2.1.7.** *需要指出的是在马氏过程定义中要求确切知道现在n时刻的状态. 若现在的状态不是明确已知的, 那么即使是马氏链, 条件独立性也可能不成立. 例如, 由命题2.1可知(q, p)- 随机游动W是马氏链, 若$\mathbb{P}(X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = 1/2$ 且$p \neq q$, 则*

$$p = \mathbb{P}(W_2 = 2 | W_1 \in \{1, 3\}, W_0 = 0) \neq \mathbb{P}(W_2 = 2 | W_1 \in \{1, 3\}) = \frac{p + pq}{1 + p}.$$

2.1.2 马氏链的等价刻画

在马氏性中我们还可以对代表过去与未来的随机事件用更宽泛的形式表示.

★**定理2.1.8.** *X是马氏链当且仅当对任意$n \geq 1$, 非负整数$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, 以及整数$i_1, \cdots, i_{n+1} \in S$, 都有*

$$\mathbb{P}(X_t = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) = \mathbb{P}(X_t = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n). \quad (2.1.2)$$

证明* 只需要证明必要性. 首先注意到由全概率公式和(2.1.1), 对任意$n \geq k \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_k = i_k, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \cdots X_k = i_k)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \cdots X_k = i_k)}.\\
&= \sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}\in S} \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \cdots X_k = i_k, X_{k-1} = j_{k-1}, \cdots, X_0 = j_0)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \cdots X_k = i_k)}\\
&= \sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}\in S} \Big[\frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \cdots X_k = i_k, X_{k-1} = j_{k-1}, \cdots, X_0 = j_0)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \cdots X_k = i_k, X_{k-1} = j_{k-1}, \cdots, X_0 = j_0)}\\
&\qquad \times \frac{\mathbb{P}(X_n = i_n, \cdots X_k = i_k, X_{k-1} = j_{k-1}, \cdots, X_0 = j_0)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \cdots X_k = i_k)}\Big]\\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n). \qquad (2.1.3)
\end{aligned}
$$

下面我们证明对任意$m \geq 1$, $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \cdots, X_{n+m} = i_{n+m} | X_k = i_k, X_{k+1} = i_{k+1} \cdots, X_n = i_n)\\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, \cdots, X_{n+m} = i_{n+m} | X_n = i_n), \quad 0 \leq k \leq n. \qquad (2.1.4)
\end{aligned}
$$

当$m = 1$时(2.1.4)显然对任意$n \geq 0$以及$0 \leq k \leq n$成立. 设$m \leq l-1$时(2.1.4)显然对任意$n \geq 0$以及$0 \leq k \leq n$成立, 那么当$m = l$ 时, 对任意$n \geq 0$ 以及$0 \leq k \leq n$, 记

$$
\begin{aligned}
A = \{X_k = i_k, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\},\ B = \{X_n = i_n\},\ C = \{X_{n+1} = i_{n+1}\},\\
D = \{X_{n+2} = i_{n+2}, \cdots, X_{n+l} = i_{n+l}\}.
\end{aligned}
$$

此时由归纳假设可得

$$
\mathbb{P}(D|ABC) = \mathbb{P}(D|C) = \mathbb{P}(D|BC), \quad \mathbb{P}(C|AB) = \mathbb{P}(C|B).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\text{l.h.s of (2.1.4)} &= \mathbb{P}(CD|AB) = \mathbb{P}(ABCD)/\mathbb{P}(AB)\\
&= \mathbb{P}(D|ABC)\mathbb{P}(C|BA) = \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C|B) = \mathbb{P}(D|CB)\mathbb{P}(C|B)\\
&= \mathbb{P}(DC|B) = \text{r.h.s of (2.1.4)}.
\end{aligned}
$$

由数学归纳法可知(2.1.4)显然对任意$m \geq 1$, $n \geq 0$以及$0 \leq k \leq n$成立.

最后我们注意到,由全概率公式

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_t = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)\\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(X_t = i_{n+1} X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)}{\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)}\\
&\quad = \sum_{j_s\in S, 0\leq s<t}^{s\neq t_1,\cdots,t_n} \frac{\mathbb{P}(X_t = i_{n+1}, X_{t_k} = i_k, X_s = j_s, t_1 \leq s < t, s \neq t_k, 1 \leq k \leq n)}{\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)}.
\end{aligned}
$$

再由(2.1.4)得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_t = i_{n+1} | X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) \\
&= \sum_{j_s \in S, t_n < s < t} \mathbb{P}(X_t = i_{n+1}, X_s = j_s, t_n < s < t | X_{t_n} = i_n) \\
&\quad \times \sum_{j_s \in S, 0 \le s < t_n}^{s \neq t_1, \cdots, t_n} \frac{\mathbb{P}(X_{t_k} = i_k, X_s = j_s, t_1 \le s < t_n, s \neq t_k, 1 \le k \le n)}{\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n)} \\
&= \mathbb{P}(X_t = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n).
\end{aligned}$$

因此X是马氏链. □

进一步, 由(2.1.4)易证对任意一个时刻n之后的随机事件

$$A = \{X_{n+k_1} = i_{n+1}, \cdots, X_{n+k_l} = i_{n+l}\},$$

和任意一个n之前的随机事件

$$B = \{X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_m} = i_m\},$$

其中$0 \le t_1 < \cdots < t_m < n$, 都有

$$\mathbb{P}(AB | X_n = i_n) = \mathbb{P}(A | X_n = i_n)\mathbb{P}(B | X_n = i_n). \tag{2.1.5}$$

具体证明请读者完成(参见习题4.6).

2.1.3 转移概率矩阵与C-K方程

由(2.1.2)和(2.1.1)可知, 对离散时间马氏链, 下面的条件概率是基本的

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i).$$

♣**定义2.1.9.** 称条件概率$\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i)$为马氏链$X$由时刻$n$状态$i$经$m$步转移到状态$j$的转移概率, 记作$p_{i,j}^{(n,n+m)}$或$p(n,i;n+m,j)$. 若对任意$i,j,m$, $p_{i,j}^{(n,n+m)}$与n无关, 即

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i)$$

对任意i,j,n,m成立, 则称转移概率是时齐的(或平稳的). 此时常将$p_{i,j}^{(n,n+m)}$简记成$p_{i,j}^{(m)}$或$p_m(i,j)$, 称之为从状态i到状态j 的m步转移概率. 特别简记$p_{i,j}^{(1)}$为$p_{i,j}$或$p(i,j)$, 并简称为从状态i 到状态j 的转移概率. 约定

$$p_{i,j}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

♣**定义2.1.10.** 称马氏链X是时齐的, 如果X的转移概率是平稳的.

★定理2.1.11. 设$X=\{X_n;n\geq 0\}$是时齐马氏链, 则对任意$n,m\geq 1$及$i,j\in S$

$$p_{i,j}^{(n+m)}=\sum_{k\in S}p_{i,k}^{(n)}p_{k,j}^{(m)}. \tag{2.1.6}$$

由此可知$p_{i,j}^{(n)}=\sum_{j_1\in\mathbf{S}}\cdots\sum_{j_{n-1}\in\mathbf{S}}p_{i,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{n-1},j}$.

证明 只需证明(2.1.6). 由全概率公式

$$p_{i,j}^{(n+m)}=\mathbb{P}(X_{n+m}=j|X_0=i)=\sum_{k\in S}\mathbb{P}(X_{n+m}=j,X_n=k|X_0=i).$$

再由条件概率公式与马氏性(2.1.2)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+m}=j,X_n=k|X_0=i)&=\frac{\mathbb{P}(X_{n+m}=j,X_n=k,X_0=i)}{\mathbb{P}(X_0=i)}\\&=\frac{\mathbb{P}(X_{n+m}=j,X_n=k,X_0=i)}{\mathbb{P}(X_n=k,X_0=i)}\frac{\mathbb{P}(X_n=k,X_0=i)}{\mathbb{P}(X_0=i)}\\&=\mathbb{P}(X_{n+m}=j|X_n=k)\mathbb{P}(X_n=k|X_0=i)=p_{k,j}^{(m)}p_{i,k}^{(n)}\end{aligned}$$

由此可知(2.1.6)成立. □

通常称(2.1.6)为Chapmann-Kolmogorov(C-K)方程. 证明C-K方程中所用全概率公式、条件概率公式以及马氏性的组合方法是研究马氏链的基本技巧.

若无特别说明, 本书此后所涉及马氏链X都假定是时齐的.

♣定义2.1.12. 将马氏链$X=\{X_n;n\geq 0\}$所有的转移概率排成矩阵形式$\mathbf{P}=(p_{i,j})_{i,j\in S}$, 称此矩阵为$X$的转移概率矩阵; 称$\mathbf{P}^{(n)}=(p_{i,j}^{(n)})_{i,j\in S}$ 为X的n阶(步) 转移概率矩阵.

♠注记2.1.13. 转移概率矩阵满足:

(1) $p_{i,j}\geq 0,\ i,j\in S$, (2) $\sum_{j\in S}p_{i,j}=1,\ i\in S$.

一般称满足这两条件的矩阵为随机矩阵.

▶例2.1.14. 直线上的(q,p)随机游动是一个时齐马氏链, 转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \cdots & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots\\ \cdots & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots\\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots\\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\end{pmatrix}.$$

当S只有有限个状态时, 比如$S=\{1,2,\cdots,N\}$, 由C-K方程, 对任意$n,m>0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(n+m)} &= \big(p_{i,j}^{(n+m)}\big)_N = \Big(\sum_{k=1}^{N} p_{i,k}^{(n)}p_{k,j}^{(m)}\Big)_{N\times N}\\ &= \big(p_{i,j}^{(n)}\big)_N\big(p_{i,j}^{(m)}\big)_N = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{n+m}.\end{aligned}$$

类似的记法也可用到S有无穷多个状态的情形. 因此我们总有

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{n+m}.$$

显然, 对状态有限的马氏链, 要了解其n步转移概率矩阵, 可以通过线性代数中学过的矩阵运算实现.

▶**例2.1.15.** 通常我们把社会划分为若干个阶层, 比如上,中,下3种, 分别以$1,2,3$表示. 为了研究社会阶层的流动情况, 任意选取某个家族. X_n 表示该家族第n 代所处的社会阶层.一个简单的社会学模型认为第$n+1$代的社会地位只取决于其父代的社会地位.若假定

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=1)=0.8,\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=1)=0.1,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=1)=0.1,\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=2)=0.3,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=2)=0.4,\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=2)=0.3,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=3)=0.05,\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=3)=0.1,$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=3)=0.85.$$

那么$\{X_n\}$构成一个马氏链, 转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.05 & 0.1 & 0.85\end{pmatrix}.$$

由矩阵知识可知, $\mathbf{P}$有三个不同特征值1, 0.3和0.75, 对应特征向量可取为

$$(1,1,1)',\ \ (1,-6,1)' \text{ 和 } (-26,-6,19)'.$$

因此

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -26\\ 1 & -6 & -6\\ 1 & 1 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0\\ 0 & 0 & 0.75\end{pmatrix}\left[\frac{1}{315}\begin{pmatrix}108 & 45 & 162\\ 25 & -45 & 20\\ -7 & 0 & 7\end{pmatrix}\right].$$

从而对任意$n \geq 1$,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -26 \\ 1 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.75^n \end{pmatrix} \left[\frac{1}{315} \begin{pmatrix} 108 & 45 & 162 \\ 25 & -45 & 20 \\ -7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \right].$$

计算后可知n步转移概率矩阵$\mathbf{P}^{(n)}$. 比如$n = 5$时可算得

$$\mathbf{P}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.480 & 0.143 & 0.377 \\ 0.373 & 0.145 & 0.482 \\ 0.243 & 0.142 & 0.615 \end{pmatrix}.$$

由此可知

$$p_{2,3}^{(5)} = \mathbb{P}(X_5 = 3 | X_0 = 2) = 0.482.$$

即在该模型下, 社会中层的家庭五代之后有48.2%的概率处于社会下层. □

2.1.4 有限维分布

★定理2.1.16. 设$\mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j \in S}$是马氏链$X$的转移概率矩阵, 且设$\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i$, 那么对任意$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$以及$i_1, \cdots, i_n \in S$,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) = \sum_{i \in S} \mu_i p_{i,i_1}^{(t_1)} p_{i_1,i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(t_n - t_{n-1})}.$$

证明 由条件概率公式与马氏性, $\mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_n} = i_n)$等于

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \cdots, X_{t_1} = i_1) \mathbb{P}(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \cdots, X_{t_1} = i_1) \\ &\quad = p_{i_{n-1},i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \mathbb{P}(X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \cdots, X_{t_1} = i_1) = \cdots \\ &\quad = p_{i_{n-1},i_n}^{(t_n - t_{n-1})} \cdots p_{i_1,i_2}^{(t_2 - t_1)} \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{t_1} = i_1, X_0 = i) \\ &\quad = \sum_{i \in S} p_i p_{i,i_1}^{(t_1)} p_{i_1,i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(t_n - t_{n-1})}. \end{aligned}$$ □

定理2.1.16表明马氏链的有限维分布由初始分布以及转移矩阵唯一确定. 进而, 对任意给定的随机矩阵$\mathbf{P}$以及初始分布$\pi = \{p_i, i \in S\}$, 由定理1.2可知存在一个马氏链X使其转移概率矩阵恰为$\mathbf{P}$.

►例2.1.17. (排队模型) 设$\xi_i, i \geq 1$, 为一列独立同分布的非负整数值随机变量, 另设X_0也是非负整数值随机变量且与$\{\xi_i, i \geq 1\}$独立, 对$n \geq 1$, 令

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} - 1 + \xi_n, & X_{n-1} > 0, \\ \xi_n, & X_{n-1} = 0. \end{cases}$$

证明$X=\{X_n;n\geq 0\}$为离散时间马氏链. 若记$p_k=\mathbb{P}(\xi_1=k)$, 求X的转移概率矩阵. 进一步若设$u_k=\mathbb{P}(X_0=k)$, 求$\mathbb{P}(X_0=1,X_1=2,X_3=4)$.

证明 显然X的状态空间$S=\{0,1\cdots\}$. 对任意$n\geq 1$ 以及非负整数$i_0,\cdots,i_{n+1}$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0)\\&=\begin{cases}\mathbb{P}(i_n-1+\xi_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,\cdots,X_0=i_0), & i_n>0,\\ \mathbb{P}(\xi_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,\cdots,X_0=i_0), & i_n=0,\end{cases}\end{aligned}$$

与例2.1.6类似分析可知

$$\{X_n=i_n,\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0\}$$

由随机变量$X_0,\xi_1,\cdots,\xi_n$ 确定. 因此由独立性假设,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0)\\&=\begin{cases}\mathbb{P}(i_n-1+\xi_{n+1}=i_{n+1}), & i_n>0,\\ \mathbb{P}(\xi_{n+1}=i_{n+1}), & i_n=0,\end{cases}\\&=\begin{cases}\mathbb{P}(i_n-1+\xi_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n), & i_n>0,\\ \mathbb{P}(\xi_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n), & i_n=0,\end{cases}\\&=\mathbb{P}(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n).\end{aligned}$$

所以X为离散时间马氏链. 直接计算可知

$$p_{i,j}=\mathbb{P}(X_1=j|X_0=i)=\begin{cases}\mathbb{P}(\xi_1=j+1-i), & i\neq 0\\ \mathbb{P}(\xi_1=j), & i=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}p_{j+1-i}, & i\neq 0\text{且}j+1-i\geq 0,\\ 0; & i\neq 0\text{且}j+1-i<0,\\ p_j; & i=0.\end{cases}$$

因此X的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdot \end{array}$$

由定理2.1.16, 有限维分布

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_3 = 4) &= u_1 p_{1,2} p_{2,4}^{(2)} \\ &= u_1 p_2 (p_{2,1}p_{1,4} + p_{2,2}p_{2,4} + p_{2,3}p_{3,4} + p_{2,4}p_{4,4} + p_{2,5}p_{5,4}) \\ &= u_1 p_2 (p_0 p_4 + p_1 p_3 + p_2 p_2 + p_3 p_1 + p_4 p_0) \\ &= u_1 p_2 (2p_0 p_4 + 2p_1 p_3 + p_2 p_2). \end{aligned}$$ □

练习题

4.1 在仓储模型中设$\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 0.1$, $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = 0.2$, $\mathbb{P}(\xi_1 = 2) = 0.3$, $\mathbb{P}(\xi_1 = 3) = 0.2$, $\mathbb{P}(\xi_1 = 4) = 0.2$, $k = 2$, $K = 4$. 求该模型的转移概率矩阵.

4.2 设$X = \{X_n,\ n \geq 0\}$是定义在概率空间$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$上的时齐马氏链. 以$\mathbb{P}_i$表示事件$\{X_0 = i\}$发生情形下的条件概率, 即对任意$A \in \mathfrak{F}$, $\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = i)$. 证明, 对任意时间$n > m > 0$以及任意状态$i, j, k$,

$$\mathbb{P}_i(X_m = k|X_n = j) = \mathbb{P}(X_{m-n} = k|X_0 = j).$$

4.3 设马氏链的状态空间$S = \{0, 1, 2\}$, 转移概率矩阵$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$n$阶转移矩阵$\mathbf{P}^{(n)}$.

4.4 设$N = \{N(t), t \geq 0\}$为泊松过程. 任取$t_0 > 0$. 证明$Y = \{N(nt_0), n \geq 0\}$是马氏链.

4.5 (Wright-Fisher 模型) 考虑一个有N个基因的固定群体, 基因是A 或a这两种类型. 假定这个群体在$n+1$时基因的状态是通过时刻n 的状态变异得到. 进一步假设每个基因发生变异的机会是等可能的, 由A变异为a的概率为p, 由a 变异为A的概率为q. 以X_n表示n 时刻基因中A 的个数, 那么此时$\{X_n\}$就是个马氏链. 试

写出该模型的转移概率矩阵.

4.6* 试证明(2.1.5).

4.7* 设X是状态空间为S的时齐马氏链, 证明对任意$n \geq 1$, $i \in S$以及$S_m \subset S$, $m \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n+1}^{\infty}\{X_m \in S_m\}\middle|X_n = i, \bigcap_{m=0}^{n-1}\{X_m \in S_m\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\{X_m \in S_{n+m}\}\middle|X_0 = i\right).$$

2.2 状态分类

以下总设马氏链$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$的转移概率矩阵$\mathbf{P}=(p_{i,j})_{i,j\in S}$. 为方便, 分别记$\mathbb{E}(\cdot|X_0=i)$和$\mathbb{P}(\cdot|X_0=i)$ 为$\mathbb{E}_i(\cdot)$和$\mathbb{P}_i(\cdot)$.

2.2.1 互通、本质与不可约

♣**定义2.2.1.** 如果存在$n\geq 0$使得$p_{i,j}^{(n)}>0$, 则称状态i可达状态j, 记作$i\to j$. 反之, 则对任意$n\geq 0$, $p_{i,j}^{(n)}=0$, 称状态i不可达状态j, 记作$i\not\to j$. 若$i\to j$且$j\to i$, 则称i,j互通, 记作$i\leftrightarrow j$.

由于$p_{i,j}^{(0)}=\delta(i,j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, 因此对任意状态$i$, 它与自己总是互通的.

▲**命题2.2.2.** 互通是一种等价关系. 即互通关系满足

(1) 反身性 $i\leftrightarrow i$; (2)对称性;$i\leftrightarrow j\Rightarrow j\leftrightarrow i$; (3)传递性 $i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k\Rightarrow i\leftrightarrow k$.

证明 只需证明(3)传递性. 由$i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k$可知, 存在非负整数$n,m,r,l$使得

$$p_{i,j}^{(n)}>0,\quad p_{j,i}^{(m)}>0,\quad p_{j,k}^{(r)}>0,\quad p_{k,j}^{(l)}>0.$$

由C-K方程可知,

$$p_{i,k}^{(n+r)}\geq p_{i,j}^{(n)}p_{j,k}^{(r)}>0;\ \ p_{k,i}^{(l+m)}\geq p_{k,j}^{(l)}p_{j,i}^{(m)}>0.$$

因此$i\leftrightarrow k$. □

♣**定义2.2.3.** 记$C(i)=\{k\in S; k\leftrightarrow i\}$, 称$C(i)$为包含状态$i$ 的互通类. 由互通等价性可知$C(i)$中任意两状态互通而且

$$C(i)\cap C(j)\neq\emptyset\Leftrightarrow C(i)=C(j).$$

特别, 若$p_{ii}=1$, 则称i为吸收的.

若i是吸收的, 那么$C(i)=\{i\}$; 反之不成立.

▶**例2.2.4.** 若马氏链X的转移概率矩阵为

$$\begin{array}{cc}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\end{array}\end{array}$$

那么由$0 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 0$可知$\{0,1,2\} \subset C(0)$. 再由$0 \not\to 3$, $0 \not\to 4$可知$\{0,1,2\} = C(0)$. 同样可知$C(3) = \{3\}$, $C(4) = \{4\}$. 因此X的状态空间包含*3*个互通类$C(0)$, $C(3)$, $C(4)$. 此时X 不是不可约的马氏链. □

♣**定义2.2.5.** *称状态i是本质的, 若对任意$j \in S$, 由$i \to j$可得$j \to i$.*

显然吸收态是本质的, 进一步容易看出

■**性质2.2.6.** *若i是本质的, 那么$C(i)$中所有状态都是本质的. 此时我们称$C(i)$为本质类.*

证明 任取$j \in C(i)$, 若$j \to k$, 则由$i \to j$可知$i \to k$, 再由i本质可知, $k \to i$, 从而$k \in C(i)$, $k \to j$. 即j是本质的. □

由性质2.2.6可知, 若i是本质的, 那么对任意$j \in C(i)$, j可达的状态只能在$C(i)$中. 换句话说, 若$X_0 \in C(i)$且$C(i)$是本质的, 那么对所有$n \geq 1$, $X_n \in C(i)$; 此时我们可以将X的状态空间简化为$C(i)$.

♣**定义2.2.7.** *若马氏链X的所有状态都是互通的, 即对任意$i \in S$, $S = C(i)$, 则称X是不可约的(irreducible).*

不可约链的状态都是本质的.

▶**例2.2.8.** 若马氏链X的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

那么由$0 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 0$, $2 \to 4$, $4 \to 3$, $3 \to 2$可知, X是不可约的. □

▶**例2.2.9.** 若马氏链X的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

那么由$0 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 0$可知, $\{0,1,2\} \subset C(0)$. 再由$0 \not\to 3$, $0 \not\to 4$可知$\{0,1,2\} = C(0)$. 同样可知$C(3) = \{3,4\}$. 因此X的状态空间包含2个互通类$C(0)$, $C(3)$. □

2.2.2 周期性

♣**定义2.2.10.** 设i是马氏链X的一个状态, 若正整数集$\{n \geq 1;\ p_{i,i}^{(n)} > 0\}$非空, 其中元素的最大公因数$d_i$称为是状态$i$的周期. 若对所有$n \geq 1$, $p_{i,i}^{(n)} = 0$, 则约定i的周期是∞. 若i 的周期为1, 即$d_i = 1$, 则称i 是非周期的.

由周期定义可知, 若$d_i \nmid n$, 则$p_{i,i}^{(n)} = 0$.

▲**命题2.2.11.** 同一个互通类中的状态周期相同, 即对任意$j \in C(i)$, $d_i = d_j$.

证明 由$i \leftrightarrow j$可知, 存在正整数$n, m > 0$使得$p_{i,j}^{(n)} > 0$, $p_{j,i}^{(m)} > 0$. 则由C-K方程,

$$p_{i,i}^{(n+m)} \geq p_{i,j}^{(n)} p_{j,i}^{(m)} > 0, \quad p_{j,j}^{(n+m)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,j}^{(n)} > 0.$$

因此$d_i | n+m$, $d_j | n+m$. 另外, 对任意$l > 0$, 若$p_{i,i}^{(l)} > 0$, 则

$$p_{j,j}^{(n+m+l)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(l)} p_{i,j}^{(n)} > 0.$$

这表明$d_j | l+m+n$, 从而$d_j | l$. 由此可得$d_j | d_i$. 类似可得$d_i | d_j$. 因此$d_i = d_j$. □

♣**定义2.2.12.** 若马氏链X的每一个状态都有相同的周期d, 称X是d周期马氏链. 特别, 若$d = 1$, 则称X是非周期的.

▶**例2.2.13.** (q,p)-简单随机游动W是个周期$d = 2$的不可约马氏链. 事实上对任意$i, j \in \mathbf{Z}$ (不妨设$j > i$),

$$p_{i,j}^{(j-i)} = p^{j-i} > 0, \quad p_{j,i}^{(j-i)} = q^{j-i} > 0.$$

所以$i \leftrightarrow j$, 即$\mathbf{Z} = C(0)$, 从而W是不可约的. 对任意$i \in \mathbf{Z}$, 由

$$p_{i,i}^{(n)} = p_{0,0}^{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ C_{2k}^k p^k q^k, & n = 2k, \end{cases}$$

可知$d_i = 2$, 因此W的周期$d = 2$. □

▶**例2.2.14.** 考虑例2.1.17中定义的排队模型X, 若$0 < p_0$且$p_0 + p_1 < 1$, 那么X是不可约的非周期马氏链.

证明 由$0 < p_0$以及$0 < p_0 + p_1 < 1$可知, 必存在$k \geq 2$使得$p_k > 0$. 对任意$i, j \geq 0$, 不妨设$j > i$, 由$p_{j,i}^{(j-i)} = p_0^{j-i} > 0$可知$j \to i$.

反过来, 当$i \neq 0$时

$$p_{i,j}^{((k-1)(j-i))} \geq p_{i,i+(k-1)(j-i)}^{(j-i)} p_{i+(k-1)(j-i),j}^{((k-2)(j-i))} \geq p_k^{j-i} p_0^{(k-2)(j-i)} > 0,$$

即$i \to j$; 而当$i = 0$时, 由$p_k > 0$可知$0 \to k$以及$k \to j$可知$0 \to j$.

因此, 对任意$i, j \in S$, $i \leftrightarrow j$, X是不可约的. 注意到$p_{0,0} = p_0 > 0$, 状态0的周期为$d_0 = 1$. 由命题2.2.11可知X的所有状态周期均为1, 因此X是非周期的. □

★定理2.2.15. *设状态i的周期为d, 则存在正整数N使得对任意$n \geq N$, $p_{i,i}^{(nd)} > 0$.*

证明 由周期定义, 存在正整数$n_1, \cdots, n_s$使得它们的最大公因数为d而且对任意$1 \leq k \leq s$, $p_{ii}^{(n_k)} > 0$. 因此存在整数$r_1, \cdots, r_s$使得

$$d = r_1 n_1 + r_2 n_2 + \cdots + r_s n_s.$$

若$r_1, \cdots, r_s$恒为非负, 那么对任意$n \geq 1$, 由

$$p_{ii}^{(nd)} \geq [\prod_{k=1}^{s} (p_{ii}^{(n_k)})^{r_k}]^n > 0$$

可知结论自然成立. 不失一般性(若有必要不妨重新排序)我们可设

$$r_1, \cdots, r_l \geq 0, \quad r_{l+1}, \cdots, r_s < 0.$$

记

$$p = r_1 n_1 + \cdots + r_l n_l > 0, \quad q = -(r_{l+1} n_{l+1} + \cdots + r_s n_s) > 0.$$

则$p = q + d$. 注意到$d|p, d|q$, 记$p_d = p/d > 0, q_d = q/d > 0$, 那么$p_d - q_d = 1$. 对任意$n \geq q_d^2$, 存在正整数$c_1, c_2$使得$c_1 > c_2$而且

$$n = c_1 q_d + c_2 = (c_1 - c_2) q_d + c_2 p_d,$$

此时

$$\begin{aligned} nd &= (c_1 - c_2) q_d d + c_2 p_d d = c_2 p + (c_1 - c_2) q \\ &= c_2 (r_1 n_1 + \cdots + r_l n_l) - (c_1 - c_2)(r_{l+1} n_{l+1} + \cdots + r_s n_s), \end{aligned}$$

而且

$$p_{ii}^{(nd)} \geq [\prod_{k=1}^{l} (p_{ii}^{(n_k)})^{r_k}]^{c_2} [\prod_{k=l+1}^{s} (p_{ii}^{(n_k)})^{-r_k}]^{c_1 - c_2} > 0.$$

这表明结论成立. □

由此易得如下两个推论.

♦**推论2.2.16.** 记状态i的周期为d_i, 若$p_{j,i}^{(m)} > 0$, 则存在$N > 0$使得$p_{j,i}^{(m+nd_i)} > 0$对所有的$n \geq N$都成立.

♦**推论2.2.17.** 若状态i是非周期的, 那么存在$N > 0$使得对任意$n > N$, $p_{i,i}^{(n)} > 0$.

2.2.3　常返与非常返

♣**定义2.2.18.** 对任意状态$i \in S$, 称

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1; X_n = i\}$$

为状态i的首次回访时间, 其中规定$\inf \emptyset = +\infty$.

♠**注记2.2.19.** τ_i是一个停时. 事实上由全概率公式可知

$$\{\tau_i \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\tau_i = k\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k = i, X_{k-1} \neq i, \cdots, X_1 \neq i\},$$

因此对任意$n \geq 1$, 事件$\{\tau_i \leq n\}$是否发生只与X在时刻n及n之前的状态有关而与n 之后的状态无关.

对任意$i, j \in S$, 令

$$f_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}_i(\tau_j = n) = \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i), \quad (2.2.1)$$

$$f_{i,j} = \mathbb{P}_i(\tau_j < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}. \quad (2.2.2)$$

由定义可知, 当$j \neq i$时, $f_{i,j}^{(n)}$表示从i出发后第n步首次到达j 的概率, 而$f_{i,j}$表示从状态i出发, 在有限时间内达到状态j 的概率. 当$i = j$时$f_{i,i}^{(n)}$ 表示从i 出发后第n步首次回到i的概率,而$f_{i,i}$ 表示从i出发有限时间内回到状态i 的概率. 显然, 对任意i, j, 若$i \not\to j$, 则$f_{i,j} = 0$. 此外由

$$f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \cdots, X_1 \neq j | X_0 = i) = \mathbb{P}_i(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k = j\}),$$

可得

$$0 \leq f_{i,j}^{(n)} \leq p_{i,j}^{(n)} \leq f_{i,j} \leq 1. \quad (2.2.3)$$

♣**定义2.2.20.** 称状态i是常返的(*recurrent*), 如果$f_{i,i} = 1$; 否则称为非常返的、暂留的或滑过的(*transient*).

■**性质2.2.21.** 若i是常返的, $i \to j$, 那么$f_{j,i} = 1$.

证明 定义

$$e_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j, X_v \neq i, v = 1, \cdots, n-1). \tag{2.2.4}$$

它表示从i出发, 中途不仅过i而在第n步到达j的概率(禁忌概率). 因为$i \to j$, 存在$k > 0$, 使得$e_{i,j}^{(k)} > 0$. 若$f_{j,i} < 1$, 那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(\tau_i = \infty) \geq \mathbb{P}_i(X_k = j, X_n \neq i, 1 \leq n \neq k) \\
&\quad = \mathbb{P}_i(X_k = j, X_n \neq i, 1 \leq n < k)\mathbb{P}(X_v \neq i, v > k | X_k = j, X_n \neq i, 1 \leq n < k) \\
&\quad = e_{ij}^{(k)}\mathbb{P}(X_n \neq i, n \geq 1 | X_0 = j) = e_{ij}^{(k)}(1 - f_{j,i}) > 0.
\end{aligned}$$

此与i常返矛盾, 因此$f_{j,i} = 1$. □

由性质2.2.21以及(2.2.3)可知, 若i常返, 那么i是本质的.

★定理2.2.22. 状态i常返当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty$. 若$i$非常返, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{i,i}}.$$

证明 令$F_{i,j}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n f_{i,j}^{(n)}$, $P_{i,j}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_{i,j}^{(n)}$, $s \in (-1, 1)$. 对任意$i, j \in S$,

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(\tau_j = k, X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_n = j | \tau_j = k)\mathbb{P}_i(\tau_j = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_n = j | \tau_j = k) f_{i,j}^{(k)}.
\end{aligned}$$

由马氏性和时齐性,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_n = j | \tau_j = k) &= \mathbb{P}(X_n = j | X_k = j, X_v \neq j, 1 \leq v < k, X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(X_{n-k} = j | X_0 = j) = p_{j,j}^{(n-k)}.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

因此

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} p_{j,j}^{(n-k)} f_{i,j}^{(k)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
P_{i,i}(s) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_{i,i}^{(n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{k=1}^{n} f_{i,i}^{(k)} p_{i,i}^{(n-k)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s^k f_{i,i}^{(k)} \sum_{r=0}^{\infty} s^r p_{i,i}^{(r)} = 1 + F_{i,i}(s)P_{i,i}(s).
\end{aligned}$$

整理后可得

$$P_{i,i}(s) = \frac{1}{1 - F_{i,i}(s)}. \tag{2.2.6}$$

注意到$F_{i,i}(s)$与$P_{i,i}(s)$均为非负系数的幂级数函数, 由习题1.5可知

$$f_{i,i} = F_{i,i}(1-), \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = P_{i,i}(1-).$$

因此$f_{i,i} = 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \infty$, 而且

$$f_{i,i} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{i,i}},$$

即定理结论成立. □

由定理2.2.22容易推出

♦**推论2.2.23.** *设状态i是常返的, 那么$C(i)$中所有状态都常返, 此时称$C(i)$为常返类.*

证明 对任意$j \in C(i)$, $i \leftrightarrow j$. 存在$m, n > 0$使得$p_{i,j}^{(m)} > 0, p_{j,i}^{(n)} > 0$. 因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{j,j}^{(k)} \geq \sum_{k=m+n}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} p_{i,i}^{(k-n-m)} p_{i,j}^{(m)} = p_{j,i}^{(n)} p_{i,j}^{(m)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,i}^{(k)} = +\infty,$$

这表明j是常返的. □

由推论2.2.23 可知, 一个互通类中状态或全是常返的或全是非常返的, 若全是常返的称该互通类为常返类, 否则称为非常返类. 若不可约链的状态空间为常返类, 则称该马氏链为不可约常返链, 否则称为不可约非常返链.

▶**例2.2.24.** *由(2.2.6)以及例2.1可知, 对任意$-1 < s < 1$,*

$$F_{0,0}(s) = 1 - \frac{1}{P_{0,0}(s)} = 1 - (1-4pqs^2)^{1/2}.$$

因此

$$f_{0,0} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{0,0}^{(2k)} = \lim_{s \uparrow 1} F_{0,0}(s) = \begin{cases} 1, & p = q = 1/2, \\ 1 - |p-q|, & p \neq q. \end{cases}$$

所以, (q,p)-简单随机游动的状态0 是常返的当且仅当$p = q = 1/2$. 另一方面, 例2.2.13表明(q,p)-简单随机游动是不可约的. 因此(q,p)-简单随机游动是常返的当且仅当$p = q = 1/2$.

▶**例2.2.25.** (高维简单对称随机游动) *直线上简单随机游动也可推广到高维空间. 以对称随机游动为例:*

(1) *若$X = \{X_n, n \geq 0\}$是取值在$\mathbb{Z}^2 = \{(i,j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$ 的时齐马氏链使得对任意$(i,j) \in \mathbb{Z}^2$,*

$$p_{(i,j),(i+1,j)} = p_{(i,j),(i-1,j)} = p_{(i,j),(i,j+1)} = p_{(i,j),(i,j-1)} = 1/4,$$

则称X是平面上简单对称随机游动(或平面整数格子点上对称随机游动).

(2) 若$X=\{X_n, n\geq 0\}$是取值在$\mathbb{Z}^3=\{(i,j,k): i,j,k\in\mathbb{Z}\}$的时齐马氏链使得对任意$(i,j,k)\in\mathbb{Z}^3$,

$$\begin{aligned}p_{(i,j,k),(i+1,j,k)} &= p_{(i,j,k),(i-1,j,k)} = p_{(i,j,k),(i,j+1,k)} = p_{(i,j,k),(i,j-1,k)}\\ &= p_{(i,j,k),(i,j,k+1)} = p_{(i,j,k),(i,j,k-1)} = 1/6,\end{aligned}$$

则称X是空间简单对称随机游动(或空间整数格子点上对称随机游动).

容易证明平面和空间的简单对称随机游动都是周期为2、不可约的马氏链. 此外我们还有平面上简单对称随机游动是常返的,但空间简单对称随机游动是非常返的. 事实上, 对空间简单对称随机游动我们可如下计算其n步转移概率

$$p^{(n)}_{(0,0,0),(0,0,0)}=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \sum\limits_{r+l+s=k}\frac{(2k)!}{r!r!l!l!s!s!}\frac{1}{6^{2k}}, & n=2k.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}_{(0,0,0),(0,0,0)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r+l+s=k}\frac{(2k)!}{r!r!l!l!s!s!}\frac{1}{6^{2k}}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6^{2k}}\frac{(2k)!}{k!k!}\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-r}\left[\frac{k!}{r!l!(k-r-l)!}\right]^2\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6^{2k}}\frac{(2k)!}{k!k!}\max_{0\leq r\leq m\leq k}\left\{\frac{k!}{r!(m-r)!(k-m)!}\right\}\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-r}\frac{k!}{r!l!(k-r-l)!}.\end{aligned}$$

注意到$\frac{k!}{r!l!(k-r-l)!}$是多项式$(x+y+z)^k$展开后的系数, 因此

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-r}\frac{k!}{r!l!(k-r-l)!}=3^k.$$

另一方面, 对任意满足条件$0\leq r\leq m\leq k$的非负整数r,m,

$$\frac{k!}{r!(m-r)!(k-m)!}=C_k^m C_m^r.$$

注意到对任意正整数$m\geq r$, 组合数

$$C_m^r\leq C_m^{\lfloor m/2\rfloor},$$

其中$\lfloor\cdot\rfloor$表示取整运算, 因此

$$\frac{k!}{r!(m-r)!(k-m)!}\leq C_k^m C_m^{\lfloor m/2\rfloor}.$$

又由

$$\frac{C_k^m C_m^{\lfloor m/2\rfloor}}{C_k^{m-1}C_{m-1}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor}}=\frac{k+1-m}{m-\lfloor m/2\rfloor},\quad 1\leq m\leq k,$$

可知$C_k^m C_m^{\lfloor m/2\rfloor}$在$m=m_k=k-\lfloor k/3\rfloor$处取最大值. 由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{(0,0,0),(0,0,0)}^{(n)} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{6^{2k}} \frac{(2k)!}{k!(k-m_k)!\lfloor m_k/2\rfloor!(m_k-\lfloor m_k/2\rfloor)!}$$

注意到$m_k \approx 2k/3$, 由k充分大时的Stirling公式

$$k! \approx \sqrt{2\pi k}(k/\mathrm{e})^k,$$

近似计算后得

$$\frac{(2k)!}{k!(k-m_k)!\lfloor m_k/2\rfloor!(m_k-\lfloor m_k/2\rfloor)!} \approx \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{2^{2k}3^k}{k^{3/2}}.$$

因此存在常数$M>0$使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{(0,0,0),(0,0,0)}^{(n)} \le M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \infty.$$

这表明$(0,0,0)$是非常返的, 从而由不可约性可知空间简单对称随机游动是非常返的. 平面上简单对称随机游动的常返性检验更简单, 参见习题5.8. □

▲**命题2.2.26.** 令$g_{i,i}(m)=\mathbb{P}_i$(至少有m个$n\ge 1$使得$X_n=i$), $g_{i,i}=\mathbb{P}_i(\{X_n=i\}$, i.o.), 那么$g_{i,i}(m)=f_{i,i}^m$. 从而若$i$ 常返则$g_{i,i}=1$; 若i非常返则$g_{i,i}=0$.

证明 由全概率公式以及条件概率公式

$$\begin{aligned} g_{i,i}(m+1) &= \mathbb{P}_i(\text{至少有}m+1\text{个}n\ge 1\text{使得}X_n=i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\tau_i=k, \text{至少有}m\text{个}n\ge k+1\text{使得}X_n=i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(\text{至少有}m\text{个}n\ge k+1\text{使得}X_n=i|\tau_i=k)\mathbb{P}_i(\tau_i=k). \end{aligned}$$

由习题4.7不难证明

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i(\text{至少有}m\text{个}n\ge k+1\text{使得}X_n=i|\tau_i=k) \\ &\quad = \mathbb{P}(\text{至少有}m\text{个}n\ge 1\text{使得}X_n=i|X_0=i) = g_{i,i}(m). \end{aligned}$$

因此

$$g_{i,i}(m+1) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{i,i}(m)\mathbb{P}_i(\tau_i=k) = g_{i,i}(m)\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,i}^{(k)} = g_{i,i}(m)f_{i,i}.$$

由此递归关系并注意到$g_{i,i}(1)=f_{i,i}$可得, 对任意$m\ge 1$,

$$g_{i,i}(m) = f_{i,i}^m.$$

令$m\to\infty$, 由概率连续性可知$g_{i,i}=\lim\limits_{m\to\infty} f_{i,i}^m$, 因此后一结论自然成立. □

由命题2.2.26 可知, 状态i是常返的, 那么从i出发几乎必然可以无穷次地回访i, 这正是“常返”的字面含义; 若i是非常返的, 那么由$\mathbb{P}_i(\{X_n=i\}$, i.o.$)=0$可

知, 对几乎所有的ω, 都存在一个时刻$N(\omega)$使得在$N(\omega)$后X不再访问i.

★定理2.2.27. 记马氏链X首次回到状态i的时间为τ_i. 设$\tau_i<\infty$. 令$Y_n=X_{\tau_i+n}$, 即对任意ω, $Y_n(\omega)=X_{\tau_i(\omega)+n}(\omega)$. 那么$Y=\{Y_n,n\geq 0\}$ 是与X 有相同转移概率矩阵的马氏链且与$(\tau_i,X_0,\cdots,X_{\tau_i})$ 相互独立。

证明 首先注意到$Y_0=X_{\tau_i}=i$是常量, 对任意$n\geq 1$, $k_0\in S,k_1,\cdots,k_{n-1}\in S\setminus\{i\}$, $m\geq 1$, $0\leq n_1<\cdots<n_m$, $j_1,\cdots,j_m\in S$. 令$k_n=i$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{l=0}^{n-1}\{X_l=k_l\}\cap\{\tau_i=n\}\cap\bigcap_{r=1}^{m}\{Y_{n_r}=j_r\}\Big)\\&=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{l=0}^{n}\{X_l=k_l\}\cap\bigcap_{r=1}^{m}\{X_{n+n_r}=j_r\}\Big)\\&=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{l=0}^{n-1}\{X_l=k_l\}\cap\{X_n=i\}\Big)\mathbb{P}\Big(\bigcap_{r=1}^{m}\{X_{n+n_r}=j_r\}|X_n=i\Big)\\&=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{l=0}^{n-1}\{X_l=k_l\}\cap\{X_n=i\}\Big)\mathbb{P}_i\Big(\bigcap_{r=1}^{m}\{X_{n_r}=j_r\}\Big).\end{aligned}$$

两边对全部的$n\geq 1$，$k_0\in S$以及$k_1,\cdots,k_{n-1}\in S\setminus\{i\}$求和得

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{r=1}^{m}\{Y_{n_r}=j_r\}\Big)=\mathbb{P}_i\Big(\bigcap_{r=1}^{m}\{X_{n_r}=j_r\}\Big).$$

进而

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{l=0}^{n-1}\{X_l=k_l\}\cap\{\tau_i=n\}\cap\bigcap_{r=1}^{m}\{Y_{n_r}=j_r\}\Big)\\&=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{l=0}^{n-1}\{X_l=k_l\}\cap\{X_n=i\}\Big)\mathbb{P}_i\Big(\bigcap_{r=1}^{m}\{Y_{n_r}=j_r\}\Big).\end{aligned}$$

因此Y是与X有相同转移概率函数的马氏链且与$(\tau_i,X_0,\cdots,X_{\tau_i})$相互独立. □

定理2.2.27 表明将τ_i看作起点, 此后的随机过程Y本质就是0点从i出发的的马氏链X, 而且τ_i之后的随机事件与τ_i之前的事件相互独立.

练习题 除特别说明外, 以下总设X为马氏链, 转移概率矩阵为$(p_{i,j})_{i,j\in S}$.

5.1 若$i\leftrightarrow j$且记它们的周期为d, 若$p_{i,j}^{(n)}>0,p_{j,i}^{(m)}>0$, 证明$d|n-m$.

5.2 若状态i非常返, 那么对任意$j\in S$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_{j,i}^{(n)}=0$.

5.3 若j为吸收状态, 那么$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=f_{i,j}$.

5.4 若$C(i)$, $C(j)$是两不相同的本质互通类, 那么$f_{i,j}=0$.

5.5 元素有限的本质类必是常返类.

5.6 证明平面上简单对称随机游动是常返的.

5.7* 试构造马氏链X, 使得它的状态空间至少包含一个具有无穷多状态的非本质互通类(记作C), 而且当$X_0 \in C$时$P(X_n \in C, n \geq 1) > 0$.

5.8* 设C是X的一个具有有限状态的非本质互通类, $X_0 \in C$. 证明对几乎所有的ω, 存在$N(\omega)$ 使得对所有的$n \geq N(\omega)$, $X_n(\omega) \notin C$.

5.9* 设$X = \{X_n, n \geq 0\}$不可约d周期马氏链, 状态空间为S。对任意$i \in S$, 令

$$S_k = \{j \in S, p_{i,j}^{nd+k} > 0, n \geq 0\}, \qquad k = 0, \cdots, d-1.$$

证明(1) $S_k, 0 \leq k \leq d-1$, 互不相交而且$S = \cup_{k=0}^{d-1} S_k$.

(2)令$Y_n = X_{nd}$, 那么$Y = \{Y_n, n \geq 0\}$是以$\mathbf{P}^{(d)}$为一步转移概率矩阵的非周期马氏链. 特别, 若$X_0 \in S_k$, 那么Y 是状态空间为S_k的非周期马氏链.

5.10* 对马氏链$X = \{X_n; n \geq 0\}$定义$\tau_i^{(0)} = 0$, $\tau_i^{(k)} = \inf\{n > \tau_i^{(k-1)}; X_n = i\}$, 令

$$W_i^{(k)} = \tau_i^{(k)} - \tau_i^{(k-1)}, \quad k \geq 1.$$

证明$W_i^{(k)}, k \geq 1$, 相互独立, 而且$W_i^{(k)}, k \geq 2$, 有相同分布.

5.11* 若状态j的周期为d, 那么集合$\{n \geq 1;\ f_{j,j}^{(n)} > 0\}$的最大公因子也为$d$.

5.12* 令$\tau = \inf\{n \geq 0:\ X_n \geq 1\}$, 证明: 对任意$n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{\tau+n} = j | X_\tau = i) = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i), \quad i \geq 1.$$

5.13* 设不可约链X的状态空间$S = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 若存在$\{y_i;\ i \in S\}$及某个状态j使得对任意$i \neq j$,

$$\sum_{k \in S} p_{i,k} y_k \leq y_i, \tag{2.2.7}$$

而且$\lim\limits_{i \to +\infty} y_i = +\infty$, 证明$X$为常返的.

2.3 首访概率与时间

在马氏链的研究和应用当中, 状态的首次到达时间或首次回访时间是非常重要的观察变量. 这一节我们将通过寻找恰当的计算方法, 进一步讨论这类随机变量的分布、性质与应用. 为叙述方便, 若无特别声明, 本节总设马氏链$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$的转移概率矩阵$\mathbf{P}=(p_{i,j})_{i,j\in S}$.

2.3.1 访问概率与分布

首先我们将单个状态i的回访时间τ_i推广到状态空间S中任一子集A上. 令

$$\tau_A=\inf\{n\geq 1, X_n\in A\}.$$

τ_A表示首次进入或回到集合A的时间. 对任意正整数$n\geq 1$, 令

$$f_{i,A}^{(n)}=\mathbb{P}_i(\tau_A=n),\qquad f_{i,A}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,A}^{(n)},$$

以及对任意$u\in[0,1]$, 定义

$$F_{i,A}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,A}^{(n)}u^n.$$

那么$f_{i,A}$就是从i出发在有限时间内访问或回访A的概率. 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,A}^{(n)}\leq 1$, $f_{i,A}=F_{i,A}(1)$. 当$f_{i,A}=1$时, 序列$\{f_{i,A}^{(n)}\}$就是随机变量τ_A的分布列, $F_{i,A}(u)$ 就是对应的母函数; 当$f_{i,A}<1$ 时, 从i出发在有限时间内到达A的事件可能不发生, 但由幂级数与系数关系可知序列$\{f_{i,A}^{(n)}\}$与函数$F_{i,A}(u)$ 仍是一一对应的.

★**定理2.3.1.** *对任意给定的$A\subset S$以及$u\in[0,1]$, $\{F_{i,A}(u); i\in S\}$是线性方程组*

$$z_i=\sum_{k\notin A}up_{i,k}z_k+u\sum_{j\in A}p_{i,j},\qquad i\in S,\tag{2.3.1}$$

的最小非负解. 即$\{F_{i,A}(u); i\in S\}$本身是方程组(2.3.1)的非负解而且对该方程组的任意非负解 $\{g_i(u); i\in S\}$, $F_{i,A}(u)\leq g_i(u)$ 对一切$i\in S$ 都成立.

证明 记$A(i,n,u)=\sum_{m=1}^{n}f_{i,A}^{(m)}u^m$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}A(i,n,u)=F_{i,A}(u)$. 由于

$$A(i,n+1,u)=\sum_{m=1}^{n+1}f_{i,A}^{(m)}u^m=f_{i,A}^{(1)}u+\sum_{m=2}^{n+1}f_{i,A}^{(m)}u^m=\sum_{j\in A}p_{i,j}u+\sum_{m=2}^{n+1}f_{i,A}^{(m)}u^m,$$

以及由马氏性和时齐性可知

$$\begin{aligned}f_{i,A}&=\mathbb{P}_i(X_m\in A, X_1=k, X_v\notin A, 1<v<m)\\&=\mathbb{P}_i(X_1=k)\mathbb{P}(X_m\in A, X_v\notin A, 2<v<m|X_1=k)=p_{i,k}f_{k,A}^{(m-1)},\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} A(i,n+1,u) &= u\sum_{j\in A}p_{i,j}+\sum_{k\notin A}\sum_{m=2}^{n+1}up_{i,k}f_{k,A}^{(m-1)}u^{m-1}\\ &= u\sum_{j\in A}p_{i,j}+u\sum_{k\notin A}p_{i,k}A(k,n,u). \end{aligned}$$

两边令$n\to\infty$得(参见习题1.5)

$$F_{i,A}(u)=u\sum_{j\in A}p_{i,j}+u\sum_{k\notin A}p_{i,k}F_{k,A}(u).$$

因此$\{F_{i,A}(u),i\in S\}$确实为方程组(2.3.1)的非负解.

任取(2.3.1)的一组非负解$\{g_i(u),i\in S\}$, 由

$$g_i(u)=u\sum_{j\in A}p_{i,j}+u\sum_{k\notin A}p_{i,k}g_k(u)$$

可知, 对任意$i\in S$,

$$g_i(u)\ge A(i,1,u)=u\sum_{j\in A}p_{i,j}.$$

设对任意$i\in S$, $g_i(u)\ge A(i,k,u)$对 $k=n-1$成立, 那么由

$$\begin{aligned} A(i,n,u) &= \sum_{j\in A}up_{i,j}+\sum_{k\notin A}up_{i,k}A(k,n-1,u)\\ &\le \sum_{j\in A}up_{i,j}+\sum_{k\notin A}up_{i,k}g_k(u)=g_i(u) \end{aligned}$$

可知对任意$i\in S$, $g_i(u)\ge A(i,k,u)$对$k=n$也成立.

由数学归纳法可知, 对任意$i\in S$以及任意n都有

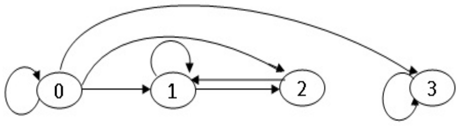
$$g_i(u)\ge A(i,n,u).$$

对任意$i\in S$, 令$n\to\infty$得$g_i(u)\ge F_{i,A}(u)$. 故$F_{i,A}(u)$为(2.3.1)的最小非负解. □

定理2.3.1为我们提供了通过求解代数方程获得τ_A分布的方法. 特别, 若X是有限状态马氏链, 那么由定理2.3.1, 我们可以通过求解含有限个变量的线性方程组获得τ_A的分布信息.

▶**例2.3.2.** 设马氏链X的转移概率矩阵为$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求$\mathbb{P}_0(\tau_1=n)$ 和 $F_{i,1}(u)$, 其中$i=0,1,2,3$, n为任意正整数.

解 由转移概率矩阵我们可以画出状态一步转移图如下:



由此可知$3 \nrightarrow 1$, 因此对任意$u \in [0,1]$, $F_{3,1}(u) = 0$, 进而由定理2.3.1(取$A = \{1\}$)可得

$$\begin{cases} F_{0,1}(u) = up_{0,0}F_{0,1}(u) + up_{0,2}F_{2,1}(u) + up_{0,1}, \\ F_{2,1}(u) = up_{2,0}F_{0,1}(u) + up_{2,2}F_{2,1}(u) + up_{2,1}, \\ F_{1,1}(u) = up_{1,0}F_{0,1}(u) + up_{1,2}F_{2,1}(u) + up_{1,1}. \end{cases}$$

由前两个方程得

$$\begin{pmatrix} 1 - up_{0,0} & -up_{0,2} \\ -up_{2,0} & 1 - up_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{0,1}(u) \\ F_{2,1}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} up_{0,1} \\ up_{2,1} \end{pmatrix}.$$

将$p_{0,0} = p_{0,2} = p_{0,1} = 1/4, p_{2,0} = p_{2,2} = 0, p_{2,1} = 1$代入并计算得

$$F_{0,1}(u) = \frac{u + u^2}{4 - u}, \quad F_{2,1}(u) = u.$$

将此结果代入第三个方程并注意到$p_{1,0} = 0, p_{1,1} = 1/3, p_{1,2} = 2/3$, 我们可得

$$F_{1,1}(u) = \frac{2}{3}u^2 + \frac{1}{3}u.$$

对任意$0 \le u \le 1$, 由幂级数展开式,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{0,1}^{(k)} u^k = F_{0,1}(u) = \left[\frac{u}{4} + \frac{u^2}{4}\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{4^k} = \frac{u}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5u^k}{4^k}$$

可知$f_{0,1}^{(1)} = 1/4, \quad f_{0,1}^{(k)} = 5/4^k, k \ge 2.$ □

▶**例2.3.3.** 设$W = \{W_n\}$为直线上(q,p)-简单随机游动, 求$F_{0,1}(u)$, $u \in [0,1]$.

解 由定理2.3.1可知$\{F_{i,1}(u)\}_{i \in \mathbb{Z}}$是方程组

$$z_i = \sum_{k \ne 1} up_{i,k} z_k + up_{i,1}, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

的最小非负解. 从而

$$F_{0,1}(u) = up + uqF_{-1,1}(u). \tag{2.3.2}$$

注意到对任意$n \ge 1$以及任意$i \in \mathbb{Z}$,$j \ge 2$, 由独立增量性

$$\begin{aligned} f_{i,i+j}^{(n)} &= \mathbb{P}(\tau_{i+j} = n | W_0 = i) = \mathbb{P}(W_n = i + j, W_k < i + j, 0 < k < n | W_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(W_n - W_0 = j, W_k - W_0 < j, 0 < k < n) \\ &= \mathbb{P}(W_n = j, W_k < j, 0 < k < n | W_0 = 0) = f_{0,j}^{(n)}. \end{aligned}$$

特别

$$
\begin{aligned}
f_{0,2}^{(n)} &= \mathbb{P}(W_n = 2, W_k < 2, 0 < k < n | W_0 = 0) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(W_n = 2, W_k < 2, j < k < n, W_j = 1, W_l < 1, 0 < l < j | W_0 = 0).
\end{aligned}
$$

由马氏性

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_n = 2, W_k < 2, j < k < n, W_j = 1, W_l < 1, 0 < l < j | W_0 = 0) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_j = 1, W_l < 1, 0 < l < j | W_0 = 0) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(W_n = 2, W_k < 2, j < k < n | W_j = 1).
\end{aligned}
$$

注意到W还是时齐的,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_n = 2, W_k < 2, j < k < n | W_j = 1) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_{n-j} = 2, W_k < 2, 0 < k < n-j | W_0 = 1) = f_{1,2}^{(n-j)}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
f_{0,2}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} f_{0,1}^{(j)} f_{1,2}^{(n-j)} = \sum_{j=1}^{n-1} f_{0,1}^{(j)} f_{0,1}^{(n-j)}.
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
F_{-1,1}(u) = F_{0,2}(u) &= \sum_{n=2}^{\infty} f_{0,2}^{(n)} u^n = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} f_{0,1}^{(j)} u^j f_{0,1}^{(n-j)} u^{n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} f_{0,1}^{(j)} u^j \sum_{k=1}^{\infty} f_{0,1}^{(k)} u^k = \big[F_{0,1}(u)\big]^2.
\end{aligned}
$$

将其带入(2.3.2), 注意到$F_{0,1}(u)$为最小非负解, 解得

$$
F_{0,1}(u) = \frac{2pu}{1 + \sqrt{1 - 4pqu^2}}. \qquad \square
$$

由$f_{i,j} = \lim\limits_{u \to 1-} F_{i,j}(u)$以及定理2.3.1易得如下关于访问概率的常用结果.

♦**推论2.3.4.** 对任意给定的$j \in S$, $\{f_{i,j}; i \in S\}$是线性方程组

$$
z_i = \sum_{k \neq j} p_{i,k} z_k + p_{i,j}, \qquad i \in S, \tag{2.3.3}
$$

的最小非负解.

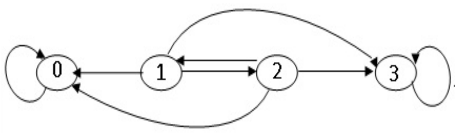
▶**例2.3.5.** 一家银行将贷款分类为全部付清(0), 信誉良好(1), 拖欠(2)或者呆

账(3). 贷款按照如下转移概率在不同的类别之间转移:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求处于信誉良好级别的贷款最终全部付清的比例.

解 由转移概率矩阵我们可以画出状态一步转移图如下:



所求比例为概率f_{10}. 由于$3 \not\to 0$, $f_{3,0} = 0$. 由推论2.3.4可知

$$\begin{cases} f_{1,0} = p_{1,1}f_{1,0} + p_{1,2}f_{2,0} + p_{1,0} = 0.8f_{1,0} + 0.1f_{2,0} + 0.1, \\ f_{2,0} = p_{2,1}f_{1,0} + p_{2,2}f_{2,0} + p_{2,0} = 0.4f_{1,0} + 0.4f_{2,0} + 0.1. \end{cases}$$

由此解得$f_{10} = 7/8$, 即最终付清得比例为83.5%. □

方程组(2.3.1)与(2.3.3)在理论上也很重要, 它给我们提供了一种通过判断方程组的解的性质确定马氏链常返性的方法.

★定理2.3.6. 设X不可约, 那么X常返当且仅当存在一个状态$j \in S$使得方程组(2.3.3)的任意一组非负解$\{u_i;\ i \in S\}$满足$u_i \geq 1$ 对一切$i \in S$成立.

证明 "必要性": 若不可约链X常返, 则由推论2.2.23和性质2.2.21可知对任意$i, j \in S$, $f_{i,j} = 1$. 从而方程组(2.3.1)的最小非负解$\{f_{i,j};\ i \in S\}$恒为1, 因此$u_i \geq 1$ 对一切$i \in S$成立.

"充分性": 由假设可知$\{u_i \equiv 1; i \in S\}$为(2.3.3)的最小非负解, 从而由推论2.3.4 可知$f_{j,j} = 1$, 即j常返, 再由推论2.2.23 可知不可约链X为常返的. □

▶例2.3.7. 设马氏链X的状态空间为非负整数, 转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}$$

其中$p_0>0$, $r_0+p_0=1$, $q_i+r_i+p_i=1$, $p_i,q_i>0$, $i\geq 1$. 通常我们称X为带一个反射壁的随机游动. 讨论X的常返性.

解 在条件假设下容易证明X是不可约马氏链. 考察$\{f_{n,0},n\geq 0\}$满足的方程组:

$$\begin{cases} z_0=\sum_{k\neq 0}p_{0,k}z_k+p_{0,0}=p_0z_1+r_0 \\ z_1=\sum_{k\neq 0}p_{1,k}z_k+p_{1,0}=r_1z_1+p_1z_2+q_1 \\ z_n=\sum_{k\neq 0}p_{z,k}z_k+p_{n,0}=q_nz_{n-1}+r_nz_n+p_nz_{n+1}, \quad n\geq 2. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

可得

$$z_{n+1}-z_n=\frac{q_n}{p_n}(z_n-z_{n-1})=\cdots=\frac{q_1q_2\cdots q_n}{p_1p_2\cdots p_n}(z_1-1).$$

由此可知(2.3.4)的非负解必满足$z_0=p_0z_1+r_0$, 而且对任意$n\geq 1$,

$$z_{n+1}=z_1+(z_1-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}.$$

因此(1)当$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}=\infty$时, 由$\{z_n,n\geq 0\}$非负可知$z_1\geq 1$, 从而$z_n\geq 1$, $n\geq 0$. 由定理2.3.6, 此时X常返.

(2)当$A=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}<\infty$时, 可取$z_1\in(A/(1+A),1)$, 使得

$$0<z_0=p_0z_1+r_0<1 \quad 而且 \quad 0<z_1+A(z_1-1)<z_n\leq z_1<1$$

对所有$n\geq 1$都成立, 即(2.3.3)存在非负解$\{z_i,i\geq 0\}$使得$z_1<1$. 此时由定理2.3.6可知X是非常返的. □

2.3.2 平均访问时间

对任意$i\in S$和$A\subset S$ 我们还可以定义

$$m_{i,A}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{i,A}^{(n)}, \tag{2.3.5}$$

其中, 当$A=\{j\}$为单点集时, 简记为$m_{i,j}$.

当$f_{i,A}=1$, 即$\mathbb{P}_i(\tau_A<\infty)=1$时,

$$m_{i,A}=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbb{P}_i(\tau_A=n)=\mathbb{E}_i(\tau_A)$$

表示从i出发首次回到或到达集合A的平均时间. 特别, 若i 是常返的, $m_{i,i}$表示首次回到i的平均时间, 称其为状态i的平均回访时间.

♠**注记2.3.8.** 当$f_{i,A}<1$时上面的概率解释不成立, 但$m_{i,A}$仍在一定条件下刻画了τ_A的“均值”信息.

注意到

$$m_{i,A} = \frac{\mathrm{d}F_{i,A}(u)}{\mathrm{d}u}\Big|_{u=1}.$$

因此若解方程(2.3.1)得到函数$F_{i,A}(u)$, 我们可以通过求导运算方便地算出$m_{i,A}$.

▶**例2.3.9.** 对例*2.3.2*中X, 求$m_{i,1}$, 其中$i = 0, 1, 2, 3$.

解 对例2.3.2中结果$F_{i,1}(u)$求导, 并在导函数中令$u = 1$ 可得

$$m_{0,1} = 11/9,\ \ m_{1,1} = 5/3,\ \ m_{2,1} = 1,\ \ m_{3,1} = 0. \qquad \square$$

通过求解方程组(2.3.1)得到函数$F_{i,A}(u)$有时候并不方便, 下面的定理给出了通过解方程直接得到$m_{i,A}$的方法.

★**定理2.3.10.** 对任意给定的$A \subset S$, $\{m_{i,A}; i \in S\}$是线性方程组

$$z_i = \sum_{k \notin A} p_{i,k} z_k + f_{i,A}, \qquad i \in S \tag{2.3.6}$$

的最小非负解.

证明 记$b_{i,A}(k) = \sum_{m=1}^{n} m f_{i,A}^{(m)}$, 则$n \to \infty$时$b_{i,A}(n) \uparrow m_{i,A}$. 由

$$\begin{aligned} b_{i,A}(n+1) &= \sum_{m=1}^{n+1} m f_{i,A}^{(m)} = \sum_{m=1}^{n} m f_{i,A}^{(m+1)} + \sum_{m=1}^{n+1} f_{i,A}^{(m)} \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} f_{i,A}^{(m)} + \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \notin A} m \mathbb{P}_i(X_{m+1} \in A, X_1 = k, X_v \notin A, 2 \le v \le m) \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} f_{i,A}^{(m)} + \sum_{k \notin A} p_{i,k} \sum_{m=1}^{n} m f_{k,A}^{(m)} = \sum_{k \notin A} p_{i,k} b_{k,A}(n) + \sum_{m=1}^{n+1} f_{i,A}^{(m)}. \end{aligned}$$

两边令$n \to \infty$得

$$m_{i,A} = f_{i,A} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} m_{k,A}.$$

因此$\{m_{i,A}\}_{i \in S}$为方程组(2.3.6)的非负解. 任取(2.3.6)的一组非负解$\{u_i\}_{i \in S}$, 由

$$u_i = f_{i,A} + \sum_{k \notin A} p_{i,k} u_k$$

可知$u_i \ge b_{i,A}(1) = f_{i,A}^{(1)}$对任意$i \in S$成立.

设对任意$i \in S$, $u_i \ge b_{i,A}(k)$对$k = n-1$成立, 那么由

$$b_{i,A}(n) = \sum_{m=1}^{n+1} f_{i,A}^{(m)} + \sum_{k \notin A} p_{i,k} b_{k,A}(n-1) \le f_{i,j} + \sum_{k \notin A} p_{i,k} u_k = u_i$$

可知对任意$i \in S$, $u_i \ge b_{i,A}(k)$对$k = n$也成立.

由数学归纳法可知, 对任意$i \in S$以及任意n都有

$$u_i \geq b_{i,A}(n).$$

令$n \to \infty$得$u_i \geq m_{i,A}$对所有$i \in S$成立, 因此$m_{i,A}$为(2.3.6)的最小非负解. □

▶**例2.3.11.** *设有$n+1, n \geq 1$,个选手依次两两进行比赛, 获胜者接连比赛下去直到有一名选手连续地击败其余n名选手才结束. 假设每场比赛中两名选手获胜的概率各为$1/2$, 求平均需比赛次数.*

解 以X_k表示第k次比赛结束时比赛胜者的连赢场次. $X_0 = 0$且$X = \{X_k,\ k \geq 0\}$为时齐马氏链, 转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array}$$

由此可知状态集$C(1) = \{1, 2, \cdots\}$是X的一个互通类,

$$f_{1,1} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{1,1}^{(m)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1.$$

所以$C(1)$是X的不可约常返类, 进而$f_{i,j} = 1, i, j \geq 1$. 比赛结束的条件是$X_k = n$, 比赛结束的时间为

$$\tau_n = \inf\{k \geq 1, X_k = n\}.$$

从而平均比赛次数

$$T = \mathbb{E}_0(\tau_n) = m_{0,n}.$$

显然$m_{0,n} = m_{1,n} + 1$, 由定理2.3.10可知$m_{i,n}, 1 \leq i < n$,是方程组

$$\begin{cases} z_i = z_1/2 + z_{i+1}/2 + 1, & 1 \leq i < n-1, \\ z_{n-1} = z_1/2 + 1. \end{cases}$$

的最小非负解. 由此可得

$$\begin{cases} z_i = 2z_{i-1} - z_1 - 2, & 2 \leq i \leq n-1 \\ z_{n-1} = z_1/2 + 1. \end{cases}$$

因此对任意$2 \leq i \leq n-1$,

$$z_i = 2^2 z_{i-2} - 2z_1 - 2^2 - z_1 - 2$$

$$= 2^{i-1}z_1 - (2^{i-2} + \cdots + 2 + 1)z_1 - (2^{i-1} + \cdots + 2)$$
$$= z_1 - (2^i - 2).$$

从而由$z_{n-1} = z_1 - 2^{n-1} + 2 = z_1/2 + 1$可知$z_1 = 2^n - 2$. 因此所求比赛次数

$$T = m_{0,n} = m_{1,n} + 1 = z_1 + 1 = 2^n - 1. \qquad \square$$

▶**例2.3.12.** 设X是带一个反射壁的(q,p)-随机游动, 即在例2.3.7中$r_0 = 0$, $p_0 = 1$; 而对一切$i \geq 1$, $r_i = 0$, $q_i = q$, $p_i = p$. 若$q > p$, 求$m_{n,0}$, $n \geq 0$.

解 由例2.3.7可知$q > p$时, X常返, 对$n \geq 0$, $f_{n,0} = 1$. $\{m_{n,0}\}_{n\geq 0}$为下列方程组的最小非负解:

$$\begin{cases} z_0 = \sum_{k\neq 0} p_{0,k}z_k + 1 = z_1 + 1, \\ z_1 = \sum_{k\neq 0} p_{1,k}z_k + 1 = pz_2 + 1, \\ z_n = \sum_{k\neq 0} p_{n,k}z_k + 1 = qz_{n-1} + pz_{n+1} + 1, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

由此可得

$$\begin{cases} z_0 = \sum_{k\neq 0} p_{0,k}z_k + 1 = z_1 + 1, \\ z_2 - z_1 = rz_1 - \frac{1}{p}, \\ z_{n+1} - z_n = r(z_n - z_{n-1}) - \frac{1}{p}, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

其中$r = q/p$. 所以对$n \geq 1$

$$z_{n+1} - z_n = r^n z_1 - \frac{1}{p}[1 + r + \cdots + r^{n-1}] = r^n z_1 - \frac{1}{p}\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

进而

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_1 \sum_{k=0}^{n} r^k - \frac{1}{p(r-1)}(\sum_{k=0}^{n} r^k - n - 1) \\ &= z_1 \sum_{k=0}^{n} r^k - \frac{1}{q-p}(\sum_{k=0}^{n} r^k - n - 1). \end{aligned}$$

上式两边除以$\sum_{k=0}^n r^k$得,

$$\frac{z_{n+1}}{\sum_{k=0}^n r^k} = z_1 - \frac{1}{q-p}\left(1 - \frac{n+1}{\sum_{k=0}^n r^k}\right), \quad n \geq 1.$$

由$r = q/p > 1$可知当$n \to \infty$时

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \to \infty \text{ 而且 } n/\sum_{k=0}^{n} r^k \to 0.$$

因此作为(2.3.7) 的非负解$z_n, n \geq 0$, 必有

$$z_1 \geq \frac{1}{q-p},$$

从而

$$z_n \geq \frac{n}{q-p}, \qquad n \geq 1.$$

直接验证可知

$$z_0 = 1 + \frac{1}{q-p},\ z_n = n/(q-p),\ \ n \geq 1,$$

为方程(2.3.7)的一组非负解从而为最小非负解. 因此由定理2.3.10,

$$m_{0,0} = 1 + \frac{1}{q-p} = \frac{2q}{q-p};\ \ m_{n,0} = \frac{n}{q-p}, \quad n \geq 1. \qquad \square$$

值得注意的是, 当$i \neq j$时$f_{i,j}, m_{i,j}$只依赖于到达j之前各状态的转移概率, 与从j 出发的转移概率$p_{j,\cdot}$无关. 从而改变$p_{j,\cdot}$ 不影响$f_{i,j}$, $m_{i,j}$ 的取值与判断.

►**例2.3.13.** *设X为(q,p)-随机游动, $q>p$, 求$m_{a,0}$其中$a>0$.*

解: 将0的转移概率$p_{0,k}$重新定义为$p_{0,k} = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$. 此时从$a>0$出发的随机游动即为带反射壁的$(q,p)$-随机游动. 因此由例2.3.12可知$m_{a,0} = a/(q-p)$. $\square$

练习题

6.1 设X的状态为$\{1,2,3\}$, 转移概率矩阵$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, 求$f_{1,2}$与$m_{1,2}$.

6.2 若一篇文稿有n个错误, 每次校阅至少能发现一个, 但留下来的错误数在0到$n-1$之间等可能存在. 设原稿共有a个错误, 问为了改正全部错误平均需要校阅几次?

6.3 若马氏链X只有三个状态且$(m_{i,j}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, 求$X$的转移概率矩阵$\mathbf{P}$.

6.4 设X是带一个反射壁的(q,p)-随机游动, $n>0$, (1) 若$q<p$, 求$f_{n,0}$, (2) 若$q>p$, 求$m_{0,n}$.

6.5 (Ehrenfest模型) 设一个坛子内装有红白两色共N个球, 每次随机地从坛子中抽出一个球, 把它换成另一种颜色后放回. 以X_n表示经n次抽放后坛中的红球数, 那么$X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为时齐马氏链. 若开始时坛内只有一个红球, 问平均要抽放多少次才能使坛内全是白球?

2.4 转移概率极限与平稳分布

上一节我们介绍了首访时间(回访周期)的"均值"$m_{i,j}$. 这是一个非常重要的概念, 不仅体现在应用上, 还是刻画马氏链性质的重要指标.

2.4.1 正常返, 零常返与转移概率极限

给定马氏链$X=\{X_n\}$, 转移概率矩阵$\mathbf{P}=(p_{i,j})_{i,j\in S}$. 利用回访周期的平均值, 我们可以把$X$常返状态进一步区分为:

♣**定义2.4.1.** *设$i\in S$为X的常返状态. 称i是正常返的, 若$m_{i,i}<\infty$; 称i是零常返的, 若$m_{i,i}=+\infty$.*

直观而言状态i是正常返的意味着从i出发X能"较大概率"地在短时间内回访自己, 而零常返则意味着虽然从i出发X一定会回访自己, 但从平均看, 可以说对下一次回访"遥不可及".

★**定理2.4.2.** *对一切$i\in S$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{i,i}^{(k)}=\begin{cases}1/m_{i,i}, & i\text{正常返},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明定理之前我们先介绍一个关于数列的比极限的结论.

▼**引理2.4.3.** *设$\{a_n;\ n\geq 0\}$为一个不全为0的非负数列且满足条件*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k}=0.$$

若$\{b_n;\ n\geq 0\}$为收敛数列, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k}=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证明 由所设条件, 对任意给定$N\geq 1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=n-N+1}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k}=0.$$

若b_n极限有限, 记作b, 那么对任意$\varepsilon>0$, 存在N, 使得当$n\geq N$时, $|b_n-b|<\varepsilon$. 于是存在$B<\infty$使得$|b_n-b|<B$对一切n成立. 进而

$$\Big|\sum_{k=0}^n a_k(b_{n-k}-b)\Big|\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{n-N}a_k+B\sum_{k=n-N+1}^{n}a_k.$$

两边同除以$\sum_{k=0}^n a_k$, 不难看出此时结论成立.

若b_n的极限为无穷, 不妨设是$+\infty$, 则对一切$M > 0$, 存在N, 使得当$n \geq N$时, $b_n \geq M$. 于是

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geq M \sum_{k=0}^{n-N} a_k + (\min_{0\leq n\leq N} b_n) \sum_{k=n-N+1}^{n} a_k.$$

同样两边同除以$\sum_{k=0}^{n} a_k$, 不难看出此时结论也成立. □

定理2.4.2的证明 按n之前最后离开状态i的时刻可将随机事件$\{X_n = j\}$分解为不相容事件

$$\{X_n = j\} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{X_n = j, X_k = i, X_v \neq i, v = k+1, \cdots, n-1\}.$$

从而, 由马氏性及(2.2.4)

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j) &= \mathbb{P}_i(\bigcup_{k=0}^{n-1} \{X_n = j, X_k = i, X_v \neq i, v = k+1, \cdots, n-1\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,i}^{(k)} \mathbb{P}_i(X_n = j, X_v \neq i, v = k+1, \cdots, n-1 | X_k = i) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,i}^{(k)} e_{ij}^{(n-k)}, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

进而

$$\begin{aligned} n &= \sum_{j\in S} \sum_{m=1}^{n} p_{i,j}^{(m)} = \sum_{j\in S} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m-1} p_{i,i}^{(k)} e_{ij}^{(m-k)} \\ &= \sum_{j\in S} \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,i}^{(k)} \sum_{m=1}^{n-k} e_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,i}^{(k)} \sum_{m=1}^{n-k} \sum_{j\in S} e_{ij}^{(m)}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{j\in S} e_{ij}^{(m)} &= \mathbb{P}_i(\bigcup_{j\in S} \{X_m = j, X_v \neq i, v = 1, \cdots, m\}) \\ &= \mathbb{P}_i(X_v \neq i, v = 1, \cdots, m-1) = \mathbb{P}_i(\tau_i \geq m). \end{aligned}$$

因此

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,i}^{(k)} \sum_{m=1}^{n-k} \mathbb{P}_i(\tau_i \geq m).$$

令$b_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i(\tau_i \geq m)$, 则

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,i}^{(k)} b_{n-k}.$$

若i正常返, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = m_{ii} < \infty$; 若$i$零常返或非常返, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. 由引理2.4.3可知定理成立. □

由定理2.4.2, 容易得到如下结果, 证明简单, 此略.

♦**推论2.4.4.** i正常返当且仅当$\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{i,i}^{(k)}>0$.

♦**推论2.4.5.** 设状态i是正常返的, 如果$i\to j$, 那么j也是正常返的且$j\in C(i)$.

证明 由i常返可知i本质进而$j\in C(i)$, 因此存在$m,n>0$使得$p_{j,i}^{(m)}>0$, $p_{i,j}^{(n)}>0$. 由C-K方程,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{v=1}^{k}p_{j,j}^{(v)}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{v=m+n+1}^{k}p_{j,j}^{(v)}\geq p_{j,i}^{(m)}p_{i,j}^{(n)}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{v=1}^{k-n-m}p_{i,i}^{(v)}>0,$$

因此j正常返. □

推论2.4.5表明若i正常返那么$C(i)$中所有状态都正常返, 即正常返性也是互通类中元素共有的性质, 此时称$C(i)$为正常返类. 结合此前关于常返与非常返的讨论, 我们可将互通类按其中状态的常返性分成正常返类，零常返类和非常返类这三种情形. 类似, 我们也可以定义正常返、零常返和非常返马氏链, 若它的每个状态都是正常返、零常返和非常返的.

▶**例2.4.6.** 直线上(q,p)-随机游动W当$p=q=1/2$时是零常返的.

解 已知$p=q=1/2$时W常返. 此时对$n=2k$, $2k+1$, 当$k\geq 1$ 充分大时由striling公式可知

$$\sum_{m=0}^{n}p_{0,0}^{(m)}=1+\sum_{m=1}^{k}\frac{C_{2m}^{m}}{4^m}\approx\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

因此

$$\sum_{m=0}^{n}p_{0,0}^{(m)}\approx\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

这表明$\frac{1}{n}\sum\limits_{m=0}^{n}p_{0,0}^{(m)}\to 0$, 从而状态0为零常返的. 由$W$不可约可知$W$零常返. □

★**定理2.4.7.** 对任意$i,j\in S$以及$u\in[0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}p_{i,j}^{(k)}u^k}{\sum_{k=0}^{n}p_{j,j}^{(k)}u^k}=F_{i,j}(u).$$

证明 $u=0$时结果显然成立. 下设$u\in(0,1]$. 由(2.2.5)可得对任意$n\geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}p_{i,j}^{(k)}u^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}f_{ij}^{(r)}p_{j,j}^{(k-r)}u^k=\sum_{r=1}^{n}f_{ij}^{(r)}u^r\sum_{k=0}^{n-r}p_{j,j}^{(k)}u^k=\sum_{k=0}^{n-1}p_{j,j}^{(k)}u^k\sum_{r=1}^{n-k}f_{ij}^{(r)}u^r.$$

令

$$a_n=p_{jj}^{(n)}u^n,\quad b_n=\sum_{r=1}^{n}f_{ij}^{(r)}u^r.$$

那么$b_n \to F_{i,j}(u)$, 而且不论j是否常返引理2.4.3 的条件都成立. 由此可知定理2.4.7成立. □

♦**推论2.4.8.** 对任意$i,j\in S$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{i,j}^{(k)}$极限存在, 而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{i,j}^{(k)}=\begin{cases}f_{ij}/m_{jj}, & j\text{正常返},\\ 0, & j\text{为其他状态}.\end{cases}$$

证明 由定理2.4.2与定理2.4.7(令$u=1$)立刻可得. □

♠**注记2.4.9.** 对任意$i\in S$, 若j是非周期正常返的, 那么$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=f_{i,j}/m_{j,j}$; 若$j$是零常返的, 那么$\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=0$; 若$j$是非常返的, $\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=0$. 后一结论是定理7.5的推论, 前两结论我们将在第五章第二节给出解释和证明.

对任意$i,j\in S$, 令$P_{i,j}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}s^n$. 由定理2.4.7和(2.2.6)可得

♦**推论2.4.10.** 对任意$i,j\in S$, $u\in[0,1)$, $P_{i,j}(u)=F_{i,j}(u)/(1-F_{j,j}(u))$. 此外$u=1$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}=P_{i,j}(1)=\begin{cases}f_{i,j}/(1-f_{j,j}), & f_{j,j}<1;\\ 0, & f_{i,j}=0\text{且}f_{j,j}=1;\\ \infty, & f_{i,j}>0\text{且}f_{j,j}=1.\end{cases}$$

2.4.2 平稳分布

♣**定义2.4.11.** 称不恒为零的非负有限数列$\mathbf{u}=(u_i;\ i\in S)$ 为马氏链的不变测度, 若对任意$i\in S$

$$u_i=\sum_{k\in S}u_k p_{k,i}. \tag{2.4.2}$$

当$\sum_{i\in S}u_i=1$,即$(u_i;\ i\in S)$是概率分布时, 称$\mathbf{u}$是X的平稳分布.

显然, 若$\mathbf{u}$为X的不变测度, 对任意$n\geq 1$, 由C-K方程, $u_i=\sum_{k\in S}u_k p_{k,i}^{(n)}$. 这表明若$X$以平稳分布$(\pi_i,i\in S)$为初始分布, 那么$X$在每一个时刻的分布都与初始分布相同. 这也是我们称其为“平稳分布”的原因所在.

★**定理2.4.12.** 若$i\in S$为马氏链X的常返状态, 那么$\{e_{ij},j\in S\}$是一个不变测度, 其中$e_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}e_{ij}^{(n)}$. 进一步, 若$X$是不可约的常返链, 那么不计一个常数乘子, 不变测度唯一.

证明 由(2.2.4)可知, 对任意$i,j\in S$,

$$\begin{aligned}e_{ij}^{(1)}&=p_{ij}\\ e_{ij}^{(n+1)}&=\mathbb{P}_i(X_n=j,X_v\neq i,v=1,\cdots,n-1)\\ &=\sum_{k\neq i}\mathbb{P}_i(X_{n+1}=j,X_n=k,X_v\neq i,v=1,\cdots,n-1)\\ &=\sum_{k\neq i}e_{ik}^{(n)}p_{kj}\end{aligned}$$

两边相加得

$$\sum_{n=1}^{\infty}e_{ij}^{(n)}=\sum_{k\neq i}\sum_{n=1}^{\infty}e_{ik}^{(n)}p_{kj}+p_{ij},$$

在注意到$e_{ii}=f_{ii}=1$, 因此

$$e_{ij}=\sum_{k\neq i}e_{ik}p_{kj}+p_{ij}=\sum_{k\in S}e_{ik}p_{kj}.$$

另一方面, 对$j\in S$, 若$i\not\to j$, 由定义可知$e_{ij}=0$; 若$i\to j$, 则存在n使得$p_{ji}^{(n)}>0$. 由

$$1=e_{ii}=\sum_{k\in S}e_{ik}p_{ki}=\sum_{k\in S}e_{ik}p_{kj}^{(n)}\geq e_{ij}p_{ji}^{(n)}$$

可知$e_{ij}<1/p_{ji}^{(n)}<\infty$. 令$u_j=e_{ij}$, 则$\{u_j\}$为非负不全为零的有限数列且满足方程(2.4.2), 从而为X的不变测度.

进一步, 假设X是不可约常返链, 那么任取$i\in S$, $\{e_{ij},j\in S\}$为一个不变测度. 下设$\{u_j,j\in S\}$为任意不变测度. 对任意$i\in S$

$$u_i=\sum_{j\in S}u_jp_{ji}.$$

令$q_{ij}=u_jp_{ji}/u_i$, 那么$q_{ij}\geq 0$且

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=\sum_{j\in S}u_jp_{ji}/u_i=1,$$

$(q_{ij})_{i,j\in S}$为随机矩阵. 因此可以构造一个马氏链Y以其为转移概率矩阵. 由K-C方程可验证

$$\begin{aligned}q_{ij}^{(2)}&=\sum_{k\in S}q_{ik}q_{kj}=\sum_{k\in S}(u_kp_{ki}/u_i)(u_jp_{jk}/u_k)=u_jp_{ji}^{(2)}/u_i,\\ q_{ij}^{(n)}&=\sum_{k\in S}q_{ik}q_{kj}^{(n-1)}=u_jp_{ji}^{(n)}/u_i.\end{aligned}$$

因此由X不可约常返可知Y不可约常返. 而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}q_{ji}^{(k)}}{\sum_{k=0}^{n}q_{ii}^{(k)}}=\frac{u_i}{u_j}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}}{\sum_{k=0}^{n}p_{ii}^{(k)}}.$$

由(2.4.1)可知

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ii}^{(k)} \sum_{v=1}^{n-k} e_{ij}^{(v)}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{v=1}^{n} e_{ij}^{(v)} = e_{ij} < \infty$, 由引理2.4.3可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}}{\sum_{k=0}^{n} p_{ii}^{(k)}} = e_{ij}. \tag{2.4.3}$$

再由Y的常返性可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_{ji}^{(k)}}{\sum_{k=0}^{n} q_{ii}^{(k)}} = f_{ji}^{Y} = 1,$$

其中$f_{j,i}^{Y}$表示过程Y从j出发有限时间内回到i的概率. 由此可知$1 = u_i e_{ij}/u_j$, 即对任意$j \in S$

$$\frac{u_j}{e_{ij}} = \frac{u_i}{e_{ii}} = u_i.$$

所以$\{u_j, j \in S\}$与$\{e_{ij}, j \in S\}$成比例, 即除一个常数乘子外唯一. □

不是所有常返马氏链都有平稳分布. 不可约马氏链的平稳分布与回访周期相关.

★定理2.4.13. *设X为不可约马氏链, X是正常返的当且仅当X存在平稳分布$(\pi_i, i \in S)$. X的平稳分布唯一而且*

$$\pi_i = \frac{1}{m_{i,i}} > 0, \quad i \in S.$$

证明 先证前一个结论的必要性. 为此我们只需验证$\{1/m_{j,j}, j \in S\}$是平稳分布. 由C-K方程可知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{j,j}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in S} p_{j,i}^{(k-1)} p_{i,j} = \sum_{i\in S}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{j,i}^{(k-1)}\Big] p_{i,j}. \tag{2.4.4}$$

因为X是不可约正常返链, 对任意$i, j \in S$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{j,j}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{m_{j,j}} > 0.$$

令(2.4.4)式两边$n \to \infty$, 由控制收敛定理得：对任意$j \in S$,

$$\frac{1}{m_{j,j}} = \sum_{i\in S} \frac{p_{i,j}}{m_{i,i}}.$$

由此进一步可得

$$\frac{1}{m_{j,j}} = \sum_{i\in S} \frac{1}{m_{i,i}}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{i,j}^{(k)}\Big],$$

另一方面, 由Fatou引理可得

$$1 \geq \sum_{i\in S} \frac{1}{m_{i,i}},$$

因此再由控制收敛定理可知, $n \to \infty$时,

$$\frac{1}{m_{j,j}} = \sum_{i \in S} \frac{1}{m_{i,i} m_{j,j}}. \tag{2.4.5}$$

这表明$\sum\limits_{i \in S} 1/m_{i,i} = 1$, 因此$(1/m_{j,j}, j \in S)$为$X$ 的平稳分布.

再证前一个结论的充分性. 设$(\pi_j, j \in S)$是X的任一平稳分布. 对任意$j \in S$,

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{i,j} = \sum_{i \in S} \pi_i \Big[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{i,j}^{(k)} \Big]. \tag{2.4.6}$$

由推论2.4.8

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i \Big[\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{i,j}^{(k)} \Big] = \begin{cases} [\sum\limits_{i \in S} \pi_i f_{i,j}]/m_{j,j}, & j\text{正常返}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

另一方面, 由$\sum\limits_{j \in S} \pi_j = 1$可知存在$j_0 \in S$使得$\pi_{j_0} > 0$. 由于$j_0 \to j$, 存在$N$使得$p_{j_0,j}^{(N)} > 0$. 因此

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{i,j} = \sum_{i \in S} \pi_i p_{i,j}^{(N)} \geq \pi_{j_0} p_{j_0,j}^{(N)} > 0.$$

这说明j正常返状态, 又由于X是不可约的, 因此X是正常返链.

由于对任意$i, j \in S$, $f_{i,j} = 1$, 由(2.4.6)知$0 < \pi_j = 1/m_{j,j}$. 这表明平稳分布必唯一. 因此定理后一个结论也成立. □

对不可约的马氏链而言, 由定理2.4.13可知, 只有正常返链才有平稳分布, 这时我们可以选择这个平稳分布为初始分布使得对应的马氏链为严平稳过程. 更有意思的是:

★定理2.4.14. *若X是不可约正常返马氏链, 记其平稳分布为$\pi = (\pi_i, i \in S)$, 其中$\pi_i = 1/m_{ii}$. 那么对任意$i, j \in S$,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} p_{i,j}^{(k)} = \pi_j. \tag{2.4.7}$$

进一步, 对任意初始分布, 记作$\mu = (\mu_i, i \in S)$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k = j\}}\Big) = \pi_j.$$

证明 由于X是不可约常返的, 由性质2.2.21可知, 对任意$i, j \in S$, $f_{i,j} = 1$. 由推论2.4.8可知前半部分结论成立.

进一步, 设X的初始分布为$\mu = (\mu_i, i \in S)$, 那么

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k = j\}}\Big) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_k = j\}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in S} \mu_i p_{i,j}^{(k)}$$

$$= \sum_{i\in S} \mu_i \Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{i,j}^{(k)}\Big].$$

由于$\sum_{i\in S}\mu_i = 1$, 令$n\to\infty$, 由控制收敛可得定理后半部分结论. □

注意到$N_n(j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k=j\}}$表示过程$X$在时刻$n$之前(含$n$)到达状态$j$的次数, $N_n(j)/n$ 表示X在时刻n之前(含n)到达状态j比率, 而$\mathbb{E}(N_n(j)/n)$则表示到达状态j的平均比率. 因此定理2.4.14表明平稳分布还是马氏链在长时间内访问各状态的比率极限.

有限个状态不可约马氏链一定是正常返的(习题7.1), 我们可以借助线性方程组, 方便地找到它可能的平稳分布: 设X是有n个状态的马氏链, 转移概率矩阵$\mathbf{P} = (p_{i,j})$, 记其可能的平稳分布为

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)^T,$$

那么π 是下列方程组解

$$\begin{cases} p_{1,1}\pi_1 + p_{2,1}\pi_2 + \cdots + p_{n,1}\pi_n = \pi_1; \\ \cdots \\ p_{1,n-1}\pi_1 + p_{2,n-1}\pi_2 + \cdots + p_{n,n-1}\pi_n = \pi_{n-1}; \\ p_{1,n}\pi_1 + p_{2,n}\pi_2 + \cdots + p_{n,n}\pi_n = \pi_n; \\ \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1. \end{cases}$$

由于转移概率矩阵满足$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$, 因此前$n-1$个方程加到第$n$个方程会得到恒等式

$$\pi_1 + \cdots + \pi_n = \pi_1 + \cdots + \pi_n.$$

这意味着该方程组与把第n个方程去掉的方程组

$$\begin{cases} p_{1,1}\pi_1 + p_{2,1}\pi_2 + \cdots + p_{n,1}\pi_n = \pi_1; \\ \cdots \\ p_{1,n-1}\pi_1 + p_{2,n-1}\pi_2 + \cdots + p_{n,n-1}\pi_n = \pi_{n-1}; \\ \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1, \end{cases}$$

同解, 也即我们只须求解如下的矩阵方程

$$\mathbf{Q}^T\pi = \pi',$$

其中矩阵$\mathbf{Q}$是将转移概率矩阵$\mathbf{P}$最后一列替换为$(1, 1, \cdots, 1)^T$后所得到的矩阵, 而π' 是将π最后一个分量替换为1后所得向量.

▶**例2.4.15.** 设X的转移概率矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求$X$的平稳分布.

解 令$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 解方程组$\mathbf{Q}^T\pi=\pi'$, 即

$$\begin{cases} \pi_3=\pi_1; \\ \pi_1/2+3\pi_2/4=\pi_2; \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1; \end{cases}$$

可得唯一非负解$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(3/8,1/4,3/8)$. 此即为$X$的平稳分布. □

▶**例2.4.16.** 在研究人们消费习惯时常会调查人们对具有相同功能不同品牌的产品的消费情况. 假设有三个品牌的手机$1,2,3$, 令X_n表示消费者在第n 次购买时选择的品牌. 顾客购买这三个品牌后下次选择相同品牌的概率分别为$0.8, 0.6, 0.8$, 若他们改变品牌则会在另外两个品牌中随机挑选一个. 问顾客长期消费后在各个品牌上的平均消费比例?

解 容易看出$X=\{X_n\}$是一个转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

的时齐马氏链. X是不可约非周期的. 令

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 1 \\ 0.2 & 0.6 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解方程$\mathbf{Q}^T\pi=\pi'$, 即

$$\begin{cases} 0.8\pi_1+0.2\pi_2+0.1\pi_3=\pi_1, \\ 0.1\pi_1+0.6\pi_2+0.1\pi_3=\pi_2, \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1, \end{cases}$$

可得唯一非负解

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(2/5,1/5,2/5).$$

此即为顾客在长期消费当中各个品牌的消费比例. □

与定理2.4.14的后半部分证明一样, 由注2.4.9可得

★**定理2.4.17.** *若X是非周期不可约正常返的, 那么对任意初始分布$\mu=(\mu_i, i\in S)$, 随着$n\to\infty$, X_n的分布收敛到π, 即对任意$j\in S$, $\mathbb{P}(X_n=j)\to\pi_j$.*

►**例2.4.18.** (例*2.1.15*续) *问如果社会阶层的转换机制不改变, 长时间后社会阶层的比例是多少.*

解 由转移概率矩阵可知, 表示社会阶层变化的马氏链X是不可约非周期的. 令

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.1 & 1\\ 0.3 & 0.4 & 1\\ 0.05 & 0.1 & 1\end{pmatrix}.$$

解方程$\mathbf{Q}^T\pi=\pi'$, 即

$$\begin{cases}0.8\pi_1+0.3\pi_2+0.05\pi_3=\pi_1\\ 0.1\pi_1+0.4\pi_2+0.1\pi_3=\pi_2\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

得唯一非负解

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(12/35, 5/35, 18/35).$$

此即为长时间后社会阶层的比例. □

♠**注记2.4.19.** *通常称定理2.4.14为正常返马氏链的弱遍历性定理. 称非周期正常返状态为遍历状态, 称不可约非周期正常返马氏链为遍历马氏链.*

由定理2.4.13可知, 不可约链X的平稳分布中每一分量都为正数. 由此我们得到一个判别马氏链是否正常返的方法.

♦**推论2.4.20.** *不可约马氏链X是正常返的当且仅当方程组*

$$u_i=\sum_{k\in S}u_kp_{k,i}$$

存在一个全不为零的非负解$\{u_i;\ i\in S\}$使得$\sum\limits_{i\in S}u_i<\infty$.

证明 此时$\{u_i/\sum_{i\in S}u_i\}$为平稳分布, 从而推论成立. □

►**例2.4.21.** *讨论例2.3.7中带反射壁随机游动X的正常返性.*

解 由例2.3.7 可知X常返$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k} = \infty$. 记$\rho_k = \frac{q_1\cdots q_k}{p_1\cdots p_k}$. 解方程组

$$z_i = \sum_{k=0}^{\infty} z_k p_{k,i}, \quad i \geq 0.$$

由$r_0 + p_0 = 1$, $r_n + p_n + q_n = 1$, $n \geq 1$, 可得

$$\begin{cases} q_1 z_1 - p_0 z_0 = 0 \\ q_{n+1} z_{n+1} - p_n z_n = q_n z_n - p_{n-1} z_{n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

因此对任意$n \geq 0$, $q_{n+1} z_{n+1} = p_n z_n$, 继而

$$z_{n+1} = \frac{p_n \cdots p_0}{q_{n+1} \cdots q_1} z_0 = \frac{p_0}{p_{n+1}\rho_{n+1}} z_0.$$

由推论2.4.20, X正常返当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_i < \infty \Leftrightarrow z_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0}{p_n \rho_n} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n \rho_n} < \infty.$$

此即为X正常返的条件. □

练习题

7.1 证明任意不可约有限状态马氏链必是正常返的.

7.2 设马氏琏X存在状态j使得方程组

$$z_i = \sum_{k \neq j} p_{i,k} z_k + f_{ij}, \qquad i \neq j$$

的一组非负有限解$\{u_i, i \neq j\}$满足

$$\sum_{k \neq j} p_{j,k} u_k < \infty.$$

若j 是常返的, 证明j 是正常返的.

7.3 设X是一个不可约非常返的马氏链, 令$l_j = \sup\{n \geq 0, X_n = j, X_k \neq j, k > n\}$, 即$l_j$是$X$最后一次到达状态$j$的时间. 假定$X$ 从j 出发, 求l_j的分布列和均值.([提示] 均值为$m_{jj}/(1-f_{jj})$)

7.4 设X的转移概率矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$X$的平稳分布.

7.5 设X的转移概率满足：对任意$i, j \in S = \{0, 1, 2, \cdots\}$,

$$p_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i + (1-\lambda_i) u_i, & i = j, \\ (1-\lambda_i) u_j, & i \neq j, \end{cases}$$

其中$u_j>0$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_j=1$, $0<\lambda_i<1$. 证明

(1) X是常返的; (2) X正常返当且仅当$\sum\limits_{i=0}^{\infty}u_i/(1-\lambda_i)<\infty$.

7.6 证明不可约正常返马氏链的不变测度μ必是有限测度(即$\sum\limits_{i\in S}\mu(i)<\infty$).

7.7 设X为不可约正常返马氏链, 证明对任意$i,j\in S$, $\pi_j=\pi_i e_{ij}$, 其中$\{\pi_i; i\in S\}$为X的平稳分布, $e_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_{ij}^{(n)}$.

7.8* 设不可约正常返马氏链X的转移概率矩阵为$(p_{i,j})_{i,j\in S}$, $\pi=\{\pi_i\}_{i\in S}$为平稳分布. 令$Y_n=(X_n,X_{n+1})$. 证明$Y=\{Y_n,n\geq 0\}$ 是状态空间为$\mathcal{M}=\{(i,j),i,j\in S,p_{i,j}>0\}$ 的不可约正常返马氏链, 平稳分布为$\{\pi_i p_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathcal{M}}$.

7.9* 证明不可约链X正常返的充要条件是存在非负数列$\{z_i;\ i\in S\}$及一个状态(或任一状态)j使得

$$\begin{cases}\sum\limits_{k\in S}p_{i,k}z_k\leq z_i-1, \quad i\neq j,\\ \sum\limits_{k\in S}p_{j,k}z_k<\infty.\end{cases} \tag{2.4.8}$$

2.5　强遍历性定理

上一节的弱遍历性定理给我们研究问题带来很大方便, 但有时弱遍历性定理的结论还不够用. 这一节我们将把定理结论从期望收敛加强到几乎处处收敛, 并通过例子说明强化结论后的应用.

2.5.1　主要结论

我们可以把上一节的弱遍历性定理结论加强为如下一般形式.

★定理2.5.1. 记不可约马氏链$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$的平稳分布为$\pi=\{\pi_i;\ i\in S\}$. 若S上函数g满足$\sum_{j\in S}|g(j)|\pi_j<\infty$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(X_k)=\sum_{j\in S}g(j)\pi_j:=\mathbb{E}_\pi(g),\qquad a.s.$$

证明 由于$g=g^+-g^-=g\vee 0-(-g)\vee 0$. 不妨设$g$非负. 定义$\tau_i(0)=0$,

$$\tau_i(k)=\inf\{n>\tau_i(k-1),X_n=i\},\quad W_i(k)=\tau_i(k)-\tau_i(k-1),\quad k\geq 1.$$

由定理2.2.27易知$\{W_i(k),k\geq 2\}$为i.i.d序列, 且$\mathbb{E}(W_i(2))=m_{i,i}<\infty$. 由强大数定律

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}W_i(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tau_i(n)=m_{i,i},\qquad a.s.$$

再令

$$Y_k=\sum_{n=\tau_i(k)+1}^{\tau_i(k+1)}g(X_m).$$

仍由定理2.2.27可知$Y_k,k\geq 1$, 为独立同分布随机变量. 注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1)&=\mathbb{E}\Big(\sum_{m=\tau_i(k)+1}^{\tau_i(k+1)}g(X_m)\Big)=\mathbb{E}_i\Big(\sum_{m=1}^{\tau_i(1)}g(X_m)\Big)=\mathbb{E}_i\Big(\sum_{m=1}^{\tau_i}g(X_m)\Big)\\&=g(i)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_i(\tau_i=n)\mathbb{E}_i\Big(\sum_{m=1}^{n-1}g(X_m)|\tau_i=n\Big)\\&=g(i)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_i(\tau_i=n)\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j\neq i}g(j)\mathbb{P}_i(X_m=j|\tau_i=n)\\&=g(i)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j\neq i}g(j)\mathbb{P}_i(X_m=j,\tau_i=n).\end{aligned}$$

由于是非负项求和, 我们可以交换n,m的求和次序, 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1) &= g(i) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j\neq i} g(j)\mathbb{P}_i(X_m = j, \tau_i \geq m+1)\\ &= g(i) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j\neq i} g(j)e_{i,j}^{(m)} = g(i) + \sum_{j\neq i} g(j)e_{i,j}.\end{aligned}$$

由定理2.4.12和定理2.4.13可知

$$\mathbb{E}(Y_1) = \sum_{j\in S} g(j)\pi_j/\pi_i = m_{i,i}\mathbb{E}_\pi(g) < \infty.$$

由强大数定律

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Y_k = m_{i,i}\mathbb{E}_\pi(g), \qquad a.s. \tag{2.5.1}$$

又由于i常返, 由命题2.2.26可知

$$N_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_k=i\}} \to \infty, \qquad \text{a.s.}$$

因此

$$\tau_i(N_n)/N_n \to m_{ii} \quad a.s. \ \text{以及} \ \frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n} Y_k = m_{ii}\mathbb{E}_\pi(g), \quad a.s.$$

注意到

$$\tau_i(N_n) \leq n \leq \tau_i(N_n+1).$$

由

$$\frac{\tau_i(N_n)}{N_n} \leq \frac{n}{N_n} < \frac{\tau_i(N_n+1)}{N_n},$$

以及

$$\sum_{k=0}^{N_n-1} Y_k = \sum_{m=1}^{\tau_i(N_n)} g(X_m) \leq \sum_{m=1}^{n} g(X_m) \leq \sum_{m=1}^{\tau_i(N_n+1)} g(X_m) = \sum_{k=1}^{N_n} Y_k,$$

进而

$$\frac{N_n-1}{n}\Big[\frac{1}{N_n-1}\sum_{k=0}^{N_n-1} Y_k\Big] \leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g(X_m) \leq \frac{N_n}{n}\Big[\frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n} Y_k\Big],$$

可知结论成立. □

由定理2.5.1直接可得

♦**推论2.5.2.** 设不可约马氏链$X = \{X_n;\ n \geq 0\}$的平稳分布为$\pi = \{\pi_i;\ i \in S\}$. 那么对任意$j \in S$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_k=j\}} = \pi_j, \qquad a.s.$$

♠**注记2.5.3.** 对照定理*2.4.14*和推论*2.5.2*, 我们把(到达状态j的)时间比率的期望

收敛变成了比率本身的收敛. 更具体的说我们把比率在所有随机过程实现下的平均收敛到平稳分布, 变成对几乎每个随机过程的实现比率都收敛到平稳分布. 通常我们称定理2.5.1或推论2.5.2为强遍历性定理.

由定理2.5.1还可得如下推论.

♦**推论2.5.4.** *设不可约马氏链$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$的平稳分布为$\pi=\{\pi_i;\ i\in S\}$. 若g为非负函数, 那么*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(X_k)=\sum_{i\in S}g(i)\pi_i,\quad a.s.$$

证明 若$\sum_{i\in S}g(i)\pi_i<\infty$, 推论2.5.4就是定理2.5.1 的直接应用. 若$\sum_{i\in S}g(i)\pi_i=\infty$, 那么对任意$N$, 定义函数$g_N$使得$g_N(i)=g(i)\wedge N$. 应用定理2.5.1 得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(X_k)&\geq\limsup_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g_N(X_k)\\&=\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_\pi g_N=\sum_{i\in S}g(i)\pi_i=\infty.\end{aligned}$$

因此推论2.5.4成立. □

2.5.2 强遍历性定理的应用

►**例2.5.5.** *考虑例2.1.6中的(k,K)商品存储模型X，其中$K=3$, 表示需求的随机变量ξ满足*

$$\mathbb{P}(\xi=0)=0.3,\mathbb{P}(\xi=1)=0.4,\mathbb{P}(\xi=2)=0.2,\mathbb{P}(\xi=3)=0.1$$

若每销售一件商品可以获利12元，每件商品存储一个单位时间需花费2元，试确定最优的k使得从长期看平均收益最大.

解 为方便, 记

$$p_0=0.3,\ p_1=0.4,\ p_2=0.2,\ p_3=0.1.$$

一旦确定进货策略$k\in\{0,1,2\}$, 那么根据进货策略，X的转移概率矩阵与k 有关: $\mathbf{P}=({}_kp_{i,j})_{4\times 4}$, 其中

$${}_kp_{i,j}=\begin{cases}\mathbb{P}((3-\xi)\vee 0=j)=\mathbb{P}(\xi=3-j)=p_{3-j}, & i\leq k,\\ \mathbb{P}((i-\xi)\vee 0=j)=p_{i-j}, & k<i\leq 3, 0<j\leq i\\ \mathbb{P}((i-\xi)\vee 0=j)=p_i+\cdots+p_3, & k<i\leq 3, j=0\\ \mathbb{P}((i-\xi)\vee 0=j)=0, & k<i\leq 3, i<j\leq 3.\end{cases}$$

而且在任意第n个单位时间获得的净利润$r_n^{(k)}$为

$$r_n^{(k)} = \begin{cases} 12(3-X_n) - 2X_n = 36 - 14X_n, & X_{n-1} \le k, \\ 12(X_{n-1}-X_n) - 2X_n = 12X_{n-1} - 14X_n, & k < X_{n-1} \le 3. \end{cases}$$

记做$r_n^{(k)} = g^{(k)}(X_{n-1}, X_n)$. 显然无论$k$取何值, X都是有限状态不可约马氏链, 从而正常返，记其平稳分布为

$$\pi = (\pi_0^{(k)}, \pi_1^{(k)}, \pi_2^{(k)}, \pi_3^{(k)}).$$

由习题7.8及定理2.5.1可知平均利润

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(k)}(X_{m-1}, X_m) \to \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} g^{(k)}(i,j)\pi_i^{(k)}{}_k p_{i,j}.$$

显然最后的极限就是采取(k,K)-存储策略的长期平均收益; 将其记作$r(k)$. 解决例3.1.2的关键就是找到使$r(\cdot)$取到最大值的k, 为此我们需要知道${}_k p_{i,j}$, $\pi_i^{(k)}$.

利用$g^{(k)}(i,j)$和${}_k p_{i,j}$的表达式, $r(k)$可简化为

$$\begin{aligned} r(k) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{3}(36-14j)\pi_i^{(k)} p_{3-j} + \sum_{i=k+1}^{3}\sum_{j=0}^{3}(12i-14j)\pi_i^{(k)}{}_k p_{i,j}, \\ &= 9.4\sum_{i=0}^{k}\pi_i^{(k)} + 12\sum_{i=k+1}^{3} i\pi_i^{(k)} - 14\sum_{i=k+1}^{3}\Big(\pi_i^{(k)}\sum_{j=1}^{i} j p_{i-j}\Big). \end{aligned}$$

当$k=2$时直接计算可知,

$$r(2) = 9.4\sum_{i=0}^{2}\pi_i^{(2)} + 36\pi_3^{(2)} - 14\pi_3\sum_{j=1}^{3} j p_{3-j} = 9.4\sum_{i=0}^{3}\pi_i^{(2)} = 9.4.$$

当$k=1$时由

$$(p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

可求得平稳分布

$$\pi = (19/110, 30/110, 40/110, 21/110).$$

此时平均收益极限

$$\begin{aligned} r(1) &= 9.4(\pi_0+\pi_1) + 12(2\pi_2+3\pi_3) - 14(\pi_2+1.9\pi_3) \\ &= 9.4 + 0.6\pi_2 \approx 9.62. \end{aligned}$$

当$k=0$时由

$$(p_{i,j})=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

可求得平稳分布

$$\pi=(343/1070, 300/1070, 280/1070, 147/1070).$$

此时平均收益极限

$$\begin{aligned} r(0) &= 9.4\pi_0+12(\pi_1+2\pi_2+3\pi_3)-14(0.3\pi_1+\pi_2+1.9\pi_3) \\ &= 9.4-1.6\pi_1+0.6\pi_2 \approx 9.11. \end{aligned}$$

因此$(1,3)$策略是长期平均利润准则下的最优策略.

►**例2.5.6.** *考虑例2.1.17中的排队模型$X=\{X_n, n\geq 0\}$, 并假设*

$$0<p_0,\ p_0+p_1<1,\ \rho=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\mathbb{E}(\xi_1)<1.$$

求

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k, \qquad\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_k=0\}}.$$

解 由习题8.4可知给定条件下排队模型X是不可约正常返的马氏链. 记其平稳分布为$\pi=\{\pi_k, k\geq 0\}$. 令

$$A(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k, \qquad \pi(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_ks^k.$$

那么由

$$\pi_i=\sum_{k\in S}\pi_kp_{k,i}=\pi_0p_i+\sum_{k=1}^{i+1}\pi_kp_{i+1-k},$$

可知对任意$0<s<1$,

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \sum_{i\geq 0}\pi_is^i=\pi_0\sum_{i\geq 0}p_is^i+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\pi_kp_ms^{m+k-1} \\ &= \pi_0A(s)+\frac{1}{s}(\pi(s)-\pi_0)A(s). \end{aligned}$$

由此可得

$$\pi(s)=\frac{\pi_0(s-1)A(s)}{s-A(s)}, \tag{2.5.2}$$

以及

$$\frac{A(s)-1}{s-1}=1-\pi_0\frac{A(s)}{\pi(s)}.$$

令$s\to 1-$得

$$\rho=A'(1)=1-\pi_0.$$

因此由推论2.5.2可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_k=0\}}=\pi_0=1-\rho.$$

另一方面将$\pi_0=1-\rho$代入(2.5.2)可得

$$\pi(s)=(1-\rho)\frac{(1-s)A(s)}{s-A(s)},$$

从而

$$\pi'(s)=(1-\rho)\Big\{\frac{(s-1)A'(s)}{s-A(s)}+\frac{A(s)[s-A(s)-(1-A'(s))(s-1)]}{(s-A(s))^2}\Big\}.$$

若要求

$$A''(1-)=\mathbb{E}(\xi_1^2)-\mathbb{E}(\xi_1)<\infty,$$

那么由$s\to 1$时$s-A(s)\sim(1-\rho)(s-1)$以及推论2.5.4可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\pi'(1-)=\rho+\frac{A''(1-)}{2(1-\rho)}.\qquad\square$$

♠**注记2.5.7.** 例*2.5.6*与观察服务系统中的某个窗口问平均会有多少人在排队、窗口空闲的时间占多大比例等实际问题密切相关. 数学上要回答这样的问题, 需要一些模型假设. 比如只考虑一个窗口, 设顾客到达服从强度为λ 的泊松过程, 顾客到达后按“先来先服务”的原则接受服务台的服务, 假设为每个顾客服务的时间服从相同分布G并且相互独立, 而且与顾客到达的时间间隔也独立. (称满足这些假定的服务系统为$M(\lambda)/G/1$ 系统.) 为了简单, 假设服务时间服从密度函数为g 的连续分布. 以X_n表示第n个顾客服务完毕离开时, 在窗口等待服务的顾客数, 初始时刻取为第一个顾客到达时刻, 即$X_0=1$. 那么可验证$X=\{X_n;\ n\geq 0\}$为例*2.1.17*中马氏链. 事实上以U_n 表示第n个顾客接受服务的时长, ξ_n 表示在第n 个顾客接受服务期间到达的顾客数, 由指数分布无记忆性可知$\{\xi_n;\ n\geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量, 分布列为

$$p_k=\mathbb{P}(\xi_n=k)=\mathbb{E}(\mathbb{P}(\xi_n=k|U_n))=\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}g(t)\mathrm{d}t,$$

而且

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} - 1 + \xi_n, & X_{n-1} > 0, \\ \xi_n, & X_{n-1} = 0. \end{cases}$$

一般地, 我们称X为排队系统的嵌入链. 显然例2.5.6就是所关心问题在嵌入链X上的体现.

▶**例2.5.8.** 观察一个动态变化的随机系统$X = \{X_n, n \geq 0\}$ 得到一组观察数据$(x_n, 0 \leq n \leq N)$. 若已知该随机动态系统构成状态空间$S = \{0, 1\}$的两状态时齐马氏链, 转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

其中$0 < p, q < 1$未知. 试给出p, q的极大似然估计量并验证该统计量的相合性. (记样本观察值$x_0, \cdots, x_N$中依次相邻地取值为$00, 01, 10, 11$ 的个数为$N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11}$).

解 (1) 由马氏链的有限维分布计算可知随机变量$X_0, \cdots, X_N$ 取值为$x_0, \cdots, x_N$的概率为

$$\begin{aligned} p(x_0, \cdots, x_N) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \cdots, X_N = x_N) = \mu_{x_0} \prod_{k=1}^{N} p_{x_{k-1}, x_k} \\ &= \mu_{X_0} p^{N_{0,0}} (1-p)^{N_{0,1}} (1-q)^{N_{1,0}} q^{N_{1,1}}. \end{aligned}$$

由此可得对数似然函数

$$L(x_0, \cdots, x_N) = N_{0,0} \ln p + N_{0,1} \ln(1-p) + N_{1,1} \ln q + N_{1,0} \ln(1-q).$$

由极大似然估计典型方法可得p, q的极大似然估计为

$$\hat{p}_{MLE} = \frac{N_{00}}{N_{00} + N_{01}}, \qquad \hat{q}_{MLE} = \frac{N_{11}}{N_{10} + N_{11}}.$$

(2) 对任意$n \geq 0$ 令$Y_n = (X_n, X_{n+1})$. 由习题7.8可知$Y = \{Y_n, n \geq 0\}$ 是状态为$\{(i,j) : i, j = 0, 1\}$的不可约正常返马氏链, 平稳分布

$$(\pi_{0,0}, \pi_{0,1}, \pi_{1,0}, \pi_{1,1}) = (\pi_0 p, \pi_0(1-p), \pi_1(1-q), \pi_1 q),$$

其中(π_0, π_1)为X的平稳分布. 由推论2.5.2可知

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_{0,0}}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{Y_k = (0,0)\}} = \pi_{0,0} = \pi_0 p, \qquad a.s.$$

以及

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_{0,0} + N_{0,1}}{N} = \lim_{N \to \infty} \Big[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{Y_k = (0,0)\}} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{Y_k = (0,1)\}} \Big]$$

$$= \pi_{0,0} + \pi_{0,1} = \pi_0 p + \pi_0(1-p) = \pi_0, \qquad a.s.$$

因此由几乎必然收敛的运算性质

$$\lim_{N\to\infty} \hat{p}_{MLE} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{0,0}}{N_{0,0}+N_{0,1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{0,0}/N}{(N_{0,0}+N_{0,1})/N} = \frac{\pi_0 p}{\pi_0} = p, \qquad a.s.$$

所以$\hat{p}_{MLE}$为p的相合估计. 类似证明可知$\hat{q}_{MLE}$也是q的相合估计. □

练习题

8.1 在例2.5.5中若令$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0.25$, 其他条件不变, 求最佳策略$(k, 3)$.

8.2 对$M(\lambda)/G/1$嵌入链X, 若服务台的服务时间G服从参数为μ的指数分布且$\lambda < \mu$. 求长时间的平均队长和窗口无人的时间比例.

8.3* 设X是状态空间$S = \{0, 1\}$的两状态时齐马氏链, 转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$0 \le p < 1$未知. 试利用观察值$x_0, \cdots, x_N$中状态0出现的次数N_0给出p的一个相合估计.

8.4* 利用习题7.9证明例题2.5.6中的排队模型X是不可约正常返的.

第三章　马氏链的一些简单应用

马氏链在实际问题中有着广泛应用. 这一章我们介绍一些与应用有关的具体马氏链模型及相关理论，解决一些应用问题.

3.1　可逆马氏链与蒙特卡罗模拟

一个用马氏链描述的动态系统, 常需讨论它在长时间后的稳定表现. 由前面理论可知, 这个稳定表现体现为平稳分布. 一般地，平稳分布可以通过求解一个线性方程组得到, 只是计算量会比较大. 在实际中有需多问题满足一种平衡性条件, 对于满足这种条件的马氏链, 可以简便地求出其平稳分布. 在本节中, 我们将给出这方面的理论和应用.

3.1.1　可逆马氏链

♣**定义3.1.1.** *以$\mathbf{P}=(p_{i,j})_{i,j\in S}$ 为转移矩阵的马氏链X, 称为可逆的, 如果存在概率分布$\mu=\{\mu_i: i\in S\}$使得对任意$i,j\in S$,*

$$\mu_i p_{i,j}=\mu_j p_{j,i}. \tag{3.1.1}$$

μ称为X的可逆初分布, 简称可逆分布. 物理学中称(3.1.1)为细致平衡条件.

由此定义可,

$$\sum_i \mu_i p_{i,j}=\sum_i \mu_j p_{j,i}=\mu_j.$$

即μ是X的平稳分布. 这表明若X是可逆不可约链, 那么它的可逆分布唯一而且平稳分布可以利用方程(3.1.1)求出.

▶**例3.1.2.** *考察状态$S=\{0,1,\cdots,M\}$, 转移概率为*

$$0<p_{i,i+1}=\alpha_i=1-p_{i,i-1}<1, i=1,\cdots,M-1,$$

$$0<p_{0,1}=\alpha_0=1-p_{0,0}\le 1,\quad 0\le p_{M,M}=\alpha_M=1-p_{M,M-1}<1,$$

的马氏链X, 求X的平稳分布.

解 容易看出X是不可约的. 对任意$M > i \geq 0$,

$$\nu_i p_{i,i+1} = \nu_{i+1} p_{i+1,i},$$

即对任意$M > i \geq 0$

$$\nu_i \alpha_i = \nu_{i+1}(1 - \alpha_{i+1}).$$

由此可得, 对任意$M > i \geq 0$, $\nu_{i+1} = \prod_{k=1}^{i+1} \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha_k} \nu_0$. 再令$\sum\limits_{i=0}^{M} \nu_i = 1$可得

$$\nu_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{M} \prod_{k=1}^{i} \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha_k}}.$$

此时$\nu = (\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_M)$为$X$的可逆分布, 进而也是$X$的平稳分布. □

▲**命题3.1.3.** *记可逆不可约马氏链X的可逆分布为$\mu = \{\mu_i : i \in S\}$. 那么对任意$i \in S$, $\mu_i > 0$, 而且对任意$j \in S$, $p_{i,j} = 0$ 当且仅当$p_{j,i} = 0$.*

证明 由(3.1.1)以及数学归纳法容易证明对任意$n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mu_i p_{i,j}^{(n)} &= \mu_i \sum_{k \in S} p_{i,k} p_{k,j}^{(n-1)} = \sum_{k \in S} \mu_i p_{i,k} p_{k,j}^{(n-1)} \\
&= \sum_{k \in S} \mu_k p_{k,i} p_{k,j}^{(n-1)} = \sum_{k \in S} \mu_k p_{k,j}^{(n-1)} p_{k,i} \\
&= \sum_{k \in S} \mu_j p_{j,k}^{(n-1)} p_{k,i} = \mu_j p_{j,i}^{(n)}.
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

由于μ为分布以及X不可约, 存在$i_0 \in S$使得$\mu_{i_0} > 0$ 以及对任意$i_0 \neq i \in S$, 存在$n \geq 0$使得$p_{i_0,i}^{(n)} > 0$. 将其代入上式可知

$$\mu_i p_{i,i_0}^{(n)} > 0.$$

这表明$\mu_i > 0$. 再由(3.1.1)可知对任意$j \in S$, $p_{i,j} = 0$当且仅当$p_{j,i} = 0$. □

由定理2.4.13可知可逆不可约马氏链一定是正常返的; 反之不真.

一般地, 对于可逆不可约马氏链而言, 任取$i_0 \in S$, 对任意$j \in S$, 存在一条路径使得$i_0 \to j$. 不妨设该路径为

$$i_0 \hookrightarrow i_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow i_n \hookrightarrow j,$$

这里$\hookrightarrow$表示"一步可达", 那么

$$p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_n,j} > 0$$

此时由命题3.1.3可知

$$p_{j,i_n} \cdots p_{i_2,i_1} p_{i_1,i_0} > 0.$$

在利用(3.1.1)可得, 对可逆分布$\mu=\{\mu_i, i\in S\}$,

$$\begin{aligned}\mu_{i_0}p_{i_0,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_n,j}&=\mu_{i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_n,j}p_{i_1,i_0}\\&=\mu_{i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_n,j}p_{i_2,i_1}p_{i_1,i_0}\\&=\cdots=\mu_j p_{j,i_n}\cdots p_{i_2,i_1}p_{i_1,i_0}.\end{aligned}$$

记

$$v(i_0,j)=\frac{p_{i_0,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_n,j}}{p_{j,i_n}\cdots p_{i_2,i_1}p_{i_1,i_0}}\in(0,\infty),$$

那么$v(i_0,i_0)=1$且对任意$j\in S$, $\mu_j=\mu_{i_0}v(i_0,j)$. 由

$$1=\sum_{j\in S}\mu_j=\sum_{j\in S}v(i_0,j)\mu_{i_0}$$

可知对任意$j\in S$

$$\mu_j=\frac{v(i_0,j)}{\sum_{j\in S}v(i_0,j)}. \tag{3.1.3}$$

下面定理为我们判断不可约正常返链是否可逆提供了一个更直观的方法.

★定理3.1.4. 对于只要$p_{i,j}=0$就有$p_{j,i}=0$的不可约正常返马氏链X, 它是可逆马氏链的充要条件是从它任意一状态出发回到该状态的路径与它的反向路径有相同的概率. 即对于一切状态$i,i_1,i_2,\cdots,i_n$有

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_n,i}=p_{i,i_n}p_{i_n,i_{n-1}}\cdots p_{i_1,i}. \tag{3.1.4}$$

证明 前面分析已给出了必要性, 下证充分性. 任取$i,j\in S$使得$i\neq j$且$p_{i,j}>0$. 对任意$n\geq 1$, 由(3.1.4) 可知,

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}p_{j,i}=p_{i,j}p_{j,i_{n-1}}\cdots p_{i_2,i_1}p_{i_1,i}.$$

关于所有$i_1,\cdots,i_{n-1}$求和得

$$p_{i,j}^{(n)}p_{j,i}=p_{i,j}p_{j,i}^{(n)}.$$

进一步关于n求和并求平均得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}p_{i,j}^{(n)}p_{j,i}=p_{i,j}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}p_{j,i}^{(n)}.$$

由于X不可约且正常返, 由推论2.4.8以及定理2.4.13可知

$$\pi_j p_{j,i}=\pi_i p_{i,j},$$

其中$\pi=\{\pi_i, i\in S\}$是X的平稳分布. 因此X可逆. □

★定理3.1.5. 任取一个离散分布π,记其所有取值概率为正的点构成的集合为S, 即$\pi=\{\pi_i, i\in S\}$, 其中$\pi_i>0$且$\sum_{i\in S}\pi_i=1$. 一定存在S上的可逆不可约马氏

链X, 使得π是X的平稳分布.

证明 任取一个S上不可约的马氏链Y使其转移概率矩阵为$\mathbf{Q}=(q_{i,j})_{i,j\in S}$满足

$$q_{i,j}=0\Leftrightarrow q_{j,i}=0.$$

对任意$i\neq j\in S$, 令

$$\alpha_{i,j}=\min\{\frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i q_{i,j}},1\},\qquad p_{i,j}=q_{i,j}\alpha_{i,j},$$

以及

$$p_{i,i}=q_{i,i}+\sum_{j\neq i}q_{i,j}(1-\alpha_{i,j}).$$

容易检验$\mathbf{P}=(p_{i,j})_{i,j\in S}$是个随机矩阵而且由构造可知对任意$i\neq j$,

$$p_{i,j}>0\Leftrightarrow q_{i,j}>0.$$

因此由Y的不可约性可知, 以$\mathbf{P}$为转移概率矩阵的马氏链X也是不可约的. 进一步, 对任意$i\neq j$, 由

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_i q_{i,j}\alpha_{i,j}$$

可知, 若$\alpha_{i,j}<1$, 则$\alpha_{j,i}=1$ 且

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_j q_{j,i}=\pi_j q_{j,i}\alpha_{j,i}=\pi_j p_{j,i},$$

而$\alpha_{i,j}=1$时, 若$\pi_i q_{i,j}=\pi_j q_{j,i}$ 则$\alpha_{j,i}=1$,且

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_i q_{i,j}=\pi_j q_{j,i}=\pi_j q_{j,i};$$

若$\pi_i q_{i,j}>\pi_j q_{j,i}$ 则$\alpha_{j,i}<1$,且

$$\pi_i p_{i,j}=\pi_i q_{i,j}=\pi_j q_{j,i}\alpha(j,i)=\pi_j q_{j,i}.$$

总之, 此时π为X的可逆分布, 从而为X的平稳分布. □

♠**注记3.1.6.** *若对不可约马氏链Y还要求存在某个i使得$p_{i,i}>0$, 那么X还是非周期的, 从而由定理7.9可知π还是X的极限分布, 即X_n 的分布收敛到π.*

♠**注记3.1.7.** *通常称定理9.3证明中采用的构造转移矩阵$\mathbf{P}$进而得到可逆马氏链的方法为Hastings-Metropolis算法, 称转移矩阵$\mathbf{Q}=(q_{i,j})_{i,j\in S}$ 为预选矩阵.*

3.1.2 马氏链蒙特卡罗(MCMC)方法*

在复杂的统计问题中,许多统计量很难直接进行理论分析或计算, 需要借助随机模拟完成. 比如, 当我们直接计算诸如$\mathbb{E}(h(X))$这样的算式有困难时, 一种自

然的方法是借助大数定律, 通过生成一列与X同分布的随机数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 然后用$\sum_{i=1}^n h(x_i)/n$近似. 但当生成X的随机数有困难时, 这种方案实现起来就有一定难度. 马氏链蒙特卡罗(MCMC)方法是能解决这类问题的一种随机模拟方法. 该方法的主要思想是将特定分布设计成某个马氏链的平稳分布, 基于马氏链的极限定理(定理2.4.17)和遍历性定理(定理2.4.14, 2.5.1和推论2.5.2), 通过模拟马氏链的轨道(实现), 近似生成特定分布的随机数或估计所需要的各种统计量. 下面我们结合两种典型采样方法简单介绍MCMC方法.

(A) Metropolis采样

Metropolis采样就是基于Hastings-Metropolis算法生成一个可逆马氏链样本轨道的抽样方法. 由定理3.1.5, 要模拟这样的马氏链, 关键是模拟转移机制$(p_{i,j})$, 也即在给定$X_n = i$的条件下, 模拟分布列$\{p_{i,j}, j = 1, 2, \cdots\}$. 注意到$j \neq i$时$p_{i,j} = q_{i,j}\alpha_{i,j}$. 设$Y$服从分布列$(q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots)$, $Z \sim U[0,1]$且与Y独立. 令

$$W = \begin{cases} Y, & Z \leq \alpha_{i,Y}; \\ i, & \text{其它}, \end{cases}$$

那么$j \neq i$时

$$\mathbb{P}(W = j) = \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(Z \leq \alpha_{i,j}) = q_{i,j}\alpha_{i,j} = p_{i,j},$$

而$\mathbb{P}(W = i) = 1 - \sum_{j \neq i} p_{i,j} = p_{i,i}$. 即$W$是服从分布列$(p_{i,1}, p_{i,2}, \cdots)$的随机变量. 因此可用如下算法实现模拟转移机制$(p_{i,j})$.

(s1) 设当前时刻$X_n = i$.

(s2) 产生一个分布列为$(q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots)$的随机数, 假设为$j$;

(s3) 计算$\alpha_{i,j}$;

(s4) 独立地取一个服从$[0,1]$上均匀分布的随机数u, 如果$u \leq \alpha_{i,j}$, 则将状态更新为$X_{n+1} = j$并回到(s1), 否则状态不更新,即令$X_{n+1} = i$, 并回到(s1).

考虑到$\alpha_{i,j} = \frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i q_{i,j}} \wedge 1$, 我们可以将上述算法中(s3),(s4)两步优化为

(s3) 若$\frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i q_{i,j}} \geq 1$, 则将状态更新为$X_{n+1} = j$并回到(s1); 否则进行(s4);

(s4) 独立地取一个服从$[0,1]$上均匀分布的随机数u, 如果$u \leq \frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i q_{i,j}}$, 则将状态更新为$X_{n+1} = j$并回到(s1), 否则状态不更新,即令$X_{n+1} = i$, 并回到(s1).

▶**例3.1.8.** 将所有n级排列所组成的集合$\mathfrak{F}$看作一个样本空间, 在$\mathfrak{F}$上可以定义一种离散分布π使得对任意$v \in \mathfrak{F}$, $\pi_v = cT(v)$, 其中$T(v)$表示排列v中数n的位置,

$c=(n+1)!/2$为所有$T(v)$ 的和. 比如$n=3$时, 将*3*级排列依次记作

$$v_1=123;\ v_2=213;\ v_3=231;\ v_4=132;\ v_5=312;\ v_6=321.$$

此时$\mathfrak{F}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, 而且

$$T(v_1)=3;\ T(v_2)=3;\ T(v_3)=2;\ T(v_4)=2;\ T(v_5)=1;\ T(v_6)=1.$$

直接计算可知$c=12$, 离散分布π为

$$\pi_1=T(v_1)/12=1/4;\ \pi_2=T(v_2)/12=1/4;\ \pi_3=T(v_3)/12=1/6;$$

$$\pi_4=T(v_4)/12=1/6;\ \pi_5=T(v_5)/12=1/12;\pi_6=T(v_6)/12=1/12.$$

试用*Metropolis*采样法生成$\mathbf{n=50}$时分布π的一个样本.

算法设计: 为了利用Metropolis采样法, 我们需要设计一个预选矩阵, 为此对任意一个50级排列$v\in\mathfrak{F}$, 令

$$N(v)=\{u\in S,u\text{可由}v\text{最多经过一次相邻对换得到}\}.$$

对任意v,u, 令

$$q_{v,u}=\begin{cases}0, & u\notin N(v)\\ 1/|N(v)|=1/50, & u\in N(v),\end{cases}$$

其中$|N(v)|$表示集合$N(v)$中的元素个数. 由于任意两个不同的50级排列总可通过相邻对换相互转换, 因此可以验证以$(q_{v,u})$为转移概率矩阵的马氏链是不可约的, 而且

$$q(v,u)=0\Leftrightarrow q(u,v)=0.$$

由于要得到的分布π 满足对任意$v\in\mathfrak{F}$, $\pi_v=cT(v)$, 其中c为常数. 因此

$$\alpha(v,u)=\min\left(\frac{\pi_u q_{u,v}}{\pi_v q_{v,u}},1\right)=\min\left(\frac{T(u)}{T(v)},1\right).$$

注意到$q_{v,v}>0$, 由Hastings-Metropolis算法得到的马氏链X是不可约非周期可逆马氏链, π是X的极限分布.

下面我们用Metropolis采样法模拟马氏链X在一个样本轨道下的序列$\{X_k\}$, 当 k 足够大时, X_k的值就是π的一个近似取样. 基本模拟流程如下

(s1) 给X_0任意赋予一个50级排列.

(s2) 设当前时刻$X_k=v$, v表示一个n级排列.

(s3) 产生一个在0到49整数点上均匀分布的随机数, 假设为j, 令u表示对换v中第j 和$j+1$位置上的数所得到的排列, 当$j=0$时$u=v$;

(s4) 若$\frac{T(u)}{T(v)}\geq 1$, 则将状态更新为$X_{k+1}=u$并回到(s2); 否则进行(s5);

(s5) 独立地取一个$U[0,1]$的随机数U, 如果$U \le \frac{T(u)}{T(v)}$, 则将状态更新为$X_{k+1} = u$并回到(s2), 否则状态不更新,即令$X_{k+1} = v$, 并回到(s2).

基于这些流程, 可以编写计算机程序实现对分布π的采样, 请读者自己完成.

(B) Gibbs 采样

Gibbs采样是MCMC模拟中使用的最为广泛的一种马氏链轨道采样方法. 它本质上仍是一种特殊的Hastings-Metropolis算法. 我们简述如下:

设$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$是离散随机向量. 记其所有可能的取值集合为$S$. 假设

(h1) X的分布满足：对任意$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$,

$$\mathbb{P}(X = x) = cg(x),$$

其中c为常数.

(h2) 对任意$1 \le i \le n$ 以及任意x_j, 其中$1 \le j \le n$ 且$j \ne i$, 条件分布

$$\mathbb{P}(X_i = \cdot | X_j = x_j, j \ne i)$$

存在且已知.

♠**注记3.1.9.** *由概率分布的归一性可知$c = [\sum_{x\in S} g(x)]^{-1}$, 但在很多时候$g(x)$的求和计算不容易实现, 此时我们可以认为$c$是未知的.*

♠**注记3.1.10.** *上述条件(h2)表明在已知了X的任意$n-1$个分量取值后, 我们就可以一定的分布确定X的取值.*

在以上条件假设下, Gibbs采样法模拟生成的向量值马氏链$Y = \{Y_n, n \ge 0\}$按如下的转移方式生成样本:

(s1) 假设目前的状态是$Y_k = x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$;

(s2) 随机地在1到n中选取一个下标, 比如是i;

(s3) 固定所有$x_j, j \ne i$, 的值, 按条件分布$\mathbb{P}(X_i = \cdot | X_j = x_j, j \ne i)$ 生成x_i的随机数, 比如$x_i = y$;

(s4) 将Y_{k+1}的值取成$y = (x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_n)$并回到(s1).

记如上方式生成的马氏链Y的一步转移概率为$q(x, y)$, 那么

(q1) 当x, y至少有两个分量不同时$q(x, y) = 0$;

(q2) 当x, y只有一个分量不同时, 假设不同的分量下标为i,

$$q(x, y) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_i = y_i | X_j = x_j, j \ne i) = \frac{cg(y)}{n\mathbb{P}(X_j = x_j, j \ne i)};$$

(q3) 当$x=y$时

$$q(x,x)=1-\sum_{y\neq x}q(x,y).$$

容易检验此时Y是一个不可约马氏链, $q(x,y)=0\Leftrightarrow q(y,x)=0$ 而且$q(x,x)>0$. 进一步, 此时Hastings-Metropolis算法中的函数

$$\alpha(x,y)=\min\left(\frac{cg(y)q(y,x)}{cg(x)q(x,y)},1\right)=\min\left(\frac{cg(y)cg(x)}{cg(x)cg(y)},1\right)=1,$$

这表明Gibbs抽样法得到的马氏链Y也是按Hastings-Metropolis算法构造的非周期不可约可逆马氏链并以X的分布为平稳分布, 因此当模拟的马氏链Y 运行足够多的步骤后, 即k足够大后, Y_k的值就可以看作X 分布的一个取样点.

►**例3.1.11.** *已知离散随机向量$X=(X_1,\cdots,X_{50})$的每一个分量的可能取值都是1和-1. 对X的每一个可能取值$x=(x_1,x_2,\cdots,x_{50})$,*

$$\mathbb{P}(X=x)=ce^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{49}x_ix_{i+1}}.$$

试用Gibbs抽样法给出X分布的一个近似取样.

算法设计: 基本流程如下:

(s1) 给X_0任意赋予一个初值$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_{50}^{(0)})$;

(s2) 假设目前的状态是$Y_k=\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{50})$;

(s3) 随机地在1到50中选取一个下标, 比如是i;

(s4) 固定所有$x_j,j\neq i$, 的值, 按条件分布$\mathbb{P}(X_i=\cdot|X_j=x_j,j\neq i)$ 生成x_i的随机数, 比如$x_i=y$;

(s5) 将Y_{k+1}的值取成$\mathbf{y}=(x_1,\cdots,x_{i-1},y,x_{i+1},\cdots,x_{50})$ 并回到(s2).

具体的程序编写, 请读者自己完成.

最后我们指出的是MCMC方法不仅可以用来近似模拟离散分布的随机数, 还可以用来模拟连续分布的随机数; 不仅可以模拟随机数还可以结合Bayes方法估计参数以及求复杂样本空间上函数的极值. 对这些内容感兴趣的读者请参阅有关参考文献, 本书不再详述.

练习题

9.1 证明当$q>p$时带一个反射壁的简单随机游动是可逆的, 并由此求$m_{0,0}$.

9.2 总共m个白球和m个黑球分别放在A,B两个坛子中, 每个坛子有m个球, 每次从这两个坛子中各随机地取一个球并把它们交换后放回. 以X_n表示经过n 次

后A坛中黑球个数. 求X_n的平稳分布.

9.3* 试通过编程将例3.1.8($n = 50$)和例3.1.11在计算机上实现.

3.2　分枝过程

这一节我们介绍一类特殊的马氏模型——分枝过程. 这类过程源于家族姓氏消亡的统计调查, 现在生物, 经济, 金融以及社会学研究等领域有着广泛应用.

3.2.1　Galton-Watson分枝过程

一类理想的分枝过程定义如下：

♣**定义3.2.1.** *设$\{Y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1\}$为一族独立同分布的非负整数值的随机变量, 递归定义随机过程$\{X_n, n \geq 0\}$ 如下*

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n+1,k}, \quad n \geq 0,$$

其中X_0是给定的非负整数值随机变量且与$\{Y_{n,k}, n \geq 1, k \geq 1\}$独立. 称随机过程$\{X_n, n \geq 0\}$为Galton-Watson分枝过程, 简记为G-W分枝过程.

若以X_n表示第n代的个体数，$Y_{n+1,k}$则表示第n代中第k个个体的后代数. 直观看, G-W 分枝过程理想地假设了家族中每个个体产生后代的行为是一样的且彼此无关. 容易证明此时$X = \{X_n; n \geq 0\}$是一个时齐马氏链, 转移概率

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(Y_{1,1} + \cdots + Y_{1,i} = j).$$

由定义可知$p_{0,0} = 1$, 即状态0为吸收态. 记$p_k = \mathbb{P}(Y = k)$. 为避免平凡, 以下总设$p_1 < 1$. 若$p_0 > 0$, 则对任意i, $p_{i,0} = p_0^i > 0$，这表明$i \to 0$. 假定$X_0 = 1$,

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$$

那么所求概率

$$q = \mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = f_{10} = \lim_{n \to \infty} p_{1,0}^{(n)}.$$

注意到若初始时刻有k个个体, 要使姓氏消亡, 意味着每个个体及其后代的姓氏都得消亡, 又由于每个个体及其后代的表现是相互独立的, 因此

$$f_{k,0} = \mathbb{P}_k(\tau_0 < \infty) = f_{10}^k = q^k, \qquad p_{k,0}^{(n)} = \mathbb{P}_k(X_n = 0) = (p_{1,0}^{(n)})^k.$$

▲**命题3.2.2.** *若每个个体产生后代的平均值不超过1, 即$m = \mathbb{E}(Y) \leq 1$, 那么X_n必然消亡, 即$q = 1$.*

证明 由定理2.3.1可知

$$q = f_{1,0} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{1,k} f_{k,0} + p_{1,0} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k q^k + p_0.$$

令$A(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$. 那么$q$满足方程$q=A(q)$. 由于$0\le q\le 1$, 而由习题3.6可知该方程在$[0,1)$内无解. 直接验算可知$q=1$. □

▲**命题3.2.3.** *若每个个体产生后代的平均值超过1, 即$m=\mathbb{E}(Y)>1$, 那么X_n 以正概率不消亡, 即$q<1$.*

证明 在命题3.2.2证明中我们已指出q是$A(s)=s$在区间$[0,1]$上一个解. 注意到0是吸收状态, 对任意$n\ge 2$

$$p_{1,0}^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}p_{1,k}p_{k,0}^{(n-1)}+p_{1,0}=\sum_{k=1}^{\infty}p_k(p_{1,0}^{(n-1)})^k+p_0=A(p_{1,0}^{(n-1)}),$$

其中$p_{1,0}^{(1)}=p_0$. 对方程$s=A(s)$的任意非负解u以及任意n, 都满足

$$\begin{aligned}u&=A^n(u)=A^{n-1}(A(u))\\&\ge A^{n-1}(A(p_0))=A^{n-1}(p_{1,0}^2)\\&\ge\cdots\ge A(p_{1,0}^{(n)})=p_{1,0}^{(n+1)}.\end{aligned}$$

令$n\to\infty$, 得$q=f_{1,0}\le u$. 这表明q是$s=A(s)$的最小非负解. 由习题3.6可知当$m>1$时, $A(s)=s$在$[0,1)$内有唯一非负解, 从而$0<q<1$. □

3.2.2 带移民的Galton-Watson分枝过程

对G-W模型而言, 0是吸收态而所有非零状态都是非常返的(参见本节后习题10.2), 因此若X不灭绝则意味着X_n要趋向正无穷. 这种两极化现象显然与人们的直观感知不一致. 一种对G-W 模型简单的修正是引进所谓的“移民”, 得到如下的带移民G-W过程.

♣**定义3.2.4.** *设$\{Y_{n,k}\}_{n\ge1,k\ge1}$为一族独立同分布的非负整数值随机变量, $\{I_n\}_{n\ge1}$为一列独立同分布的非负整数值随机变量且与$\{Y_{n,k}\}_{n\ge1,k\ge1}$ 独立, 称随机过程$\{X_n,n\ge0\}$ 为带移民的G-W 过程, 如果*

$$X_{n+1}=\sum_{k=1}^{X_n}Y_{n+1,k}+I_{n+1},\quad n\ge0,$$

其中X_0是给定的非负整数值随机变量且与$\{Y_{n,k}\}_{n\ge1,k\ge1}$以及$\{I_n\}_{n\ge1}$都独立.

直观看, 在带移民的G-W过程模型中I_n表示第n代移入的人口数而且移入数量与n 之前的的人口数无关, 与第n代新生的人口也无关. 由独立性假设, 容易验证此时$X=\{X_n,n\ge0\}$仍为时齐马氏链. 记$p_k=\mathbb{P}(Y=k)$, $q_k=\mathbb{P}(I_1=k)$. 为

简单, 我们约定$1>p_0>0$并且对所有$k\geq 0$, $q_k>0$. 对任意$i\geq 0$, 由

$$p_{i,0}=\mathbb{P}(Y_{11}+\cdots+Y_{1i}+I_1=0)=p_0^i q_0>0,\quad p_{0,i}=\mathbb{P}(I_1=i)=q_i$$

可知X是不可约非周期的.(见本节后习题10.3)

记$m=\mathbb{E}(Y)$, $\sigma^2=\mathrm{Var}(Y)$, $\lambda=\mathbb{E}(I_1)$, $\beta^2=\mathrm{Var}(I_1)$. 由习题10.4可知

▲**命题3.2.5.** *对带移民的G-W分枝过程X, 如下的条件矩公式成立.*

(1) $\mathbb{E}(X_n|X_{n-1})=mX_{n-1}+\lambda$;

(2) $\mathbb{E}(X_n^2|X_{n-1})=(mX_{n-1}+\lambda)^2+\sigma^2X_{n-1}+\beta^2$.

▲**命题3.2.6.** *若$m<1$, $0<\lambda<\infty$, 那么X正常返.*

证明 若X不是正常返的, 那么由注2.4.9可知, 对任意$i\geq 0$, $p_{1,i}^{(n)}\to 0$. 这意味着对正常数$M=\frac{2\lambda}{1-m}+2$, 存在充分大的n, 使得对任意$0\leq k<M$, $p_{1,k}^{(n)}<\frac{1}{2M}$. 因此

$$\mathbb{P}_1(X_n\geq M)=1-\sum_{k=0}^{M-1}p_{1,k}^{(n)}>1/2,$$

从而$\mathbb{E}_1(X_n)>1+\frac{\lambda}{1-m}$. 但另一方面, 由命题3.2.5中(1)可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1(X_n)&=\mathbb{E}_1(\mathbb{E}(X_n|X_{n-1}))=m\mathbb{E}_1(X_{n-1})+\lambda\\&=\cdots=\lambda(1+\cdots+m^{n-2})+m^{n-1}\leq\frac{\lambda}{1-m}+1.\end{aligned}$$

矛盾表明X一定正常返. □

3.2.3 分枝过程参数估计*

在人口稳定条件下, 人们自然关心模型里一些重要参数的估计. 比如衡量后代平均个数的参数m和每代平均移入个数的参数λ.

下面我们在σ^2和β^2有限条件下考虑m,λ的参数估计.

总设$m<1$, $0<\lambda<\infty$. 记此时的平稳分布为$\pi=\{\pi_i\}_{i\geq 0}$. 注意X_{n-1} 已知条件下, X_n 的最佳估计是条件期望

$$\mathbb{E}(X_n|X_{n-1})=mX_{n-1}+\lambda.$$

在给定样本$X_0,\cdots,X_n$条件下, 通过使得表示误差的函数

$$Q(m,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}(X_k-mX_{k-1}-\lambda)^2$$

达到最小值, 我们可以得到参数m,λ的某种表示, 称其为(m,λ)的最小二乘估计.

直接计算可知m,λ的最小二乘估计量为
$$\hat{m}_n=\frac{n\sum_{k=1}^n X_{k-1}X_k-\sum_{k=1}^n X_{k-1}\sum_{k=1}^n X_k}{n\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2-(\sum_{k=1}^n X_{k-1})^2},$$
以及
$$\hat{\lambda}_n=\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n X_k-\hat{m}_n\sum_{k=1}^n X_{k-1}).$$
由推论2.5.4以及习题5.8可知
$$\begin{aligned}\hat{m}_n &= \frac{\frac{\sum_{k=1}^n X_{k-1}X_k}{n}-\frac{\sum_{k=1}^n X_{k-1}}{n}\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}}{\frac{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2}{n}-(\frac{\sum_{k=1}^n X_{k-1}}{n})^2}\\ &\to \frac{\sum_{i=0}^\infty i\pi_i\sum_{j=0}^\infty jp_{i,j}-(\sum_{i=0}^\infty i\pi_i)^2}{\sum_{i=0}^\infty i^2\pi_i-(\sum_{i=0}^\infty i\pi_i)^2}\\ &= \frac{\sum_{i=0}^\infty i(mi+\lambda)\pi_i-(\sum_{i=0}^\infty i\pi_i)^2}{\sum_{i=0}^\infty i^2\pi_i-(\sum_{i=0}^\infty i\pi_i)^2},\quad a.s.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$
下面我们计算$\sum\limits_{i=0}^\infty i\pi_i$以及$\sum\limits_{i=0}^\infty i^2\pi_i$. 为此我们假设$X$的初始分布为$\pi$, 那么$X_0$, X_1的分布都是π, 从而由命题3.2.5中结论(1)可知,
$$\sum_{i=0}^\infty i\pi_i=\mathbb{E}_\pi(X_0)=\mathbb{E}_\pi(X_1)=\mathbb{E}_\pi(\mathbb{E}_\pi(X_1|X_0))=\mathbb{E}_\pi(mX_0+\lambda)$$
因此
$$\sum_{i=0}^\infty i\pi_i=\frac{\lambda}{1-m}.$$
同样由命题3.2.5中结论(2)可知,
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^\infty i^2\pi_i &= \mathbb{E}_\pi(X_0^2)=\mathbb{E}_\pi(X_1^2)=\mathbb{E}_\pi(\mathbb{E}_\pi(X_1^2|X_0))\\ &= m^2\mathbb{E}_\pi(X_0^2)+(2\lambda m+\sigma^2)\mathbb{E}_\pi(X_0)+\lambda^2+\beta^2,\end{aligned}$$
可得
$$\sum_{i=0}^\infty i^2\pi_i=(\frac{\sigma^2\lambda}{1-m}+\beta^2)\frac{1}{1-m^2}+\frac{\lambda^2}{(1-m)^2}.$$
因此
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^\infty i^2\pi_i-(\sum_{i=0}^\infty i\pi_i)^2 &= (\frac{\sigma^2\lambda}{1-m}+\beta^2)\frac{1}{1-m^2},\\ \sum_{i=0}^\infty i(mi+\lambda)\pi_i-(\sum_{i=0}^\infty i\pi_i)^2 &= (\frac{\sigma^2\lambda}{1-m}+\beta^2)\frac{m}{1-m^2}.\end{aligned}$$
将以上结果代入(3.2.1)得
$$\hat{m}_n\to m,\quad a.s.$$

进而由定理2.5.1得

$$\hat{\lambda}_n \to \frac{\lambda}{1-m} - m\frac{\lambda}{1-m} = \lambda, \qquad a.s.$$

即$\hat{m}_n$, $\hat{\lambda}_n$分别是m和λ在几乎必然收敛意义下的相合估计.

练习题

10.1 假设在红细胞培养试验中红细胞的生存时间是1分钟, 一个红细胞死亡时以1/4的概率生成两个红细胞, 以2/3的概率产生一个红细胞一个白细胞, 以1/12的概率产生两个白细胞, 白细胞死亡后不会再生. 再生的红细胞又按前面的概率再生,且彼此互不干扰. 初始时只有一个红细胞. (1) 经过$n+0.5$分钟的培养, 没有出现过白细胞. 求该概率. (2) 在整个细胞培养过程中,细胞最终灭绝, 求该现象发生的概率.

10.2 不论p_0是否为零, 证明Galton-Watson模型所有非零状态都是非常返的.

10.3 证明带移民分枝过程是非周期不可约的, 若$1 > p_i, q_i > 0$, $i = 0, 1$.

10.4 证明命题**??**.

3.3 隐马尔科夫链

本节我们简要介绍离散时间离散状态的隐马尔科夫模型.

3.3.1 隐马尔科夫链及其性质

♣**定义3.3.1.** 设$X_n, Y_n, n \geq 0$, 是分别取值于集合S和W上的离散随机变量. 称$Z = \{Z_n = (X_n, Y_n), n \geq 0\}$为隐马尔科夫链, 若存在随机矩阵$\mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j\in S}$和$\mathbf{Q} = (q_{k,l})_{k\in S, l\in W}$使得对任意$n \geq 0$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = (i_{n+1}, j_{n+1})|Z_k = (i_k, j_k), 0 \leq k \leq n) = p_{i_n, i_{n+1}} q_{i_{n+1}, j_{n+1}}, \quad (3.3.1)$$

对任意$i_0, i_1, \cdots, i_{n+1} \in S$, $j_0, j_1, \cdots, j_{n+1} \in W$都成立.

利用全概率公式, 由定义可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{n+1} = (i_{n+1}, j_{n+1})|Z_k = (i_k, j_k), 0 \leq k \leq n) \\
&= \mathbb{P}(Z_{n+1} = (i_{n+1}, j_{n+1})|Z_n = (i_n, j_n)) \\
&= \mathbb{P}(Z_{n+1} = (i_{n+1}, j_{n+1})|X_n = i_n). \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

因此隐马氏链是一种具有特定转移概率机制的向量值时齐马氏链, 其转移概率

$$p_{(i_n, j_n),(i_{n+1}, j_{n+1})} = p_{i_n, i_{n+1}} q_{i_{n+1}, j_{n+1}},$$

并且在已知X在n时刻的值时, Z的"历史"与"未来"独立.

另外, 仍由全概率公式可得

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_k = i_k, 0 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) = p_{i_n, i_{n+1}}.$$

因此$X = \{X_n, n \geq 0\}$是一个以$\mathbf{P} = (p_{i,j})$为转移概率矩阵的时齐马氏链. 而对任意时刻n, 过程$Y = \{Y_n, n \geq 0\}$满足

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_n = j_n|X_n = i_n, X_k = i_k, Y_k = j_k, 0 \leq k \leq n-1) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = j_n|X_n = i_n, X_k = i_k, 0 \leq k \leq n-1) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = j_n|X_n = i_n, Y_k = j_k, 0 \leq k \leq n-1) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = j_n|X_n = i_n) = q_{i_n, j_n}.
\end{aligned}$$

因此, Y本身可以不是马氏的, 它在任何时刻是一个依赖于同期X 取值的一个随机变量, 并且分布列由矩阵$\mathbf{Q} = (q_{k,l})$ 的行向量给出.

在实际应用时, 模型Z 中往往只有过程Y才是可观测、可记录的, 而马氏链X是隐含的、不可观测的. 这就是我们称Z为隐马尔科夫链的主要原因.

▶**例3.3.2.** 以$Y = \{Y_n, n \geq 0\}$记录某只股票每日的涨跌幅度. Y是可观测的. 容易设想的是, 股票的涨跌与股票的“牛”, “熊”密切相关, 即与股票是否在上升(1)、下跌(−1)或者横盘(0)等状态有关. 以$X = \{X_n\}$ 表示股票每日所处的状态, 显然X是不可直接观测的. 一个简单的股票价格波动模型将(1)每日股票的涨跌看作是当日股票状态的随机表现, 即给定当日股票状态i之后, 股票涨跌服从某种具有参数i的随机分布, 记该分布列为$(q_{i,l})$; (2) 每日股票的状态过程X 看作是一个(时齐)马氏链, 转移概率矩阵为$(p_{i,j})$. 由此构建的模型$Z_n = (X_n, Y_n)$就是一个刻画股票价格波动率的隐马氏链模型.

▶**例3.3.3.** 评估一台机器的生产状态. 将机器状态X_n分为好(状态1)和差(状态2)两种, 要求依据机器生产产品的质量情况Y_n实时评判机器的生产状态. 假定产品的质量分布只依赖于机器当前生产状态, 而机器状态的转变构成一个马氏链, 那么$Z_n = (X_n, Y_n)$就构成了一个隐马尔科夫链.

▶**例3.3.4.** 设X_n是取值于状态空间$S = \{1, 2, \cdots, L\}$的*Markov* 链, 其样本不能被实际测量得到, 而能测量到的是如下的Y_n 的样本,

$$Y_n = g(X_n) + w_n,$$

其中g是一个未知函数, $\{w_n\}$是独立同分布的随机干扰,只取有限个值,且与随机过程$\{X_n\}$独立. 那么(X_n, Y_n)就是一个隐*Markov* 模型.

以下总设$Z_n = (X_n, Y_n)$是一个隐马尔科夫链. 设X_0的初始分布$\pi = (\pi_i, i \in S)$, 对任意$n \geq 0$ 以及$i_0, i_1, \cdots, i_n \in S$, $j_0, j_1, \cdots, j_n \in W$, 由马氏链的有限维分布表示可知

$$\mathbb{P}(Z_k = (i_k, j_k), 0 \leq k \leq n) = \pi_{i_0} q_{i_0,j_0} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1},i_k} q_{i_k,j_k}. \tag{3.3.3}$$

这表明初始分布π以及随机矩阵$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ 完全确定了Z 的统计特征. 通常称$(\pi, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$为隐马尔科夫链$Z$的参数组.

给定$j_0, j_1, \cdots, j_n \in W$. 对任意$0 \leq m \leq n$, 令

$$F_m(i) = \mathbb{P}(X_m = i, Y_k = j_k, 0 \leq k \leq m), \qquad i \in S.$$

那么由(3.3.2)和全概率公式

$$F_0(i) = \pi_i q_{i,j_0},$$

$$F_m(i) = \sum_{i_{m-1} \in S} \mathbb{P}(X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i, Y_k = j_k, 0 \leq k \leq m)$$

$$= \sum_{i_{m-1}\in S}\Big[\mathbb{P}(X_m=i,Y_m=j_m|X_{m-1}=i_{m-1},Y_k=j_k,0\le k\le m-1)$$
$$\times\mathbb{P}(X_{m-1}=i_{m-1},Y_k=j_k,0\le k\le m-1)\Big]$$
$$= q_{i,j_m}\sum_{i_{m-1}\in S}p_{i_{m-1},i}F_{m-1}(i_{m-1}),\qquad m\ge 1. \tag{3.3.4}$$

对任意$0\le m<n$, 令

$$B_m(i)=\mathbb{P}(Y_n=j_n,\cdots,Y_{m+1}=j_{m+1}|X_m=i),$$

类似地, 再由(3.3.2), 条件概率公式和全概率公式可得

$$B_m(i)=\sum_{i_{m+1}\in S}p_{i,i_{m+1}}q_{i_{m+1},j_{m+1}}B_{m+1}(i_{m+1}),\qquad m\le n-1. \tag{3.3.5}$$

其中约定$B_n(i)\equiv 1$.

基于公式(3.3.4)和(3.3.5), 我们可以通过递推的方法得到$F_m(i)$和$B_m(i)$.

由$F_m(i)$和$B_m(i)$的定义可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_k=j_k,0\le k\le n)&=\sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_n=i,Y_k=j_k,0\le k\le n)\\&=\sum_{i\in S}F_n(i)\qquad(3.3.6)\\&=\sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_0=i,Y_k=j_k,0\le k\le n)\\&=\sum_{i\in S}\pi_i q_{i,j_0}B_0(i).\qquad(3.3.7)\end{aligned}$$

更一般地, 对任意$0\le m\le n$, 由马氏性

$$\mathbb{P}(Y_k=j_k,0\le k\le n)=\sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_m=i,Y_k=j_k,0\le k\le n)$$
$$=\sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_m=i,Y_k=j_k,0\le k\le m)$$
$$\times\mathbb{P}(Y_k=j_k,m<k\le n|X_m=i,Y_k=j_k,0\le k\le m)$$
$$=\sum_{i\in S}F_m(i)\mathbb{P}(Y_k=j_k,m<k\le n|X_m=i)=\sum_{i\in S}F_m(i)B_m(i). \tag{3.3.8}$$

因此

$$\mathbb{P}(X_m=i|Y_k=j_k,0\le k\le n)=\frac{F_m(i)B_m(i)}{\sum_{i\in S}F_m(i)B_m(i)}. \tag{3.3.9}$$

$$\mathbb{P}(Y_{n+1}=j|Y_k=j_k,0\le k\le n)$$
$$=\sum_{i,i_{n+1}\in S}\mathbb{P}(Y_{n+1}=j,X_{n+1}=i_{n+1},X_n=i|Y_k=j_k,0\le k\le n)$$

$$= \sum_{i,i_{n+1}\in S} \frac{p_{i,i_{n+1}} q_{i_{n+1},j} F_n(i)}{\sum_{i\in S} F_n(i)}. \tag{3.3.10}$$

▶**例3.3.5.** 假设例*3.3.2*中股票价格波动率分$-1,0,1$三个层次, 在股票状态只有$-1,1$两种情形. 在股票状态为1 时, 股票价格波动率分$-1,0,1$ 的概率分别为$0.2,0.3,0.5$, 而在股票状态为-1时, 股票价格波动率分$-1,0,1$ 的概率分别为$0.6,0.2,0.2$. 假定股票状态转移概率为

$$p_{-1,1}=1/4,\ p_{-1,-1}=3/4,\ p_{1,1}=4/5,\ p_{1,-1}=1/5.$$

若已知$\mathbb{P}(X_0=1)=4/5$以及*3*天的价格波动率$Y_0=1, Y_1=0, Y_2=-1$. 试问(1)第三个观察日股票在状态1的概率, (2)估计第四个观察日股票价格波动最可能的层次.

解 (1) 给定$j_0=1, j_1=0, j_2=-1$, 套用公式(3.3.4), 计算可知

$$F_0(1)=\pi_1 q_{1,1}=0.8\times 0.5=0.4,\quad F_0(-1)=\pi_{-1}q_{-1,1}=0.2\times 0.2=0.04;$$

$$F_1(1)=q_{1,0}[p_{-1,1}F_0(-1)+p_{1,1}F_0(1)]=0.099,$$

$$F_1(-1)=q_{-1,0}[p_{-1,-1}F_0(-1)+p_{1,-1}F_0(1)]=0.022;$$

$$F_2(1)=q_{1,-1}[p_{-1,1}F_1(-1)+p_{1,1}F_1(1)]=0.01684,$$

$$F_2(-1)=q_{-1,-1}[p_{-1,-1}F_1(-1)+p_{1,-1}F_1(1)]=0.02178.$$

因此由(3.3.9)(取$m=n=2$, 此时$B_m(i)=1$),

$$\mathbb{P}(X_2=1|Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1)=\frac{0.01684}{0.01684+0.02178}=\frac{842}{1931}\approx 0.4355.$$

(2) 为了计算方便, 我们令

$$a(1)=p_{1,1}q_{1,1}+p_{1,-1}q_{-1,1}=0.44,\ a(-1)=p_{-1,1}q_{1,1}+p_{-1,-1}q_{-1,1}=0.275;$$

$$b(1)=p_{1,1}q_{1,0}+p_{1,-1}q_{-1,0}=0.28,\ b(-1)=p_{-1,1}q_{1,0}+p_{-1,-1}q_{-1,0}=0.225;$$

$$c(1)=p_{1,1}q_{1,-1}+p_{1,-1}q_{-1,-1}=0.28,\ c(-1)=p_{-1,1}q_{1,-1}+p_{-1,-1}q_{-1,-1}=0.5.$$

由(3.3.10)可得(取$n=2$)

$$\mathbb{P}(Y_3=1|Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1)=\frac{a(1)F_2(1)+a(-1)F_2(-1)}{F_2(1)+F_2(-1)}\approx 0.3469;$$

$$\mathbb{P}(Y_3=0|Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1)=\frac{b(1)F_2(1)+b(-1)F_2(-1)}{F_2(1)+F_2(-1)}\approx 0.2490;$$

$$\mathbb{P}(Y_3=-1|Y_0=1,Y_1=0,Y_2=-1)=\frac{c(1)F_2(1)+c(-1)F_2(-1)}{F_2(1)+F_2(-1)}\approx 0.4041.$$

因此第四个观察日股票价格波动最可能的层次为-1. □

3.3.2 状态估计与预测*

对隐Markov 模型, 在应用中我们常碰到这样的问题: 已知模型参数$(\pi, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$和一段观测序列$\{Y_k, k \le n\}$, 需要估计$X_m$, $m \le n$的最佳值. 下面我们基于极大似然的思想讨论这类问题, 也即我们认为X_m的最佳值是在给定观察序列条件下X_m以最大概率取到的值.

给定一段序列$\{Y_k, k \le n\}$的观察值$y_0, \cdots, y_n$. 当我们只估计n之前某一个时刻m的最佳值时, 由(3.3.9)

$$\mathbb{P}(X_m = i | Y_k = j_k, 0 \le k \le n) = \frac{F_m(i) B_m(i)}{\sum_{i \in S} F_m(i) B_m(i)}$$

可知, X_m的最佳值就是使得$F_m(i)B_m(i)$取值最大的i.

若我们需要估计n及n之前所有时刻的最佳值, 那么由

$$\begin{aligned}
&\max_{i_k \in S, 0 \le k \le n} \mathbb{P}(X_k = i_k Y_k = j_k, 0 \le k \le n) \\
&\quad = \max_{i_k \in S, 0 \le k \le n} [p_{i_{n-1}, i_n} q_{i_n, j_n} \mathbb{P}(X_k = i_k Y_k = j_k, 0 \le k < n)] \\
&\quad = \max_{i_n \in S} \left\{ q_{i_n, j_n} \max_{i_k \in S, 0 \le k < n} \left[p_{i_{n-1}, i_n} \mathbb{P}(X_k = i_k Y_k = j_k, 0 \le k < n) \right] \right\}, \quad (3.3.11)
\end{aligned}$$

可知, 对任意$0 \le m \le n$, 若令

$$\begin{aligned}
M_m(i) &= \max_{i_k \in S, 0 \le k < m} \mathbb{P}(X_m = i, X_k = i_k, Y_k = j_k, 0 \le k < m) \\
&= \max_{i_k \in S, 0 \le k < m} \left[p_{i_{m-1}, i} \mathbb{P}(X_k = i_k Y_k = j_k, 0 \le k < m) \right],
\end{aligned}$$

则由马氏性可得

$$\begin{aligned}
M_m(i) &= \max_{\substack{i_k \in S \\ 0 \le k < m}} \left[p_{i_{m-1}, i} q_{i_{m-1}, j_{m-1}} p_{i_{m-2}, i_{m-1}} \mathbb{P}(X_k = i_k Y_k = j_k, 0 \le k < m-1) \right] \\
&= \max_{i_{m-1} \in S} [p_{i_{m-1}, i} q_{i_{m-1}, j_{m-1}} M_{m-1}(i_{m-1})], \qquad (3.3.12)
\end{aligned}$$

并且由(3.3.11)可得

$$\max_{i_k \in S, 0 \le k \le n} \mathbb{P}(X_k = i_k Y_k = j_k, 0 \le k \le n) = \max_{i \in S} [q_{i, j_n} M_n(i)]. \qquad (3.3.13)$$

注意到对任意$i \in S$, $M_0(i) = \pi_i$其中π是X的初始分布, 利用(3.3.12), 由递归计算可得任意的$M_m(i)$, 进而由上式可知n及n之前所有时刻的X 的最佳值与Y的观测值的联合概率.

为了获得n及n之前所有时刻的X的最佳值, 由(3.3.13)和(3.3.12)进一步可知n及n之前所有时刻的X的最佳值$i_0, i_1, \cdots, i_n$中

(1) i_n是使函数$q_{i, j_n} M_n(i), i \in S$, 取到最大值的一个状态;

(2) 对任意$1 \le m \le n$, 给定i_m, i_{m-1}就是使得函数

$$p_{i,i_m} q_{i,j_{m-1}} M_{m-1}(i), \qquad i \in S,$$

取最大值的一个状态.

对任意$0 \le m < n$以及$u \in S$, 记$I_m(u) \in S$ 使得

$$p_{I_m(u),u} q_{I_m(u),j_m} M_m(I_m(u)) = \max_{i \in S} p_{i,u} q_{i,j_m} M_m(i).$$

那么

$$i_{n-1} = I_{n-1}(i_n), i_{n-2} = I_{n-2}(i_{n-1}), \cdots, i_0 = I_0(i_1).$$

给定了观测序列的观测值, 上面寻找最可能的状态序列的方法称为Viterbi算法.

►**例3.3.6.** *(接例3.3.5) 问前三个观察日该股票最可能的状态序列是什么?*

解 给定$j_0 = 1, j_1 = 0, j_2 = 1$. 由假设可知$M_0(1) = 0.8, M_0(-1) = 0.2$,

$$M_1(1) = \max_{i=-1,1} p_{i,1} q_{i,j_0} M_0(i) = \max_{i=-1,1} p_{i,1} q_{i,1} M_0(i) = 0.32, \quad I_0(1) = 1$$

类似可知

$$M_1(-1) = \max_{i=-1,1} p_{i,-1} q_{i,j_0} M_0(i) = 0.08, \quad I_0(-1) = 1.$$
$$M_2(1) = \max_{i=-1,1} p_{i,1} q_{i,j_1} M_1(i) = 0.0768, \quad I_1(1) = 1.$$
$$M_2(-1) = \max_{i=-1,1} p_{i,-1} q_{i,j_1} M_1(i) = 0.0192, \quad I_1(-1) = 1.$$

由于$\max_{i=-1,1} q_{i,j_2} M_2(i) = \max_{i=-1,1} q_{i,-1} M_2(i) = 0.01536$ 在$i = 1$时取到最大值. 因此前三个观察日该股票最可能的状态序列是

$$i_2 = 1, i_1 = I_1(1) = 1, i_0 = I_0(1) = 1.$$ □

3.3.3 隐Markov模型的参数估计*

应用时对隐Markov 模型我们还常需要从一段观测序列$\{Y_k, k \le n\}$出发估计模型参数$\theta = (\pi, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$. 这类问题又称为学习问题, 属于参数估计范畴.

若假设$\{X_k, k \ge 1\}$的样本也已知, 此时作为马氏链$Z = \{Z_k, k \ge 0\}$是完全已知的. 那么只要有充分长的样本, 对任意$i, j \in S$, 把X中从状态i到下一个时刻为状态j的频数记为$A_{i,j}$, 把状态i出现的频数记作A_i, 由习题5.10 以及大数定律可以证明, 只要i常返就可以用$\hat{p}_{i,j} = A_{i,j}/A_i$ 作为$p_{i,j}$的相合估计, 同样若以$B_{i,l}$表示X取值i的同时Y取值l的频数, 则类似可证明$\hat{q}_{i,l} = B_{i,l}/A_i$ 是$q_{i,l}$相合估计. 然而这种方法只是“理想”的, 因为实际模型中X常不可测量.

下面我们仅给定Y的一组观测值$l_0, l_1, \cdots, l_N$. 极大似然原理告诉我们θ的最大似然估计$\hat{\theta}$满足

$$\mathbb{P}(Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\hat{\theta}) = \max_{\theta} \mathbb{P}(Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta),$$

其中$\mathbb{P}(\cdot|\theta)$表示给定参数θ下的概率.

一般而言, 直接求解该问题非常困难. 一种折中方案是通过构造一个关于参数θ 的递推算法, 使之能逐步提高条件概率$\mathbb{P}(Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta)$ 的取值, 并将递推算法的最终结果作为参数θ的估计. 算法的具体步骤如下:

(s1) 给定参数$\theta_n = (\pi(n), \mathbf{P}(n) = (p_{i,j}(n))_{i,j\in S}, \mathbf{Q}(n) = (q_{i,l}(n))_{i\in S, l\in W})$;

(s2) 对任意$\theta = (\pi, \mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j\in S}, \mathbf{Q} = (q_{i,l})_{i\in S,l\in W})$, 令

$$\begin{aligned} T(\theta|\theta_n) = \sum_{i_k\in S, 0\le k\le N} \Big[& \mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_n) \\ & \times \ln(\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta))\Big]. \end{aligned}$$

(s3) 求θ^*使得$T(\theta^*|\theta_n) = \max_\theta T(\theta|\theta_n)$.

(s4) 令$\theta_{n+1} = \theta^*$ 并回到(s1).

按上述算法,

$$\begin{aligned} 0 &\le T(\theta_{n+1}|\theta_n) - T(\theta_n|\theta_n) \\ &= \sum_{i_k\in S, 0\le k\le N} \Big[\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_n) \\ &\qquad \times \ln\Big(\frac{\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_{n+1})}{\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_n)}\Big)\Big] \end{aligned}$$

因为对任意$x \in (0, \infty)$, $\ln x < x - 1$, 由上式可得

$$\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_{n+1}) \ge \mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_n).$$

这表明上述算法得到的参数θ_n确实能使条件概率$\mathbb{P}(Y_k = j_k, 0 \le k \le N|\theta_n)$随着算法次数的增加而优化(增加).

根据上述算法(s2)步中的定义, $T(\theta|\theta_n)$等于

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i_k\in S \\ 0\le k\le N}} \Big[\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_n) \ln(\pi_{i_0} q_{i_0,l_0} \prod_{n=1}^{N} p_{i_{n-1},i_n} q_{i_n,l_n})\Big] \\ &= \sum_{i_k\in S, 0\le k\le N} \Big[\mathbb{P}(X_k = i_k, Y_k = l_k, 0 \le k \le N|\theta_n) \\ &\qquad \times(\ln \pi_{i_0} + \sum_{n=0}^{N} \ln q_{i_n,l_n} + \sum_{n=1}^{N} \ln p_{i_{n-1},i_n})\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i_0\in S} \mathbb{P}(X_0=i_0, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\ln \pi_{i_0}\\
&\quad + \sum_{i_n\in S}\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X_n=i_n, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\ln q_{i_n,l_n}\\
&\quad + \sum_{i_{n-1},i_n\in S}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i_n, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\ln p_{i_{n-1},i_n}.
\end{aligned}
$$

或重写为

$$
\begin{aligned}
T(\theta|\theta_n) &= \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_0=i, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\ln \pi_i\\
&\quad + \sum_{\substack{i\in S\\ l\in W}}\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X_n=i, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\mathbf{1}_{\{Y_n=l\}}\ln q_{i,l}\\
&\quad + \sum_{i,j\in S}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n-1}=i, X_n=j, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\ln p_{i,j}.
\end{aligned}
$$

由习题11.1可知, 当$\theta=(\pi^*,\mathbf{P}^*,\mathbf{Q}^*)$时$T(\theta|\theta_n)$取到最大值, 其中$\pi^*=(\pi_i^*)$, $\mathbf{P}^*=(p_{i,j}^*)$, $\mathbf{Q}^*=(q_{i,l}^*)$满足: 对任意$i,j\in S, l\in W$,

$$
\pi_i^* = \frac{\mathbb{P}(X_0=i, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)}{\sum_{i\in S}\mathbb{P}(X_0=i, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)}, \tag{3.3.14}
$$

$$
p_{i,j}^* = \frac{\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}(X_{n-1}=i, X_n=j, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)}{\sum_{i,j\in S}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}(X_{n-1}=i, X_n=j, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)}, \tag{3.3.15}
$$

$$
q_{i,l}^* = \frac{\mathbb{P}(X_n=i, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\mathbf{1}_{\{Y_n=l\}}}{\sum_{\substack{i\in S\\ l\in W}}\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(X_n=i, Y_k=l_k, 0\le k\le N|\theta_n)\mathbf{1}_{\{Y_n=l\}}}. \tag{3.3.16}
$$

令$\theta_{n+1}=(\pi^*,\mathbf{P}^*,\mathbf{Q}^*)$, 我们得到了参数$\theta_{n+1}$ 与θ_n 之间的递推公式.

一般称(3.3.14)-(3.3.16)为Welch–Baum 公式. 上面的算法被称为EM 算法. 其中E和M分别指代步骤(s2)和(s3), 求数学期望与求最大值. EM 算法是针对在测量数据不完全时,求参数的一种近似于最大似然估计的统计方法. 隐Markov 模型参数的估计, 是EM 算法的一种典型运用.

对隐Markov 模型, 人们在应用时还会关心许多其他的问题, 比如对于一个特定的观测链$\{Y_k, k\le n\}$, 已知它可能是由已经学习好的若干模型之一所得的观测, 要决定此观测究竟是得自其中哪一个模型. 这类问题也称为识别问题, 属于分类范畴. 对于这些问题, 超出了本书的范畴，从略.

练习题

11.1 设$z_i > 0$ $(i \in T)$. 证明

$$\sum_{i \in T} z_i \ln\left(\frac{z_i}{\sum_{i \in T} z_i}\right) = \sup_{\substack{x_i > 0, i \in T \\ \sum_i x_i = 1}} \sum_{i \in T} z_i \ln x_i.$$

11.2* 试寻找一些具体问题, 用隐Markov 模型建模并做出分析和预测.

第四章　更新过程

马氏过程需要条件独立性,要求在已知现在状态的条件下,未来与过去无关. 本章介绍的更新过程, 是Poisson过程的推广; 一般而言, 不具有马氏性, 但对某些特定的时刻却有“更新”的特征.

4.1　更新过程与更新方程

给定概率空间$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$及其上计数过程$N=\{N(t); t\geq 0\}$. 由第二章第三节可知, 对任意整数$k\geq 1$,

$$T_k=\inf\{t\geq 0, N(t)\geq k\} \qquad \text{以及} \qquad W_k=T_k-T_{k-1},$$

其中$T_0=0$, 分别为第k次(随机事件)发生时间和第k个间隔时间. 计数过程N与到达时刻序列$\{T_k;\ k\geq 1\}$满足如下关系

$$N(t)=\sup\{k;\ T_k\leq t\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{T_k\leq t\}},$$

而且对任意$k\geq 0$以及$t\geq 0$

$$\{N(t)\geq k\}=\{T_k\leq t\}, \tag{4.1.1}$$

$$\{N(t)=k\}=\{T_k\leq t<T_{k+1}\}, \tag{4.1.2}$$

$$N(t)+1=\inf\{k, T_k>t\}. \tag{4.1.3}$$

(A) 更新过程与更新性

定义12.1 若计数过程$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$具有独立同分布的间隔时间序列, 即存在独立同分布的非负随机变量序列$\{W_k;\ k\geq 1\}$, 使得

$$N(t)=\sup\{k\geq 0:\ \sum_{i=1}^{k}W_i\leq t\}. \tag{4.1.4}$$

则称N为更新过程. 称W_k的分布(函数)F为间隔时间分布.

显然泊松过程是一个更新过程. 因此更新过程可看作泊松过程的推广. 此外, 为了避免$N(t)\equiv\infty$这种平凡情形, 总设$F(0)<1$.

对任意$t \geq 0$以及到达时刻T_n,

$$N(t+T_n)-n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{T_k-T_n\leq t\}}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{\sum_{i=n+1}^{k}W_i\leq t\}}.$$

注意到W_i为独立同分布的随机变量, $T_n=\sum_{k=1}^{n}W_k$只依赖于n之前的W_i, 因此$N(t+T_n)-n$与T_n独立, 且

$$\{N(t+T_n)-n;\ t\geq 0\}\overset{f.d}{=}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{k}W_i\leq t\}};\ t\geq 0\right\}=\{N(t);\ t\geq 0\}.$$

这表明从恰好发生第n事件的时刻T_n往后看, 更新过程增量与T_n独立且增量的随机变化过程就像是从零时刻开始的更新过程. 直观地说，在T_n之后，过程$N(t)$从“新”开始. 我们把这种性质称为更新性, 我们也常称T_n 为(第n次)更新时刻.

例12.1 假设$X=\{X_n;\ n\geq 1\}$为伯努利过程, N_n表示n 次试验之前(含第n次)成功的次数, 并规定$N_0=0$. 对任意$t\geq 0$, 令$N(t)=N_{[t]}$. 那么$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$就是一个更新过程. 此时到达时刻间隔W_i服从几何分布：

$$\mathbb{P}(W_1=k)=\mathbb{P}(X_1=0,\cdots,X_{k-1}=0,X_k=1)=(1-p)^{k-1}p.$$

例12.2 某型商品专卖店采取(s,S)-式进货仓储策略, 即商店商品数不超过s 时将商品补足到S个, 假设开始时商店有S件商品而且补充的商品能立即进货. 若顾客按强度为λ 的泊松过程$N(t)$到达, 而且每个顾客购买的商品数是独立同分布的随机变量ξ_i. 令$C(t)$表示$(0,t]$时段内的补货次数, 那么$C(t)$就是一个更新过程, 间隔时间W分布为

$$\mathbb{P}(W>t)=\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i<S-s\Big).$$

比如, 若还假设$\{\xi_i\}$与$N(t)$独立, $s=2$, $S=4$, 并设

$$\mathbb{P}(\xi_i=1)=p,\qquad \mathbb{P}(\xi_i=2)=q=1-p.$$

那么我们可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W>t)&=\mathbb{P}(\{(0,t]\text{内没有顾客}\}\cup\{(0,t]\text{内只有1个顾客且只买了1 件商品}\})\\&=\mathrm{e}^{-\lambda t}+p\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

注意到$T_k=\sum_{i=1}^{k}W_i$为独立随机变量之和, 由强大数定律可知

$$T_n/n\to\mu=\mathbb{E}(W_1),\quad \text{a.s.}$$

因此$T_n\to\infty$, a.s. 此外

$$\mathbb{P}(T_n\leq t)=F^{*n}(t),$$

其中$F^{*0}(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, 进而$N(t)$的分布列为

$$\mathbb{P}(N(t)=k)=\mathbb{P}(T_k\leq t)-\mathbb{P}(T_{k+1}\leq t)=F^{*k}(t)-F^{*(k+1)}(t),$$

并且对一切$t\geq 0$, $n\in\mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(N(t)<\infty)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(N(t)<n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T_n>t)=1,$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(N(t)<n)=\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(T_n>t)=0.$$

因此, $N(t)$取有限值且由其单调非降性可得$t\to\infty$时$N(t)\to\infty$, a.s.

定理12.1 更新过程$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$的任意阶矩存在, 即对任意$t\geq 0$, $k\geq 1$,

$$\mathbb{E}[(N(t))^k]<+\infty,$$

特别, $m(t):=\mathbb{E}(N(t))=\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}(t).$

证明 对任意固定的$t\geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(N(t))^k]&=\sum_{n=1}^{\infty}n^k\mathbb{P}(N(t)=n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^k\mathbb{P}(N(t)\geq n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n^k\mathbb{P}(T_n\leq t)=\sum_{n=1}^{\infty}n^kF^{*n}(t).\end{aligned}$$

由$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T_n\leq t)=0$可知, 存在正整数$m$使得

$$a=F^{*m}(t)<1.$$

又因为对一切$n\geq 0$,

$$F^{*(m+n)}(t)=\int_0^t F^{*m}(t-s)\mathrm{d}F^{*n}(s)\leq F^{*m}(t)F^{*n}(t).$$

所以对任意$l=0,1,2\cdots$, $r=0,1,2,\cdots,m-1$,

$$F^{*(lm+r)}(t)\leq(F^{*m}(t))^l=a^l.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(N(t))^k]&\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^kF^{*n}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1}(lm+r)^kF^{*(lm+r)}(t)\\&\leq m^{k+1}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)^ka^l<+\infty.\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

此时

$$\begin{aligned}m(t)=\mathbb{E}(N(t))&=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbb{P}(N(t)=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n(F^{*n}(t)-F^{*(n+1)}(t))\\&=F(t)+\sum_{n=2}^{\infty}[n-(n-1)]F^{*n}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}(t).\end{aligned}$$

□

特别, 若N是泊松过程, 容易检验
$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s=\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}s=\lambda t,$$
这与命题3.3相关结果一致.

(B) 更新函数与更新方程

定义12.2 称更新过程$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$的均值函数$m(t)=\mathbb{E}(N(t))$为N的更新函数. 当N的间隔时间分布为F时, 也称$m(t)$是分布F的更新函数, 并记作$m_F(t)$.

定理12.2 更新函数$m(t)$满足如下方程
$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-s)dF(s).$$
证明 由全概率公式
$$m(t)=\mathbb{E}(N(t))=\mathbb{E}(\mathbb{E}(N(t)|T_1))=\int_0^{\infty}\mathbb{E}(N(t)|T_1=s)dF(s).$$
当$s=T_1>t$时, $N(t)=0$, 当$s=T_1<t$时, 由更新性, 依分布
$$N(t)=N(t-T_1+T_1)-1+1=1+N(t-T_1)=1+N(t-s).$$
因此 $$\mathbb{E}(N(t)|T_1=s)=\begin{cases}0, & s>t\\ 1+\mathbb{E}(N(t-s))=1+m(t-s), & s<t.\end{cases}$$ 由此可得
$$m(t)=\int_0^t[1+m(t-s)]dF(s)=F(t)+\int_0^t m(t-s)dF(s).$$
注12.1 如定理12.2证明这般通过全概率公式和更新性建立方程的方法被统称为更新技巧.

例12.3 设更新过程$N(t)$的间隔时间分布F为$[0,1]$上的均匀分布, 求对应的更新函数$m(t)$, 其中$0<t\leq 1$.

解 对任意$0<t\leq 1$, 所求更新函数满足的更新方程为
$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s)=t+\int_0^t m(s)\mathrm{d}s.$$
两边关于t求导得$m'(t)=1+m(t)$. 因此$\frac{\mathrm{d}m(t)}{1+m(t)}=\mathrm{d}t$. 由此可解得
$$\ln(1+m(t))=c+t\Rightarrow m(t)=C\mathrm{e}^t-1.$$
由$m(0)=0$可知$C=1$, 即$m(t)=\mathrm{e}^t-1$. □

定义12.3 设$b(t)$是$[0,\infty)$上局部有界函数(即在任一有界区间上都有界的函数), 称如下方程
$$B(t)=b(t)+\int_0^t B(t-s)\mathrm{d}F(s) \tag{4.1.6}$$
为更新方程, 其中$B(t)$为未知函数.

定义12.4 设$h(t)$为$[0,\infty)$上局部有界函数, $G(t)$为$[0,\infty)$上右连续单调非降函数, 定义卷积“$*$”运算如下:

$$h*G(t):=\int_{[0,t]\cap[0,\infty)}h(t-s)\mathrm{d}G(s)\triangleq\int_0^t h(t-s)\mathrm{d}G(s),\qquad t\geq 0.$$

注12.2 为了记号一致, 我们指出

$$\int_a^b f(s)\mathrm{d}G(s)\triangleq\int_{(a,b]\cap[0,\infty)}f(s)\mathrm{d}G(s),0<a<b\leq\infty.$$

显然, 由定义12.4易得$h*G(0)=h(0)G(0)$且$h*G$为局部有界函数. 进一步, 若h非负右连续单调非降, 则$h*G$也非负右连续单调非降.

引理12.3 设$h(t)$为$[0,\infty)$上局部有界函数,$G(t),H(t)$为$[0,\infty)$上右连续单调非降函数, 则

$$(1)G*H=H*G,\quad (2)(h*G)*H=h*(G*H).$$

证明 不失一般性可设G,H是$[0,\infty)$上的概率分布函数且分别是独立随机变量X,Y的分布. 这时$G*H$是$X+Y$的分布, 因此与$H*G$相同. 另一方面, 对任意$t\geq 0$,

$$\begin{aligned}(h*G)*H(t)&=\int_0^t\Big(\int_0^{t-s}h(t-s-u)dG(u)\Big)\mathrm{d}H(s)\\&=\int_0^t\int_0^t h(t-(s+u))\mathbf{1}_{\{s+u\leq t\}}\mathrm{d}G(u)\mathrm{d}H(s)\\&=\mathbb{E}(h(t-(X+Y))\mathbf{1}_{\{X+Y\leq t\}})\\&=\int_0^t h(t-v)\mathrm{d}G*H(v)=h*(G*H)(t).\end{aligned}$$

定理12.4 设$b(t)$为局部有界函数, 更新方程(4.1.6)有唯一局部有界解

$$B(t)=b(t)+\int_0^t b(t-s)\mathrm{d}m_F(s),\tag{4.1.7}$$

证明 易知(4.1.7)的B是局部有界的且

$$B=b+b*m_F=b+b*\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}=b+b*F+b*\sum_{n=2}^{\infty}F^{*n}$$

$$=b+(b+b*\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n})*F=b+B*F,$$

为方程(4.1.6)的解.

下证唯一性. 对满足(4.1.6)的任一局部有界解B,

$$B=b+B*F=b+(b+B*F)*F=b+b*F+B*F^{*2}=\cdots$$

$$=b+b*\sum_{k=1}^{n}F^{*k}+B*F^{*(n+1)}.$$

由于

$$\sup_{0\le s\le t}|B*F^{*(n+1)}(s)|\le \sup_{0\le s\le t}|B(s)|F^{*(n+1)}(t)$$

而且$F^{*(n+1)}(t)=\mathbb{P}(T_{n+1}\le t)\to 0$, 因此令$n\to\infty$, 由定理12.1得

$$B=b+b*\sum_{k=1}^{\infty}F^{*k}=b+b*m_F.$$

即满足(4.1.6)的局部有界解B必可用(4.1.7)表示. □

由定理12.2与定理12.4, 我们可以得到更新函数$m_F(t)$的另一种表示:

$$m_F(t)=F(t)+\int_0^t F(t-s)\mathrm{d}m_F(s) \tag{4.1.8}$$

例12.4 设N是间隔时间分布为F的更新过程. 对任意$t,s\ge 0$, 求$\mathbb{E}(N^2(t))$.

解 记$K(t)=\mathbb{E}(N^2(t))$. 由全概率公式

$$K(t)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(N^2(t)|T_1))=\int_0^\infty \mathbb{E}(N^2(t)|T_1=u)\mathrm{d}F(u).$$

由更新性

$$\mathbb{E}(N^2(t)|T_1=u)=\begin{cases}0, & u>t\\ \mathbb{E}((1+N(t-u))^2), & u<t.\end{cases}$$

即 $$\mathbb{E}(N^2(t)|T_1=u)=\begin{cases}0, & u>t\\ 1+2m_F(t-u)+K(t-u), & u<t.\end{cases}$$

所以$K(t)$满足方程

$$\begin{aligned}K(t)&=\int_0^t(1+2m_F(t-u)+K(t-u))\mathrm{d}F(u)\\ &=F(t)+2\int_0^t m_F(t-u)\mathrm{d}F(u)+\int_0^t K(t-u)\mathrm{d}F(u)\\ &=2m_F(t)-F(t)+\int_0^t K(t-u)\mathrm{d}F(u).\end{aligned}$$

由定理12.1易知$K(t)$是局部有界函数. 由定理12.4以及(4.1.8)可得

$$\begin{aligned}K(t)&=2m_F(t)-F(t)+\int_0^t(2m_F(t-s)-F(t-s))\mathrm{d}m_F(s)\\ &=m_F(t)+2\int_0^t m_F(t-s)\mathrm{d}m_F(s).\end{aligned}$$ □

例12.5 求如下方程的局部有界解

$$g(t)=t+\int_0^t g(t-s)2\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s.$$

解 令$\mathrm{d}F(s)=2\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s$, 即$F$是参数为2的指数分布. 再令$b(t)=t$. 由定理12.4, 所

求方程的唯一局部有界解为

$$g(t)=b(t)+\int_0^t b(t-s)\mathrm{d}m(s),$$

其中$m(s)$是分布F的更新函数. 由于以F为间隔时间的更新过程是强度为2的泊松过程, 由命题3.3可知$m(s)=2s$. 因此

$$g(t)=t+\int_0^t (t-s)2\mathrm{d}s=t^2+t. \qquad \square$$

(C) 更新过程的几个统计量

定义12.5 设$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$为更新过程. 令

$$A(t)=t-T_{N(t)},\quad R(t)=T_{N(t)+1}-t,\quad L(t)=T_{N(t)+1}-T_{N(t)},$$

分别称$A(t),R(t),\beta(t)$为更新过程N在时刻t的年龄,剩余寿命和总寿命.

显然, $0\leq A(t)\leq t$, $t\geq 0$ 且对任意$x\geq 0$, $0\leq y\leq t$,

$$\begin{aligned}\{R(t)>x,A(t)\geq y\}&=\{(t-y,t+x]\text{中}N\text{无跳跃}\}\\&=\{R(t-y)>x+y\}=\{A(t+x)\geq x+y\}.\end{aligned}$$

取$y=0$得

$$\{R(t)>x\}=\{A(t+x)\geq x\}.$$

定理12.5 设N的间隔时间分布F均值有限. 令$\bar{F}=1-F(t)$, 则对任意$x,t\geq 0$,

$$\mathbb{P}(R(t)>x)=\bar{F}(t+x)+\int_0^t \bar{F}(t-s+x)\mathrm{d}m_F(s), \tag{4.1.9}$$

$$\mathbb{E}(R(t))=\int_t^\infty \bar{F}(t)\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{t-s}^\infty \bar{F}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}m_F(s), \tag{4.1.10}$$

证明 注意到对任意$x\geq 0$,

$$\mathbb{P}(R(t)>x|T_1=s)=\begin{cases}1, & s>t+x;\\ 0, & t<s\leq t+x;\\ \mathbb{P}(R(t-s)>x), & s\leq t.\end{cases}$$

利用更新技巧得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R(t)>x)&=\mathbb{E}(\mathbb{P}(R(t)>x|T_1))=\int_0^\infty \mathbb{P}(R(t)>x|T_1=s)\mathrm{d}F(s)\\&=\int_{t+x}^\infty \mathrm{d}F(s)+\int_0^t \mathbb{P}(R(t-s)>x)\mathrm{d}F(s)\\&=\bar{F}(t+x)+\int_0^t \mathbb{P}(R(t-s)>x)\mathrm{d}F(s).\end{aligned}$$

由定理12.4可知(4.1.9)成立. 再注意到对任意$t \geq 0$

$$\mathbb{E}(R(t)|T_1 = s) = \begin{cases} s - t, & s > t; \\ \mathbb{E}(R(t-s)), & s \leq t. \end{cases}$$

利用更新技巧

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R(t)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(R(t)|T_1)) = \int_0^\infty \mathbb{E}(R(t)|T_1 = s)\mathrm{d}F(s) \\ &= \int_t^\infty (u-t)\mathrm{d}F(u) + \int_0^t \mathbb{E}(R(t-s))\mathrm{d}F(s) \\ &= \int_t^\infty \bar{F}(u)\mathrm{d}u + \int_0^t \mathbb{E}(R(t-s))\mathrm{d}F(s). \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

此外由(4.1.9)可得

$$\mathbb{P}(R(t) > x) \leq \bar{F}(x) + \bar{F}(x)m_F(t).$$

因此

$$\mathbb{E}(R(t)) = \int_0^\infty \mathbb{P}(R(t) > x)\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \bar{F}(x)\mathrm{d}x(1 + m_F(t)) = \mu(1 + m_F(t))$$

是局部有界函数. 将定理12.4应用到方程(4.1.11)即得式(4.1.10). □

对于$A(t), L(t)$也可计算类似问题, 做为习题请读者自己完成.

值得指出的是, 对任意$x > 0$, 若$A(t) > x$, 那么$\mathbb{P}(L(t) > x) = 1$; 若$0 \leq s = A(t) \leq x$则意味者t时刻的总寿命一定大于s, 此时由更新性

$$\mathbb{P}(L(t) > x|A(t) = s) = \mathbb{P}(L(s) > x|A(s) = s) = \mathbb{P}(W > x|W > s) \geq \mathbb{P}(W > x),$$

其中W表示更新过程的任意一个间隔时间. 因此不论t时刻的年龄如何, 总有

$$\mathbb{P}(L(t) > x|A(t)) \geq \mathbb{P}(W > x),$$

从而

$$\mathbb{P}(L(t) > x) \geq \mathbb{P}(W > x). \tag{4.1.12}$$

这表明我们在某个固定t时刻观察到的间隔时间会比通常“理论上”的间隔时间长些——对于泊松过程我们可以给出更清楚的计算(参见习题3.6和12.4). 这种现象被称为长度偏离取样(length-biased sampling) 或检验悖论. 它在统计意义上的直观解释是：由于长的时间间隔比短的时间间隔更可能包含给定的时刻t, 因此t 时刻观察到的间隔时间会更长.

练习题

12.1 设更新过程N的间隔时间分布F的密度函数为$f(t) = t\mathrm{e}^{-t}$, $t > 0$,

(1) 对任意$0 < t_1 < t_2$以及正整数n, m, 求$\mathbb{P}(N(t_1) = n, N(t_2) = m)$.

(2) 对任意$t > 0$, 求更新函数$m(t)$.

12.2 求例12.3中$m(t)$其中$t \in (1,2]$.

12.3 求积分方程$g(t) = t + \int_0^t g(t-s)3\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s$ 的局部有界解.

12.4 设N是间隔时间分布为F的更新过程. $A(t)$, $L(t)$表示t时刻的年龄与总寿命, 求$\mathbb{P}(A(t) \geq x)$, $\mathbb{E}(A(t))$以及$\mathbb{P}(L(t) \geq x)$, $\mathbb{E}(L(t))$.

12.5 设N是强度为λ的泊松过程, 试计算其在时刻t时年龄$A(t)$、剩余寿命$R(t)$以及总寿命$L(t)$的数学期望.

12.6 设N是更新过程, 间隔时间分布期望为μ, 证明$\mathbb{E}(T_{N(t)+1}) = \mu(1 + m(t))$.

12.7* 设F是步长为d的格子点分布, $m(t)$是F的更新函数, 证明$m(t)$是阶梯函数, 跳跃点t必能被d整除, 而且存在充分大的N, 当$n > N$ 时nd是跳跃点.

12.8* 设G为$[0, +\infty)$上右连续,单调不降的非负函数, $G(0) < 1$. 那么对任意$t \in [0, +\infty)$, $m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t) < \infty$. 在此基础上证明, 对任意局部有界函数$b$, 更新方程

$$B(t) = b(t) + \int_0^t B(t-s)\mathrm{d}G(s)$$

的局部有界解可以唯一地表示成

$$B(t) = b(t) + \int_0^t b(t-s)\mathrm{d}m_G(s).$$

4.2 极限定理

上一节我们对更新过程与更新函数的趋势作了简单介绍, 下面我们研究更新过程极限的精细性质并简要说明这些性质的应用.

(A) 更新过程的大数定律与中心极限定理

定理13.1 任取更新过程$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$, 记其间隔时间分布均值为μ. 那么
$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu},\quad a.s.$$
其中$\mu=\infty$时$1/\mu$ 为0.

证明 令T_n为N的更新时刻随机序列, 由定义可知$T_{N(t)}\leq t<T_{N(t)+1}$, 从而
$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)}\leq\frac{t}{N(t)}\leq\frac{T_{N(t)+1}}{N(t)}=\frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)}. \tag{4.2.1}$$
注意到$N(t)\to\infty$, a.s.以及由独立同分布随机变量序列的大数定律
$$\frac{T_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^n W_i}{n}\to\mathbb{E}(W_1)=\mu,\quad a.s.$$
其中W_i是N的间隔时间序列, 我们可得
$$\lim_{t\to\infty}\frac{T_{N(t)}}{N(t)}=\mu,\quad ,a.s.$$
将此结果应用于(4.2.1)两边得$t/N(t)\to\mu$, a.s. 从而$N(t)/t\to 1/\mu$, a.s. □

通常称$1/\mu$为更新过程的速率.

例13.1 假设伯努利实验中成功的概率为p, 失败的概率为$q=1-p$, 连续做若干次实验直至连续成功k次或连续失败k次为此，问平均实验次数.

[分析] 以连续成功或连续失败k次为一次计数事件A，假定伯努利实验在计数事件A发生后从新开始, 以$N(n)$表示到第n次实验时事件A 出现的次数, 那么N 是一个更新过程. 若以连续成功k次为一次计数事件B, 以$N_1(n)$表示到第n次实验时事件B出现的次数, 那么N_1也是一个更新过程; 同样以连续失败k次为一次计数事件C, 以$N_2(n)$表示到第n次实验时事件C 出现的次数, 那么N_2也是一个更新过程. 显然$N=N_1+N_2$. 由定理9.1，N的更新速率为N_1, N_2的更新速率之和.

解: 如上述分析建立更新过程N, N_1, N_2. 由习题2.3可知N_1, N_2 的平均等待时长分别为
$$\mu_1=\frac{1-p^k}{p^k(1-p)},\qquad \mu_2=\frac{1-q^k}{q^k(1-q)}.$$
因此N的更新速率为
$$\frac{1}{\mu}=\frac{p^k(1-p)}{1-p^k}+\frac{q^k(1-q)}{1-q^k}.$$

所以平均实验次数为

$$\mu = \frac{(1-p^k)(1-q^k)}{pq(p^{k-1}+q^{k-1}-p^{k-1}q^{k-1})}. \qquad \square$$

定理13.2 设更新过程$N=\{N(t);\ t\geq 0\}$的间隔时间分布的均值μ与方差σ^2都存在且有限, 那么对一切实数y,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big(\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\leq y\Big)=\Phi(y),$$

其中$\Phi(y)$是标准正态分布函数.

证明 令$r_t=t/\mu+y\sigma\sqrt{t/\mu^3}$, $\hat{r}_t=[r_t]+1$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\leq y\Big)&=\mathbb{P}(N(t)\leq [r_t])=\mathbb{P}(N(t)<\hat{r}_t)\\&=\mathbb{P}(T_{\hat{r}_t}>t)=\mathbb{P}\Big(\frac{T_{\hat{r}_t}-\hat{r}_t\mu}{\sigma\sqrt{\hat{r}_t}}>\frac{t-\hat{r}_t\mu}{\sigma\sqrt{\hat{r}_t}}\Big).\end{aligned}$$

其中$\{T_n\}$是N的更新时刻序列. 注意到$\hat{r}_t\to\infty$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-\hat{r}_t\mu}{\sigma\sqrt{\hat{r}_t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-y\sigma\sqrt{t/\mu}}{\sigma\sqrt{t/\mu+y\sigma\sqrt{t/\mu^3}}}=-y,$$

以及

$$\frac{T_{\hat{r}_t}-\hat{r}_t\mu}{\sigma\sqrt{\hat{r}_t}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{\hat{r}_t}}\sum_{k=1}^{\hat{r}_t}(W_k-\mu),$$

其中$\{W_k\}$为N的间隔时间序列, 由中心极限定理可知结论成立. □

例13.2 一台机器相继不间断地加工某一种零件, 假定加工一件零件的时间服从1到3 分钟的均匀分布, 估计100个小时内以0.95的概率至少可加工的零件个数.

解: 以分为时间单位, 加工一件零件时间的均值为2, 方差为1/3. 以$N(t)$ 表示到t时刻加工完成的零件数. 由定理13.2, 当t很大时$N(t)$近似服从均值为$t/2$, 方差为$t/24$的正态分布. 设所求零件个数为x, 那么

$$0.95=\mathbb{P}(N(6000)>x)=\mathbb{P}\Big(\frac{N(6000)-3000}{\sqrt{6000/24}}>\frac{x-3000}{5\sqrt{10}}\Big)\approx 1-\Phi\big(\frac{x-3000}{5\sqrt{10}}\big).$$

由此可知$x\approx 3000-1.64\times 5\sqrt{10}\approx 2974$. □

(B) 更新极限定理

定理13.3(初等更新定理) 设更新过程N的间隔时间分布均值为μ, 那么其更新函数$m(t)$满足$\lim\limits_{t\to\infty} m(t)/t=1/\mu$.

证明 记N的间隔时间序列为W_k, 更新时间序列为T_k. 若$\mu<+\infty$, 由习题12.6可知

$$t\leq \mathbb{E}(T_{N(t)+1})=\mu(1+m(t)), \tag{4.2.2}$$

可知
$$\liminf_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu}. \tag{4.2.3}$$
另一方面, 对任意$i\geq 1$, 令$\tilde{W}_i=W_i\wedge M$,
$$\tilde{T}_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{W}_i,\ \tilde{N}(t)=\sup\{n,\tilde{T}_n\leq t\},\ \tilde{m}(t)=\mathbb{E}(\tilde{N}(t)).$$
那么由(4.2.2)可知
$$t+M\geq\mathbb{E}(\tilde{T}_{\tilde{N}(t)+1})=\mathbb{E}(\tilde{W}_1)(1+\tilde{m}(t)).$$
因为$\tilde{m}(t)\geq m(t)$,
$$\limsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leq\frac{1}{\mathbb{E}(\tilde{W}_1)}=\frac{1}{\mathbb{E}(W_1\wedge M)}.$$
令$M\to\infty$并结合(4.2.3)可得$\lim\limits_{t\to\infty}m(t)/t=1/\mu$. □

为进一步研究更新方程局部有界解的性质, 我们需要如下的一些准备.

定义13.1 设F为分布函数, a成为是F的增加点, 如果对任意$\varepsilon>0$,
$$F(a+\varepsilon)-F(a-\varepsilon)>0.$$
称F所有增加点的集合
$$A=\{a,a\text{是}F\text{的增加点}\}$$
为分布F的支撑集, 记作supp$F$. 若存在正数$\lambda>0$使得
$$\mathrm{supp}F\in\{k\lambda,k\in\mathbf{Z}\},$$
则称F是格子点分布的, 否则称为非格子点分布. 称使上式成立的最大λ为分布F的步长.

显然具有连续部分的分布函数是非格子点分布的; 取值为$0,1,2,\cdots$的离散型随机变量服从步长为1的格子点分布.

对间隔时间为非格子点分布的更新过程, 我们有如下的所谓Blackwell极限定理. 该定理可对更一般的情形成立, 证明也比较复杂。我们把定理证明放在本章最后一节, 供大家参考.

定理13.4 若更新过程N的间隔时间分布F是非格子点分布, 均值为μ. 那么对任意$a\geq 0$, N的更新函数$m(t)$满足
$$\lim_{t\to\infty}(m(t+a)-m(t))=\frac{a}{\mu}.$$
定义13.2 设f是定义在$[0,\infty)$上的函数, 对任意$\delta>0,n\geq 1$, 令
$$\bar{f}_{n,\delta}=\sup\{f(t),(n-1)\delta\leq t\leq n\delta\}\qquad \underline{f}_{n,\delta}=\inf\{f(t),(n-1)\delta\leq t\leq n\delta\},$$

$$\underline{\sigma}(f,\delta)=\delta\sum_{n=1}^{\infty}\underline{f}_{n,\delta},\qquad \bar{\sigma}(f,\delta)=\delta\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{n,\delta}.$$

称f是直接黎曼可积的, 如果每个$\delta>0$, $\bar{\sigma}(f,\delta),\underline{\sigma}(f,\delta)$是绝对收敛的而且

$$\lim_{\delta\to 0}\bar{\sigma}(f,\delta)=\lim_{\delta\to 0}\underline{\sigma}(f,\delta).$$

命题13.5 (1)若f在$[0,\infty)$上直接R可积, 那么f黎曼可积且

$$\int_0^{\infty}f(t)dt=\lim_{\delta\to 0}\bar{\sigma}(f,\delta)=\lim_{\delta\to 0}\underline{\sigma}(f,\delta).$$

(2)若f是$[0,\infty)$上一个单调函数且

$$\int_0^{\infty}|f(t)|dt<\infty$$

那么f在$[0,\infty)$上直接黎曼可积.

(3) 若f直接黎曼可积, 那么$|f|$直接黎曼可积.

证明 (1)事实上对任意$T>0$, 取$a_k=T/k$, 则

$$0=\lim_{k\to\infty}[\bar{\sigma}(f,\delta)-\underline{\sigma}(f,\delta)]\geq\lim_{k\to\infty}a_k\sum_{k=1}^{k}[\bar{f}_{n,a_k}-\underline{f}_{n,a_k}]\geq 0,$$

这表明f在$[0,T]$上黎曼可积, 且

$$\lim_{k\to\infty}a_k\sum_{n=1}^{k}\bar{f}_{n,a_k}=\lim_{k\to\infty}a_k\sum_{n=1}^{k}\underline{f}_{n,a_k}=\int_0^T f(s)\mathrm{d}s.$$

现取$a_k=1/2^k$, 对任意给定的正整数M, 由

$$|\bar{\sigma}(f,a_k)-\int_0^M f(t)\mathrm{d}t|\leq\sum_{n=M}^{\infty}|\bar{f}_{n,1}|+|a_k\sum_{n=1}^{2^kM}\bar{f}_{n,a_k}-\int_0^M f(t)\mathrm{d}t|$$

以及

$$\lim_{k\to\infty}a_k\sum_{n=1}^{2^kM}\bar{f}_{n,a_k}=\int_0^M f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\bar{\sigma}(f,a_k)-a_k\sum_{n=1}^{2^kM}\bar{f}_{n,a_k}=a_k\sum_{n=2^kM+1}^{\infty}\bar{f}_{n,a_k}\leq\sum_{n=M}^{\infty}|\bar{f}_{n,1}|\to 0,$$

可知

$$\int_0^{\infty}f(t)dt=\lim_{M\to\infty}\int_0^M f(t)dt=\lim_{a_k\to 0}\bar{\sigma}(f,a_k)=\lim_{\delta\to 0}\bar{\sigma}(f,\delta).$$

(2)不妨设f单调不增. 此时由绝对可积性可知$f\geq 0$. 对任意$\delta>0$,

$$\delta\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{f}_{n,\delta}|\leq\delta f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\delta}^{n\delta}|f|\mathrm{d}x=\delta f(0)+\int_0^{\infty}|f|\mathrm{d}x<\infty,$$

$$\delta\sum_{n=1}^{\infty}|\underline{f}_{n,\delta}|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\delta}^{n\delta}|f|\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}|f|\mathrm{d}x<\infty,$$

而且对任意$T>1$,

$$|\delta\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{n,\delta}-\delta\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{n,\delta}|\leq\sum_{n=1}^{[T/\delta]+1}\delta(\bar{f}_{n,\delta}-\underline{f}_{n,\delta})+2\int_{T-1}^{\infty}|f|\mathrm{d}x.$$

先令$\delta\to 0$,再令$T\to\infty$, 由f的绝对可积性可知上式右边收敛于零.

(3) 记$g=|f|$. 对任意$\delta>0$, 注意到

$$\bar{g}_{n,\delta}\leq(|\bar{f}_{n,\delta}|+|\underline{f}_{n,\delta}|),$$

因此由f直接黎曼可积性易知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underline{g}_{n,\delta}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\bar{g}_{n,\delta}\leq\sum_{n=1}^{\infty}(|\bar{f}_{n,\delta}|+|\underline{f}_{n,\delta}|)<\infty.$$

另一方面, 对任意$\epsilon>0$, 仍由f直接黎曼可积性, 存在N, 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}(|\bar{f}_{n,1}|+|\underline{f}_{n,1}|)\leq\epsilon.$$

从而

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\bar{g}_{n,1}\leq\epsilon,$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\delta\sum_{i=1}^{\infty}\bar{g}_{n,\delta}-\delta\sum_{i=1}^{\infty}\underline{g}_{n,\delta}\right|\\ &\leq\delta\sum_{i=1}^{\lfloor N/\delta\rfloor+1}\left(\bar{g}_{n,\delta}-\underline{g}_{n,\delta}\right)+\delta\sum_{n=\lfloor N/\delta\rfloor+2}^{\infty}\bar{g}_{n,\delta}\\ &\leq\delta\sum_{i=1}^{\lfloor N/\delta\rfloor+1}\left(\bar{g}_{n,\delta}-\underline{g}_{n,\delta}\right)+(1+\delta)\sum_{n=N+1}^{\infty}\bar{g}_{n,1}\\ &\leq\delta\sum_{i=1}^{\lfloor N/\delta\rfloor+1}\left(\bar{g}_{n,\delta}-\underline{g}_{n,\delta}\right)+(1+\delta)\epsilon.\end{aligned}$$

由于f直接黎曼可积, 因此f在$[0,N+1]$上黎曼可积, 从而$|f|$在$[0,N+1]$上也黎曼可积. 令$\delta\to 0$可得

$$\delta\sum_{i=1}^{\lfloor N/\delta\rfloor+1}\left(\bar{g}_{n,\delta}-\underline{g}_{n,\delta}\right)\to 0,$$

再由ϵ的任意性可得$\delta\to 0$时

$$\delta\sum_{i=1}^{\infty}\bar{g}_{n,\delta}-\delta\sum_{i=1}^{\infty}\underline{g}_{n,\delta}\to 0.$$

这表明$g=|f|$直接黎曼可积. □

利用更新函数的性质我们可以得到下面的所谓关键更新定理, 该定理是我们研究长时间后更新方程解极限的主要工具.

定理13.6 设F为非负随机变量X的分布函数, 期望为μ(可以为∞), 假设f直接黎曼可积, A是更新方程

$$B(t)=f(t)+\int_0^t B(t-s)\mathrm{d}F(s) \tag{4.2.4}$$

的局部有界解.

(1) 如果F是非格子点分布, 那么

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\int_0^\infty f(s)ds/\mu.$$

(2) 如果F是步长为d的格子点分布, 那么对任意$0\le c<d$,

$$\lim_{n\to\infty}A(c+nd)=d\sum_{n=0}^\infty f(c+nd)/\mu.$$

证明* (1) 由定理12.4可知

$$A(t)=f(t)+\int_0^t f(t-s)\mathrm{d}m(s).$$

任取$a\ge 0$. 对任意$n\ge 1$以及$t\in[(n-1)a,na)$, 令

$$\bar{f}_{n,a}(t)=\bar{f}_{n,a}=\sup\{f(t),(n-1)a\le t<na\}$$

以及

$$\underline{f}_{n,a}(t)=\underline{f}_{n,a}=\inf\{f(t),(n-1)a\le t<na\}.$$

任取$k>0$, 对任意$t>ka$, 那么由

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^t \underline{f}_{n,a}(t-s)\mathrm{d}m(s)-\sum_{n=1}^k\underline{f}_{n,a}(m(t-(n-1)a)-m(t-na))\Big|\\&=\Big|\int_{ka}^t\underline{f}_{n,a}(t)\mathrm{d}m(s)\Big|\le c(a)\sum_{n=k+1}^\infty\overline{|f|}_{n,a},\end{aligned}$$

其中$c(a)=\sup_{t\ge0}(m(t)-m(t-a))<\infty$,

$$\overline{|f|}_{n,a}=\sup\{|f(t)|,(n-1)a\le t<na\}.$$

先令$t\to\infty$, 再令$k\to\infty$, 由Blackwell定理以及$|f|$的直接黎曼可积性得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t\underline{f}_{n,a}(t-s)\mathrm{d}m(s)&=\lim_{k\to\infty}\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^k\underline{f}_{n,a}(m(t-(n-1)a)-m(t-na))\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k\underline{f}_{n,a}\frac{a}{\mu}=\frac{a}{\mu}\sum_{n=1}^\infty\underline{f}_{n,a}.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

同理可知

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\bar{f}_{n,a}(t-s)\mathrm{d}m(s)=\frac{a}{\mu}\sum_{n=1}^\infty\bar{f}_{n,a}. \tag{4.2.6}$$

由于对任意$a>0$

$$\int_0^t \underline{f}_{n,a}(t-s)\mathrm{d}m(s) \le \int_0^t f(t-s)\mathrm{d}m(s) \le \int_0^t \bar{f}_{n,a}(t-s)\mathrm{d}m(s),$$

综合(4.2.5)和(4.2.6)并令$a\to 0$即得所需结论.

(2) 当F是步长为d的格子点分布时, 由更新方程, 对任意$n\ge 1$

$$A(c+nd)=f(c+nd)+\sum_{k=0}^{n} A(c+(n-k)d)\nu(kd),$$

其中$\nu(kd)=F(kd)-F((k-1)d)=\mathbb{P}(X=kd)$. 为方便, 对任意$n\ge 0$, 记

$$a_n=B(c+nd),\quad b_n=f(c+nd),\quad u_n=\nu(nd).$$

则

$$a_n=b_n+\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}u_k. \tag{4.2.7}$$

由u_k的定义及条件可知, 存在$m_1,\cdots,m_r$ 使得$u_{m_1},\cdots,u_{m_r}>0$且$m_1,\cdots,m_r$互素. 类似于定理2.2.15的证明可知, 存在正整数J, 对任意整数$j\ge J$, 存在非负整数$l_1,\cdots,l_r$, 使得

$$j=l_1m_1+l_2m_2+\cdots+l_rm_r. \tag{4.2.8}$$

下面我们将证明分三步.

第一步, 证明$\{a_n\}$为有界数列. 注意到$\sum_{k=0}^\infty u_k=1$, $u(0)<1$, 令

$$c_n=\frac{\sum_{k=0}^n |b_k|}{1-u_0},\qquad n\ge 0,\quad c_{-1}=0.$$

由f的假设条件可知

$$\sum_{k=0}^\infty |b_k|=\sum_{k=0}^\infty |f(c+kd)|<\infty.$$

注意到c_k为单调增加数列, 由数学归纳法容易证明, 对任意$n\ge 0$,

$$|a_n|\le \frac{|b_n|}{1-u_0}+c_{n-1}=c_n.$$

因此$\{a_n\}$为有界数列. 记$M=\sup\limits_{n\ge 0}|a_n|$.

第二步, 证明$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \begin{cases} d\sum\limits_{n=0}^\infty f(c+nd)/\mu, & \mu<\infty,\\ 0, & \mu=\infty.\end{cases}$

为此记$l=\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. 此时存在$n_i\to\infty$使得$a_{n_i}\to l$. 任取$m_k$, $1\le k\le r$, 若$n_i\to\infty$时$a_{n_i-m_k}\not\to l$, 那么存在$l'<l$ 以及无穷多个i使得$a_{n_i-m_k}\le l'$.

令$\varepsilon = u_{m_k}(l-l')/4$. 由$\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = 1$ 可知存在$N > m_k$,当$n \ge N$时

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k < \varepsilon/M$$

进而存在$n_j \ge N$使得

$$a_{n_j} > l-\varepsilon, \quad a_{n_j-m_k} < l', \quad |b_{n_j}| \le \varepsilon$$

而且对一切$n \ge n_j - N$, $a_n \le l+\varepsilon$成立. 此时

$$\begin{aligned} a_{n_j} &\le \sum_{k=0}^{n_j} a_{n_j-k}u_k + \varepsilon < \sum_{k=0}^{N} a_{n_j-k}u_k + M\sum_{k=N+1}^{n_j} u_k + \varepsilon \\ &< (1-u_{m_k})(l+\varepsilon) + u_{m_k}l' + 2\varepsilon \\ &< l + 3\varepsilon - u_{m_k}(l-l') = l-\varepsilon. \end{aligned}$$

矛盾表明

$$\lim_{n_i\to\infty} a_{n_i-m_k} = l.$$

反复使用以上方法可得对任意非负整数$l_1,\cdots,l_k$,

$$\lim_{n_i\to\infty} a_{n_i-\sum_{k=1}^{r} l_k m_k} = l.$$

由(4.2.8)可知, 对任意$j \ge J$, $\lim\limits_{n_i\to\infty} a_{n_i-j} = l$. 记$n_i' = (n_i-J)\vee 1$, 对任意$j \ge 0$,

$$\lim_{n_i'\to\infty} a_{n_i'-j} = l.$$

令$U_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, 由关系式$u_k = U_{k-1}-U_k$以及$U_{-1}=1$, (4.2.7)可改写为

$$U_0a_n + U_1a_{n-1} + \cdots + U_na_0 = U_0a_{n-1} + U_1a_{n-2} + \cdots + U_{n-1}a_0 + b_n, \quad n \ge 1.$$

记$A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k a_{n-k}$, 那么$A_0 = b_0$且$A_n = A_{n-1}+b_n$, 进而$A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. 因此对任意$N$,

$$U_0a_{n_i'} + \cdots + U_Na_{n_i'-N} \le A_{n_i'} \le \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|.$$

先令$n_i' \to \infty$再令$N\to\infty$并注意到$\sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ku_k$得

$$l \le \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} ku_k} = \begin{cases} d\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(c+nd)/\mu, & \mu<\infty, \\ 0, & \mu=\infty. \end{cases}$$

第三步, 证明$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \ge \begin{cases} d\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(c+nd)/\mu, & \mu<\infty, \\ 0, & \mu=\infty. \end{cases}$

令$\underline{l} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, 由第二步的类似讨论同样可知存在$n_i$ 使得对任意$k \geq 0$,

$$a_{n_i-k} \to \underline{l}.$$

记$g(N) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} U_k$, 由$\mu = \sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k < \infty$ 可知$g(N) \to 0$. 注意到

$$\sum_{k=0}^{n_i} b_k = \sum_{k=0}^{n_i} U_k a_{n_i-k} \leq \sum_{k=0}^{N} U_k a_{n_i-k} + g(N)M.$$

先令$n_i \to \infty$再令$N \to \infty$得

$$\underline{l} \geq \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k u_k} = \begin{cases} d\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(c+nd)/\mu, & \mu < \infty, \\ 0, & \mu = \infty. \end{cases}$$

综合第二、三两步的结果可知(2)成立. □

注13.1 在(2)证明中我们得到了如下结果：若数列$\{b_n\}$和非负数列$\{a_n\}$, $\{c_n\}$满足

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = 1$ 且数集$\{n \geq 1, c_n > 0\}$的最大公因子为1,

(2) 对任意$n \geq 0$, $a_n = b_n + \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} c_k$,

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$.

那么

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n},$$

其中商式分母为$+\infty$时取值为0.

例13.3 设X是以$P = (p_{i,j})_{i,j\in S}$为转移概率的马氏链, 若j非周期常返, 证明

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j\text{是零常返}, \\ f_{ij}/m_{jj}, & j\text{是正常返}. \end{cases}$$

证明 注意到对任意$n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} &= \mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}_i(X_n = j, X_{n-1} = j) + \mathbb{P}_i(X_n = j, X_{n-1} \neq j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_n = j, X_k = j, X_v \neq j, v = k+1, \cdots, n-1) \\ &\qquad + \mathbb{P}_i(X_n = j, X_v \neq j, v = 1, \cdots, n-1) \\ &= f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{i,j}^{(k)} f_{jj}^{(n-k)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{i,j}^{(n-k)} f_{jj}^{(k)} \end{aligned}$$

对$n\geq 1$, 令$a_n=p_{i,j}^{(n)}$, $b_n=f_{ij}^{(n)}$, $c_n=f_{jj}^{(n)}$, 并约定$a_0=b_0=c_0=0$, 那么由j非周期常返可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n=1$以及集合$\{n:c_n>0\}$中所有元素的最大公因子为1(参见习题5.7). 容易验证注记13.1中其他两条件对$\{a_n\}$, $\{b_n\}$也成立, 因此

$$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_{ij}^{(n)}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{jj}^{(n)}}=\begin{cases}0, & j\text{是0常返},\\ f_{ij}/m_{jj}, & j\text{是正常返}.\end{cases}\qquad\square$$

例13.4 设更新过程N的间隔时间分布F连续且均值μ与方差σ^2都有限. $L(t)$是N在时刻t的总寿命, 求$\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}(L(t))$.

解 由习题12.3可知,

$$\mathbb{E}(L(t))=\int_t^{\infty}s\mathrm{d}F(s)+\int_0^t\int_{t-s}^{\infty}u\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}m(s).$$

令$h(t)=\int_t^{\infty}s\mathrm{d}F(s)$. 显然$h(t)$是单调不增的. 而且由于$F$均值$\mu$与方差$\sigma^2$都有限,

$$\int_0^{\infty}h(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}u\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}u^2\mathrm{d}F(u)=\sigma^2+\mu^2<\infty.$$

因此由关键更新定理可得

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(L(t))=\frac{\int_0^{\infty}h(t)\mathrm{d}t}{\mu}=\mu+\frac{\sigma^2}{\mu}.\qquad\square$$

上例计算结果表明, 随着$t\to\infty$, t时刻总寿命的均值收敛到一个严格大于平均间隔时间的极限. 这从另外一个角度验证了我们在上节中提到的长度偏离取样或检验悖论现象.

例13.5 设顾客按强度为λ的泊松过程来到某个只有一个服务窗口的服务台, 设服务台服务每个顾客所需时间是独立同分布的连续随机变量,分布为G,期望为$1/\mu$, 其中$\mu>\lambda$. 若顾客到达发现需要等待则立刻离开,否则接受服务; 问长时间后系统空闲的比例.

[分析] 从0时间开始观察，那么服务台空闲、忙碌再空闲, 这样周而复始. 记第i个周期中的忙碌时长为Y_i, 空闲时长为U_i. 由假设可知Y_i 就是第i个顾客的服务时间, 相互独立且$\mathbb{E}(Y_i)=1/\mu$; U_i就是从第$i-1$ 个顾客服务完到第i个顾客到达的时间间隔，由指数分布的无记忆性, U_i服从参数为λ 的指数分布, $\mathbb{E}(U_i)=1/\lambda$. 若以一个空闲与忙碌为周期, 那么观察到的服务系统就是一个更新过程. 更新系统的一个等待时长为$W_i=Y_i+U_i$, 平均等待间长为$1/\lambda+1/\mu$. 令$A_t=\{t\text{时刻系统空闲}\}$, 所求比例为$\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{P}(A_t)$.

解 如上定义Y_i,U_i,W_i. 记W_i的分布为F. 则F是均值为$1/\mu+1/\lambda$的连续分布. 那

么

$$f(t) := \mathbb{P}(A_t) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(A_t|T_1)) = \int_0^\infty \mathbb{P}(A_t|T_1 = s)\mathrm{d}F(s)$$
$$= \int_t^\infty \mathbb{P}(U_1 > t|W_1 = s)\mathrm{d}F(s) + \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-s})\mathrm{d}F(s)$$

注意到$\int_t^\infty \mathbb{P}(U_1 > t|W_1 = s)\mathrm{d}F(s) = \mathbb{P}(U_1 > t, W_1 > t) = \mathbb{P}(U_1 > t)$, 因此

$$f(t) = \mathbb{P}(U_1 > t) + \int_0^t f(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

由关键更新定理,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\int_0^\infty \mathbb{P}(U_1 > t)\mathrm{d}t}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$ □

定理13.6 设更新过程N的间隔时间分布F为非格子点分布, $\mu_F < \infty$, 则N为Poisson过程当且仅当$(R(t), A(t))$的极限分布相互独立.

证明 对任意$0 \le x \le t$, 由更新技巧不难得

$$\mathbb{P}(A(t) \ge x) = \bar{F}(t)\mathbf{1}_{\{t\ge x\}} + \int_0^t \mathbb{P}(A(t-s) \ge x)\mathrm{d}F(s),$$

进而由关键更新定理可知

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(A(t) \ge x) = H(x),$$

其中$H(x) = \int_x^\infty \bar{F}(t)dt/\mu_F$为连续函数. 由于对任意$x, y \ge 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(R(t) > x, A(t) \ge y) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(A(t+x) \ge x+y) = H(x+y),$$

因此$(R(t), A(t))$的极限分布相互独立当且仅当

$$H(x+y) = H(x)H(y) \Leftrightarrow H(x) = \mathrm{e}^{-x/\mu_F} \Leftrightarrow \bar{F}(x) = \mathrm{e}^{-x/\mu_F}$$
$$\Leftrightarrow N\text{为Poisson过程}.$$ □

练习题

13.1 两台机器独立不间断地加工零件, 若其中一台加工零件的时间服从参数为1/2 的指数分布, 另外一台服从$(0, 4)$ 上的均匀分布, 求到时间$t = 100$ 时两台机器一起至少加工90 个零件的概率估计.

13.2 设N是间隔时间分布为连续分布的更新过程, 平均间隔时间为μ, $A(t)$表示在时刻t的年龄, 对任意$c > 0$, 问长时间后事件$\{A(t) < c\}$ 发生的概率.

13.3 令$L(t)$表示时刻t更新过程的总寿命,若平均间隔时间$\mu < \infty$, 证明

$$\lim_{t\to\infty} L(t)/t = 0, \quad a.s.$$

13.4 设更新过程N的间隔时间分布F连续且均值μ与方差σ^2 都有限, 证明

$$\lim_{t\to\infty} (m(t) - t/\mu) = (\sigma^2 - \mu^2)/2\mu^2, \quad a.s.$$

13.5 设更新过程N的间隔时间分布F的均值μ与方差σ^2 都有限. $A(t)$是N在时刻t的年龄. 在(1)在F是非格子分布条件下计算$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(A(t))$; (2) 在$F$是步长为$d$的格子点分布条件下讨论$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(A(t))$.

13.6 设$g(t)$是积分方程$G(t)=\mathrm{e}^{-t}+\int_0^t G(t-s)\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s$ 的最小非负解, 求$\lim_{t\to\infty}g(t)$. ([提示] 注意关键更新定理条件)

13.7 对于直接黎曼可积函数, 证明

(1) 若f直接黎曼可积, 那么对任意常数k, kf也直接黎曼可积;

(2) 若f,g都直接黎曼可积, 那么$f+g$也直接黎曼可积;

(3) f直接黎曼可积当且仅当$f^+=f\vee 0$与$f^-=(-f)\vee 0$都直接黎曼可积.

13.8 设F是步长为d的格子点分布, 数学期望为μ, $m(t)$是F的更新函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}[m(nd)-m((n-1)d)]=d/\mu.$$

13.9 设N_1, N_2是两独立的更新过程, 具有相同的非格子点分布F, 且$\mu_{_F}<\infty$. 令$N=N_1+N_2$, 若N仍为更新过程, 那么N_1,N_2,N都是Poisson过程.

4.3 延迟更新过程

在记录随机现象时,常常会发现第一个事件到达时间分布会与后面有所不同. 为研究这类计数过程我们引入延迟更新过程.

A. 延迟更新过程

定义14.1 称计数过程$N=\{N(t),t\geq 0\}$为延迟更新过程, 若其间隔时间$\{W_k,k\geq 1\}$相互独立, 且$\{W_k,k\geq 2\}$同分布, 满足$\mathbb{P}(W_2=0)<1$. 通常我们称W_2的分布F为延迟更新过程N的间隔时间分布.

由定义可知, W_1的分布为延迟更新过程的首个事件发生时间的分布, 这个分布可以与间隔时间分布不同. 为了后文引用方便,我们称其为延迟时间分布. 此后我们在讨论延迟更新过程时,依据情况不同,我们有时会突出其间隔时间分布和/或其延迟时间分布.

仍记第k次事件到达的时间为T_k, 与更新过程一样,(4.1.1)-(4.1.3) 成立, 而且

$$\tilde{N}(t):=\{N(t+T_1)-1\}$$

是以F为间隔时间分布的更新过程. 进一步我们有

引理14.1 设N为延迟更新过程, 则对一切$t\geq 0$, $a>0$, $k\geq 1$,

$$\mathbb{P}(N(t+a)-N(t)\geq k)\leq \mathbb{P}(\tilde{N}(a)+1\geq k).$$

进而对一切$t\geq 0$,

$$m(t+a)-m(t)\leq \tilde{m}(a)+1,$$

其中$m(t)=\mathbb{E}(N(t))$, $\tilde{m}(t)=\mathbb{E}(\tilde{N}(t))$.

证明 以T_i表示延迟更新过程N的更新时间序列. 对任意$k\geq 1$, 由

$$\mathbb{P}(N(t+a)-N(t)\geq k)=\mathbb{P}\Big(\sum_{i=N(t)+1}^{\infty}\mathbf{1}_{(t,t+a]}(T_i)\geq k\Big),$$

以及

$$\begin{aligned}\{\mathbf{1}_{(t,t+a]}(T_i)\geq k\} &= \Big\{\sum_{i=N(t)+1}^{\infty}\mathbf{1}_{(t-T_{N(t)+1},t+a-T_{N(t)+1}]}(T_i-T_{N(t)+1})\geq k\Big\}\\ &\subset \Big\{1+\sum_{i=N(t)+2}^{\infty}\mathbf{1}_{[0,a]}(T_i-T_{N(t)+1})\geq k\Big\},\end{aligned}$$

可知

$$\mathbb{P}(N(t+a)-N(t)\geq k)\leq \mathbb{P}\Big(1+\sum_{i=N(t)+2}^{\infty}\mathbf{1}_{[0,a]}(T_i-T_{N(t)+1})\geq k\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{[0,a]}(\sum_{j=1}^{k}W_j)\geq k\Big)$$
$$\leq \mathbb{P}(1+\tilde{N}(a)\geq k).$$

因此由

$$m(t+a)-m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N(t+a)-N(t)\geq k)$$

易知 $m(t+a)-m(t)\leq \mathbb{P}(1+\tilde{N}(a)\geq k)=1+\tilde{m}(a).$ □

注记14.1 由证明易知, 对任意$k\geq 1$,

$$\mathbb{E}((N(t+a)-N(t))\mathbf{1}_{\{N(t+a)-N(t)\geq k\}})\leq \mathbb{E}((1+\tilde{N}(a))\mathbf{1}_{\{1+\tilde{N}(a)\geq k\}}).$$

定理14.2 设$N=\{N(t)\}$为延迟更新过程, 间隔时间分布为F, 延迟时间分布为G, 那么对一切$t\geq 0$, $m(t)=\mathbb{E}(N(t))<\infty$,

$$m(t)=\sum_{n=0}^{\infty}G*F^{*n} \tag{4.3.1}$$

是更新方程

$$m(t)=G(t)+\int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s) \tag{4.3.2}$$

的唯一局部有界解.

证明 由于

$$m(t)=\mathbb{E}(N(t))=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N(t)\geq k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(T_k\leq t)=\sum_{n=1}^{\infty}G*F^{*(n-1)}(t)<\infty$$

可知$m(t)$局部有界, 而且

$$m(t)=G(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G*F^{*n}(t)$$
$$=G(t)+G*[\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}](t)=G(t)+G*m_F(t). \tag{4.3.3}$$

注意到m_F时以F为间隔时间分布的更新过程的更新函数, 由更新方程局部有界解的表示定理(定理12.4)可知, $m(t)$是如下更新方程

$$m(t)=G(t)+\int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s)$$

的唯一局部有界解. □

与更新过程一样, 我们也把$m(t)=\mathbb{E}(N(t))$称为延迟更新过程N的更新函数.

延迟更新过程也有大数定律, 中心极限定理与初等更新定理, 而且证明类似.

具体证明作为练习, 请读者自己补充.

定理14.3 设$N=\{N(t),t\geq 0\}$是以F为间隔时间分布的延迟更新过程, 那么

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu_F},\quad a.s.$$

而且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu_F},$$

其中μ_F是F的均值, $\mu_F=\infty$时$1/\mu_F$ 为0. 进一步若F的期望μ_F与方差σ_F^2都有限, 那么则对一切实数y,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big(\frac{N(t)-t/\mu_F}{\sigma_F\sqrt{t/\mu^3}}\leq y\Big)=\Phi(y),$$

其中$\Phi(y)$是标准正态分布函数.

关键更新定理也可应用到延迟更新函数, 为此我们给出如下引理.

引理14.4 若$[0,\infty)$上非负函数$f(t)$是直接黎曼可积的, G 为一个$[0,\infty)$上有限测度, 那么$H(t)=f*G(t)$也直接黎曼可积.

证明 注意$H(t)\geq 0$. 对任意$\delta>0$, 记

$$\bar{H}_n=\sup_{(n-1)\delta\leq t\leq n\delta}H(t)\geq \underline{H}_n=\min_{(n-1)\delta\leq t\leq n\delta}H(t)\geq 0,$$
$$\bar{f}_n=\sup_{(n-1)\delta\leq t\leq n\delta}f(t)\geq \underline{f}_n=\min_{(n-1)\delta\leq t\leq n\delta}f(t)\geq 0.$$

对任意$t\in[k\delta,(k+1)\delta]$, 存在$c_t\in[0,\delta]$使得$t=c_t+k\delta$

$$\begin{aligned}H(t)&=\int_0^{c_t}f(t-s)dG(s)+\sum_{i=1}^{k}\int_{c_t+(i-1)\delta}^{c_t+i\delta}f(t-s)\mathrm{d}G(s)\\&\leq \bar{f}_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\bar{f}_{k+1-i}[G((i+1)\delta)-G((i-1)\delta)].\end{aligned}$$

由f直接黎曼可积得

$$\begin{aligned}\delta\sum_{k=1}^{\infty}\bar{H}_k&\leq\delta\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\bar{f}_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\bar{f}_{k+1-i}[G((i+1)\delta)-G((i-1)\delta)]\Big)\\&=\delta\sum_{k=2}^{\infty}\bar{f}_k+\delta\sum_{i=1}^{\infty}[G((i+1)\delta)-G((i-1)\delta)]\sum_{k=1}^{\infty}\bar{f}_k\\&\leq\delta\sum_{k=2}^{\infty}\bar{f}_k+2G([0,\infty))\delta\sum_{k=1}^{\infty}\bar{f}_k<\infty.\end{aligned}$$

另外由

$$\begin{aligned}\int_0^\infty H(t)dt&=\int_0^\infty\int_0^t f(t-s)\mathrm{d}G(s)\mathrm{d}t=\int_0^\infty\mathrm{d}G(s)\int_s^\infty f(t-s)\mathrm{d}t\\&=G([0,\infty))\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t<\infty\end{aligned}$$

可知, $H(t)$黎曼可积, 因而对任意$T \geq 0$, 记$n_T = [T/\delta]$, 当$\delta \to 0$时
$$\int_0^T H(t)dt \leftarrow \delta \sum_{k=1}^{n_T} \underline{H}_k \leq \delta \sum_{k=1}^{n_T} \bar{H}_k \to \int_0^T H(t)\mathrm{d}t$$
因此
$$\lim_{\delta\to 0} \delta \sum_{k=1}^{\infty} \underline{H}_k \geq \int_0^T H(t)dt \to \int_0^\infty H(t)\mathrm{d}t,$$
且对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta_0 > 0$, 当$\delta < \delta_0$时
$$\delta \sum_{k=1}^{n_T} \bar{H}_k \leq \int_0^T H(t)\mathrm{d}t + \epsilon \leq \int_0^\infty H(t)\mathrm{d}t + \epsilon.$$
先令$T \to \infty$, 再令$\delta \to 0$, 最后令$\epsilon \to 0$得
$$\lim_{\delta\to 0} \delta \sum_{k=1}^{\infty} \bar{H}_k \leq \int_0^\infty H(t)\mathrm{d}t.$$
因此
$$\lim_{\delta\to 0} \delta \sum_{k=1}^{\infty} \bar{H}_k = \lim_{\delta\to 0} \delta \sum_{k=1}^{\infty} \underline{H}_k = \int_0^\infty H(t)\mathrm{d}t.$$
综上所述可知$H(t)$直接黎曼可积. □

定理14.5 设$f(t)$为$[0,\infty)$上直接黎曼可积函数, $N = \{N(t), t \geq 0\}$是间隔时间分布为F的延迟更新过程, $m(t) = \mathbb{E}(N(t))$. 那么当F是非格子点分布时,
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(t-s)\mathrm{d}m(s) = \frac{1}{\mu_F} \int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t.$$
其中μ_F为F的均值. 当F是步长为λ的格子点分布时, 对任意$c \in [0, \lambda)$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{c+n\lambda} f(c+n\lambda - s)\mathrm{d}m(s) = \frac{\lambda}{\mu_F} \sum_{k=0}^{\infty} f * G(c+k\lambda),$$
其中G是延迟时间分布.

证明 注意到$f = f^+ - f^-$. f直接黎曼可积当且仅当f^+, f^-直接黎曼可积, 而且
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(t-s)\mathrm{d}m(s) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f^+(t-s)\mathrm{d}m(s) - \lim_{t\to\infty} \int_0^t f^-(t-s)\mathrm{d}m(s).$$
因此不妨设$f \geq 0$. 由$m(t) = G(t) + G * m_F(t)$可知
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(t-s)\mathrm{d}m(s) = \lim_{t\to\infty} [f * G(t) + f * G * m_F(t)].$$
由引理14.3可知$f * G$直接黎曼可积分, 因此由定理13.4, 当F为非格子点分布时
$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(t-s)\mathrm{d}m(s) &= \lim_{t\to\infty} f * G * m_F(t) \\ &= \frac{1}{\mu_F} \int_0^\infty f * G(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{\mu_F} \int_0^\infty f(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$
当F是步长为λ的格子点分布时, 对任意$c \in [0, \lambda)$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{c+n\lambda} f(c+n\lambda - s)\mathrm{d}m(s) = \lim_{n\to\infty} f * G * m_F(c+n\lambda)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu_F}\sum_{k=0}^{\infty} f * G(c+k\lambda). \qquad \square$$

我们也可以定义延迟更新过程在t时刻的年龄, 剩余寿命和总寿命：

$$A(t) = t - T_{N(t)}, \quad R(t) = T_{N(t)+1} - t, \quad \beta(t) = T_{N(t+1)} - T_{N(t)}.$$

下面我们以剩余寿命的分布为例介绍该分布满足的更新方程与$t \to \infty$时的极限. 其他情形的讨论方法类似，请读者自己补充.

定理14.6 设$N = \{N(t), t \geq 0\}$是以F为间隔时间分布的延迟更新过程, G是首次事件到达时间分布, 则

$$\mathbb{P}(R(t) > x) = \bar{G}(t+x) + \int_0^t \bar{F}(t+x-s)\mathrm{d}m(s), \tag{4.3.4}$$

其中$\bar{G}(t) = 1 - G(t)$, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, m是延迟更新过程N的更新函数. 进而(设F为非格子点分布)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(R(t) > x) = \frac{1}{\mu_F}\int_x^{\infty} \bar{F}(t)dt.$$

证明 由全概率公式

$$\begin{aligned} B_x(t) &= \mathbb{P}(R(t) > x) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(R(t) > x|W_1)) \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(R(t) > x|W_1 = s)\mathrm{d}G(s) \\ &= \Big[\int_0^t + \int_t^{t+x} + \int_{t+x}^{\infty}\Big]\mathbb{P}(R(t) > x|W_1 = s)\mathrm{d}G(s). \end{aligned}$$

注意到当$s > t + x$时

$$\mathbb{P}(R(t) > x|W_1 = s) = 1;$$

$t < s \leq t + x$时

$$\mathbb{P}(R(t) > x|W_1 = s) = 0;$$

而当$0 \leq s \leq t$时, 延迟更新过程N在s之后的表现与以F为间隔时间分布的更新过程$\tilde{N}$相同, 因此

$$\mathbb{P}(R(t) > x|W_1 = s) = \mathbb{P}(\tilde{R}(t-s) > x),$$

其中$\tilde{R}$表示更新过程$\tilde{N}$的剩余寿命.

$$B_x(t) = 1 - G(t+x) + \int_0^t \mathbb{P}(\tilde{R}(t-s) > x)\mathrm{d}G(s).$$

记$F_x(t) = F(t+x)$, $\bar{F}_x(t) = 1 - F_x(t)$, 由(4.1.9),(4.3.3)可知

$$\begin{aligned} B_x(t) &= 1 - G(t+x) + \int_0^t \Big[\bar{F}_x(t-s) + \int_0^{t-s} \bar{F}_x(t-s-u)dm_{_F}(u)\Big]\mathrm{d}G(s) \\ &= \bar{G}(t+x) + \bar{F}_x * G(t) + [\bar{F}_x * m_F] * G(t) \end{aligned}$$

$$= \bar{G}(t+x) + \bar{F}_x * [G(t) + m_F * G(t)] = \bar{G}(t+x) + \bar{F}_x * m(t).$$

由此可知(4.3.4)成立, 并且由定理14.5可知后一等式也成立. □

(B) 稳定更新过程

定义14.2 称延迟更新方程$N = \{N(t), t \geq 0\}$为稳定更新过程, 若间隔时间分布F的均值μ_F有限, 且延迟时间分布

$$G(t) = F_l(t) := \frac{1}{\mu_F}\int_0^t [1 - F(s)]\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

通常称分布F_l为分布F的平衡分布，显然F_l为连续型分布.

定理14.7 设延迟更新过程N的间隔时间分布满足条件$\mu_F < \infty$, 则N为稳定更新过程的充要条件是更新函数$m(t) = t/\mu_F$.

证明 对任意$\lambda > 0$, 定义Laplace变换

$$\tilde{m}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathrm{d}m(s), \quad \tilde{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathrm{d}F(s), \quad \tilde{G}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathrm{d}G(s).$$

由方程(4.3.1)可知

$$\tilde{m}(\lambda) = \tilde{G}(\lambda)(1 + \sum_{n=1}^\infty [\tilde{F}(\lambda)]^n) = \frac{\tilde{G}(\lambda)}{1 - \tilde{F}(\lambda)}.$$

若N为稳定更新过程, 由直接计算可知

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{1}{\mu_F}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1 - F(t))dt = \frac{1}{\mu_F}\Big[\frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda}\Big].$$

因此$\tilde{m}(\lambda) = 1/(\lambda\mu_F)$. 由于$[0,\infty)$上$\sigma$-有限测度与其Laplace变换一一对应, 所以$m(t) = t/\mu_F$.

反之, 若$m(t) = t/\mu_F$, 那么$\tilde{m}(\lambda) = 1/(\lambda\mu_F)$, 从而

$$\tilde{G}(\lambda) = (1 - \tilde{F}(\lambda))/(\lambda\mu_F).$$

这表明$G(t) = F_l(t)$, 即N是稳定更新过程. □

定理14.8 设N为稳定更新过程, 则

(1) 对一切$t \geq 0$, $R(t)$的分布函数为F_l;

(2) N 有平稳增量, 即对任意的$n \geq 1$及$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $\{N(t + t_i) - N(t), 1 \leq i \leq n\}$的分布与$t$无关.

证明 (1) 由(4.3.4)以及$m(t) = t/\mu_F$可知,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R(t) > x) &= \frac{1}{\mu_F}\int_{t+x}^\infty (1 - F(s))ds + \frac{1}{\mu_F}\int_0^t (1 - F(t + x - s))ds \\ &= \frac{1}{\mu_F}\int_x^\infty (1 - F(s))ds = 1 - F_l(x),\end{aligned}$$

因此$R(t)$的分布为F_l.

(2) 对任意一个固定的$t>0$, 令

$$Y^{(t)}(s)=N(t+s)-N(t).$$

那么$Y^{(t)}=\{Y^{(t)}(s),s\geq 0\}$仍是间隔时间分布为$F$的稳定更新过程. 事实上$Y^{(t)}$的第一个事件到达时间就是$R(t)\sim F_l$, 而此后的间隔时间间隔分别为

$$W_{N(t)+2},\cdots,W_{N(t)+k},\cdots.$$

因此我们只需证明$R(t),W_{N(t)+2},W_{N(t)+3},\cdots$相互独立且

$$W_{N(t)+2},W_{N(t)+3},\cdots$$

的共同分布为F. 为此, 任取整数$n\geq 1$以及$x,x_1,\cdots,x_n\in[0,\infty)$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(R(t)\leq x,W_{N(t)+2}\leq x_1,\cdots,W_{N(t)+n+1}\leq x_n)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(R(t)\leq x,N(t)+1=k,W_{N(t)+2}\leq x_1,\cdots,W_{N(t)+n+1}\leq x_n)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(T_k\leq t+x,T_{k-1}\leq t<T_k,W_{k+1}\leq x_1,\cdots,W_{k+n}\leq x_n).\end{aligned}$$

注意到$\{W_k,k\geq 1\}$相互独立, 且

$$\{T_k\leq t+x,T_{k-1}\leq t<T_k\}=\{\sum_{i=1}^{k-1}W_i\leq t<\sum_{i=1}^{k}W_i\leq t+x,\}$$

与$W_{k+1},W_{k+2},\cdots$独立. 因此由

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(R(t)\leq x,W_{N(t)+2}\leq x_1,\cdots,W_{N(t)+n+1}\leq x_n)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(T_k\leq t+x,T_{k-1}\leq t<T_k)F(x_1)\cdots F(x_n)\\&=\mathbb{P}(R(t)\leq x))F(x_1)\cdots F(x_n)\end{aligned}$$

可知$Y^{(t)}$确实是间隔时间分布为F的稳定更新过程. 即$Y^{(t)}$与N有相同有限维分布, 从而$\{N(t+t_i)-N(t),1\leq i\leq n\}$的分布与$t$无关. □

引理14.9 设延迟更新过程N的间隔时间分布为F, 延迟分布为G. 若$G(t)=F^{(c)}(t)$, 其中

$$F^{(c)}(t)=\frac{\int_0^t(1-F(s))\mathrm{d}x}{\int_0^c(1-F(s)\mathrm{d}s},\quad t\in[0,c]$$

而且对$t\leq 0$, $F^{(c)}(t)=0$; 对$t\geq c$, $F(t)=1$. 那么对任意$a>0$, 更新函数

$$m(t+a)-m(t)\leq\frac{a}{\int_0^c(1-F(s))\mathrm{d}s}.$$

证明 对任意$t\geq 0$, 令

$$\gamma(t)=\frac{\int_0^t(1-F(s))\mathrm{d}s}{\int_0^c(1-F(s))\mathrm{d}s}-G(t).$$

那么$\gamma(t)$单调不降, 而且对$0 \le t < c$, $\gamma(t) = 0$. 由更新方程可知

$$\begin{aligned} m(t) &= G(t) + \int_0^t G(t-s)\mathrm{d}m_F(s) \\ &= -\gamma(t) - \int_0^t \gamma(t-s)\mathrm{d}m_F(s) \\ &\quad + \frac{\int_0^t (1-F(s))\mathrm{d}s}{\int_0^c (1-F(s))\mathrm{d}s} + \frac{\int_0^t \int_0^{t-s} (1-F(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}m_F(s)}{\int_0^c (1-F(s))\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

注意到

$$t = \int_0^t (1-F(s))\mathrm{d}s + \int_0^t F(s)\mathrm{d}s = \int_0^t (1-F(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)\mathrm{d}F(s),$$

从而由更新方程局部有界解的表示可知

$$\int_0^t (1-F(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \int_0^{t-s} (1-F(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}m_F(s) = t.$$

另外, 注意到非负单调不降函数的卷积仍是单调不降的, 我们可知

$$T(t) := \gamma(t) + \int_0^t \gamma(t-s)\mathrm{d}m_F(s)$$

单调不降, 进而

$$m(t+a) - m(t) = T(t) - T(t+a) + \frac{a}{\int_0^c (1-F(s))\mathrm{d}s} \le \frac{a}{\int_0^c (1-F(s))\mathrm{d}s}. \quad \square$$

练习题

14.1 若F是参数为λ的指数分布, 求F的平衡分布.

14.2 若F是格子点分布, 支持点集为$\{kd : k = 0, 1, 2, \cdots\}$且取$kd$的概率为$p_k$, 求$F$的均衡分布.

14.3 对任意给定的$s > 0$, 令$\tilde{N}^{(s)}(t) = N(t+s) - N(s)$, 其中$N$是更新过程, 间隔时间服从非格子点分布$F$. 证明若$N$的平均等待时间$\mu < \infty$, 那么$\tilde{N}^{(s)}$的首个更新时间分布是$F$的平衡分布.

14.4 证明更新过程为Poisson过程当且仅当其更新函数$m(t) = ct$其中$c > 0$.

14.5 补充完成定理14.3的证明.

14.6 给出延迟更新过程t时刻的年龄和总寿命的分布函数.

4.4 有偿更新过程与可终止更新过程

在实际应用中更新过程还有许多推广, 本节介绍其中的有偿更新过程与可终止更新过程.

(A) 有偿更新过程

定义15.1 设$\{(W_n, Y_n), n\ge 1\}$为独立同分布的二维随机变量序列, $W_n\ge 0$, N是以$\{W_n\}$为间隔时间序列的更新过程, 对任意$t\ge 0$, 令

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n,$$

称$X=\{X(t), t\ge 0\}$为有偿更新过程. 若N为Poisson过程, $\{Y_n, n\ge 1\}$与$\{W_n, n\ge 1\}$独立, 则称X为复合泊松过程.

定理15.1 设X为有偿更新过程, $\mathbb{E}(W_1)<\infty$, $\mathbb{E}|Y_1|<\infty$, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)},\quad \text{a.s.}\ \text{而且}\ \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}(X(t))}{t}=\frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)}.$$

证明 由强大数定理及$N(t)\to\infty$, a.s. 可知

$$\frac{X(t)}{t}=\frac{\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k}{N(t)}\frac{N(t)}{t}\to\frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)},\quad a.s.$$

定理前半部分极限成立. 对后半部分极限, 注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{N(t)+1}Y_k\Big)&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{k}Y_i\mathbf{1}_{\{N(t)+1=k\}}\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\Big(Y_i\mathbf{1}_{\{\sum\limits_{n=1}^{k-1}W_n\le t,\ \sum\limits_{n=1}^{k}W_n>t\}}\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\mathbb{E}\Big(Y_i\mathbf{1}_{\{\sum\limits_{n=1}^{k-1}W_n\le t,\ \sum\limits_{n=1}^{k}W_n>t\}}\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big(Y_i-Y_i\sum_{k=1}^{i-1}\mathbf{1}_{\{\sum\limits_{n=1}^{k-1}W_n\le t,\ \sum\limits_{n=1}^{k}W_n>t\}}\Big).
\end{aligned}$$

由$\{(W_n, Y_n), n\ge 1\}$的独立同分布性可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{N(t)+1}Y_k\Big)&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}(Y_i)\Big(1-\sum_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{k-1}W_n\le t,\sum_{n=1}^{k}W_n>t)\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}(Y_i)(1-\mathbb{P}(N(t)+1\le i-1))\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}(Y_i)\mathbb{P}(N(t)+1\ge i)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}(Y_1)\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(N(t)+1\ge i) = \mathbb{E}(Y_1)(1+m(t)). \quad (4.4.1)$$

进而

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)+1}Y_i\Big) = \lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t} = \mathbb{E}(Y_1)\lim_{t\to\infty}\frac{1+m(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{N(t)+1}) &= \int_0^{\infty}\mathbb{E}(Y_{N(t)+1}|T_1=s)\mathrm{d}F(s)\\ &= \int_t^{\infty}\mathbb{E}(Y_1|W_1=s)\mathrm{d}F(s) + \int_0^t \mathbb{E}(Y_{N(t-s)+1})\mathrm{d}F(s).\end{aligned}$$

记$B(t)=\mathbb{E}(Y_{N(t)+1})$, $b(t)=\int_t^{\infty}\mathbb{E}(Y_1|W_1=s)\mathrm{d}F(s)$, 则

$$B(t) = b(t) + \int_0^t B(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

由$|b(t)|\le\int_0^{\infty}\mathbb{E}(|Y_1||W_1=s)\mathrm{d}F(s)=\mathbb{E}(|Y_1|)<\infty$可知$b(t)$为局部有界函数. 注意到$Y_{N(t)+1}\le t+R(t)$, 由前面对$\mathbb{E}(R(t))$的讨论(参见定理12.5)可知$\mathbb{E}(B(t))$也是局部有界函数, 因此

$$B(t) = b(t) + \int_0^t b(t-s)\mathrm{d}m(s).$$

又由$t\to\infty$时$b(t)\to 0$可知, 对任意$\varepsilon>0$, 存在T, 当$t>T$ 时, $|b(t)|\le\varepsilon$. 所以

$$\begin{aligned}0\le\frac{1}{t}\int_0^t|b(t-s)|\mathrm{d}m(s) &= \frac{1}{t}\Big[\int_0^{t-T}+\int_{t-T}^{t}\Big]|b(t-s)|\mathrm{d}m(s)\\ &\le \varepsilon\frac{m(t-T)}{t} + \mathbb{E}(|Y_1|)\frac{m(t)-m(t-T)}{t}.\end{aligned}$$

先令$t\to\infty$再令$\varepsilon\to 0$, 由定理13.3可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{B(t)}{t}=0.$$

最后注意到$\mathbb{E}(X(t))=\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{N(t)+1}Y_i\Big)-\mathbb{E}(Y_{N(t)+1})$, 综合以上结果可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}(X(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)}.$$ □

例15.1 设手机寿命为Z年, Z服从连续分布H. 某人使用手机, 若原来手机用了T年还没坏则花C元换一部新手机,若在T年前损坏, 则用D元换新手机. 问长时间后，此人平均每年多少钱用于手机更换？

解 可用有偿更新过程来描述这一问题, 令$W_n=Z_n\wedge T=\min\{Z_n,T\}$, 其中$Z_n$表示第$n$部手机的寿命, N为以$\{W_n\}$为更新时间的更新过程,

$$Y_n = C\mathbf{1}_{\{W_n=T\}} + D\mathbf{1}_{\{W_n<T\}}$$

为第n次手机更新的费用, 那么在时刻t之前总的手机更新费用为

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

平均费用为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)}=\frac{C+(D-C)H(T-)}{\int_0^T \bar{H}(x)dx},$$

其中$H(T-)=\mathbb{P}(W_n<T)$. □

例15.2 设顾客按强度为λ的泊松过程来到某个只有一个服务窗口的服务台, 设服务台服务每个顾客所需时间是独立同分布的随机变量,分布为G, 期望为$1/\mu$, $\mu>\lambda$, 不论顾客到达后是否需要等待，顾客都在接受服务后才离开. 问长时间后顾客到达即可接受服务的平均概率.

解 可用有偿更新过程来描述所讨论问题. 假定系统从第一个顾客到达开始，显然服务台按“工作”和“空闲”两种状态更新循环运行. 以X_i表示第i次系统忙的时长, Y_i表示第i次系统闲的时长, 那么$W_i=X_i+Y_i$就是系统一个服务周期的时长. 按假定, (X_i,Y_i)为独立同分布的二维随机变量. 特别Y_i为第i 个忙期结束到下一个顾客到达的时间, 由题设, 服从参数为λ 的指数分布. 在$[0,t]$时段内, 顾客到达即能接受服务的时长为

$$T(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_i+(t-T_{N(t)}-X_{N(t)+1})\mathbf{1}_{\{t>T_{N(t)}+X_{N(t)+1}\}}$$

其中N为以$\{W_i\}$为更新时间的更新过程, 上式右边后一项表示第$N(t)+1$个服务周期中在t之前的空闲时间. 显然

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\le T(t)\le \sum_{i=1}^{N(t)+1} Y_i.$$

因此所求平均概率总有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{t}=\frac{\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)}=\frac{1/\lambda}{\mathbb{E}(X_1)+1/\lambda}.$$

以U表示服务第一个顾客的时间, V表示服务第一个顾客时到达的顾客数. 显然U 服从G分布, 而V为强度为λ的泊松过程在$[0,U]$时间内粒子到达数. 所以

$$\mathbb{E}(U)=\frac{1}{\mu},\quad \mathbb{E}(V)=\int_0^\infty \lambda u\mathrm{d}G(u)=\frac{\lambda}{\mu}.$$

由于服务顾客是独立同分布的, $\mathbb{E}(X_1|U,V)=U+V\mathbb{E}(X_1)$, 进而

$$\mathbb{E}(X_1)=\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(V)=\frac{1}{\mu}+\mathbb{E}(X_1)\frac{\lambda}{\mu}.$$

由此可得$\mathbb{E}(X_1)=1/(\mu-\lambda)$. 所以

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{t}=1-\frac{\lambda}{\mu}.\qquad\square$$

例15.3 设保险公司理赔事件发生服从强度为λ的Poisson过程, 每次理赔金额Y_i服从参数为μ的指数分布且相互独立. 设公司初始资本为x, 单位时间内的保费收入为c. 问该公司永不破产的概率?(公司破产就是指公司净值产为负). 假定$c>\lambda/\mu$.

解 在时间区间$[0,t]$内, 公司需支付的理赔费用为$\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$, 从而t时刻公司资产为

$$W(t)=x+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i.$$

公司永不破产的概率

$$B(x)=\mathbb{P}(W(t)\geq 0,t\geq 0)=\mathbb{P}(x+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i\geq 0,t\geq 0),$$

并约定$B(x)=0,x<0$. 那么由全概率公式

$$B(x)=\int\mathbb{P}(W(t)\geq 0,t\geq 0|W_1=s,Y_1=y)\mathrm{d}H(s,y),$$

其中$H(s,y)$为(W_1,Y_1)的联合分布. 显然

$$\mathbb{P}(W(t)\geq 0,t\geq 0|W_1=s,Y_1=y)=\begin{cases}0, & y>x+cs,\\ B(x+cs-y), & y\leq x+cs.\end{cases}$$

由假设$\mathrm{d}H(s,y)=\lambda e^{-\lambda s}\mu\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}s\mathrm{d}y$, 因此

$$\begin{aligned}B(x)&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda s}\mathrm{d}s\int_0^{x+cs}B(x+cs-y)\mu\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y\\&=\int_x^\infty\frac{\lambda}{c}e^{-\frac{\lambda}{c}(u-x)}\mathrm{d}u\int_0^u B(u-y)\mu\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

两边关于x求导得

$$B'(x)=\frac{\lambda}{c}B(x)-\frac{\lambda}{c}\int_0^x B(y)\mu\mathrm{e}^{-\mu(x-y)}\mathrm{d}y,\tag{4.4.2}$$

进一步关于x求导, 整理得$(\frac{\lambda}{c}-\mu)B'(x)=B''(x)$. 由此可得

$$B(x)=b+\frac{a}{\frac{\lambda}{c}-\mu}\mathrm{e}^{(\frac{\lambda}{c}-\mu)x},$$

其中a,b为待定常数. 由定理15.1可知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W(t)}{t}=c-\frac{\lambda}{\mu}>0,$$

从而$\lim\limits_{x\to\infty}B(x)=1$(参见习题15.4). 因此

$$B(x)=1+\frac{a}{\frac{\lambda}{c}-\mu}\mathrm{e}^{(\frac{\lambda}{c}-\mu)x},$$

将其代入方程(4.4.2)得$a=-\frac{\lambda}{c\mu}(\frac{\lambda}{c}-\mu)$. 所以

$$B(x)=1-\frac{\lambda}{c\mu}e^{(\frac{\lambda}{c}-\mu)x}. \qquad \square$$

(B)可终止更新过程

定义15.2 若更新过程间隔时间分布F以正概率取$+\infty$, 那么我们称此更新过程为可终止更新过程.

例15.4 设j是马氏链X的非常返状态, $N(t)$表示从j出发的马氏链X到时刻t为止回到状态j的次数, 那么$N(t)$就是可终止更新过程.

由定义可知可终止更新过程仍有更新性, 其更新函数$m(t)=\mathbb{E}(N(t))$仍满足更新方程

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s),$$

并且更新方程

$$B(t)=b(t)+\int_0^t B(t-s)\mathrm{d}F(s)$$

的局部有界解仍可表示成

$$B(t)=b(t)+\int_0^t b(t-s)\mathrm{d}m(s).$$

但对可终止更新过程而言, 在某次事件发生后会以正概率不再有事件发生. 记这最后一次事件发生的时刻为ξ, 即

$$\xi=\sup\{T_n;T_n<\infty,\ n\geq 0\}.$$

那么$N(\infty)=N(\xi)$就是更新事件发生的总次数.

定理15.2 设$p=F(\infty)$. N是以F为间隔时间分布的可终止更新过程. 对任意$k\geq 0$,

$$\mathbb{P}(\xi\leq t)=(1-p)(1+m(t)),\quad \mathbb{P}(N(\infty)=k)=p^k(1-p).$$

因此

$$\mathbb{E}(\xi)=\frac{1}{1-p}\int_0^\infty(p-F(t))\mathrm{d}t,\quad m(\infty)=\mathbb{E}(N(\infty))=\frac{p}{1-p}.$$

证明 记N的第n个间隔时间为W_n. 显然

$$\{N(\infty)=k\}=\{W_1<\infty,\cdots,W_k<\infty,W_{k+1}=\infty\}.$$

因此$\mathbb{P}(N(\infty)=k)=p^k(1-p)$, 进而$\mathbb{E}(N(\infty))=p/(1-p)$.

注意到$W_1=\infty$时$\xi=0$, 因此对任意$t\geq 0$, 由更新技巧可得

$$\mathbb{P}(\xi\leq t)=\mathbb{E}(\mathbb{P}(\xi\leq t|W_1))=1-p+\int_0^\infty \mathbb{P}(\xi\leq t|W_1=s)\mathrm{d}F(s)$$

$$= 1 - p + \int_0^t \mathbb{P}(\xi \le t - s)\mathrm{d}F(s).$$

因此$\mathbb{P}(\xi \le t) = (1-p)(1+m(t))$. 同理

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|W_1)) = \int_0^\infty (s + \mathbb{E}(\xi))\mathrm{d}F(s) = \int_0^\infty s\mathrm{d}F(s) + p\mathbb{E}(\xi).$$

因此

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{\int_0^\infty s\mathrm{d}F(s)}{1-p} = \frac{1}{1-p}\int_0^\infty (p - F(t))\mathrm{d}t. \qquad \square$$

由于$N(t)$单调不降地几乎必然收敛到$N(\infty)$, $m(t)$单调不降地收敛到$m(\infty) = p/(1-p)$, 这与通常更新过程$m(t) \to \infty$完全不同.

性质15.3 设F为非格子点分布, $p = F(\infty) < 1$且存在$\lambda > 0$使得$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}F(t) = 1$. 记$F$的更新函数为$m(t)$. 若存在$M > 0$使得$\mathrm{e}^{\lambda t}(p - F(t))$在$t \in [M, \infty)$ 上单调不增, 那么

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t}[m(t) - m(\infty)] = -\frac{1}{\lambda}\Big[\int_0^\infty t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}F(t)\Big]^{-1}.$$

证明 由$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s)$以及

$$m(\infty) = \frac{p}{1-p} = \frac{p}{1-p}(1 - F(t)) + \int_0^t \frac{p}{1-p}\mathrm{d}F(s)$$

可知

$$\mathrm{e}^{\lambda t}[m(\infty) - m(t)] = \mathrm{e}^{\lambda t}\frac{p - F(t)}{1-p} + \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}(m(\infty) - m(t-s))\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}F(s).$$

注意到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t}\frac{p - F(t)}{1-p}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}\frac{p}{1-p} + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda(1-p)}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}F(s) = \frac{1}{\lambda},$$

由关键更新定理

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}[m(\infty) - m(t)] = \frac{1}{\int_0^\infty \lambda s\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}F(s)}. \qquad \square$$

例15.5 设动物穿过某一条保护区的公路时构成一个更新过程, 其更新间隔$W_i, i \ge 1$的公共分布为F, 在该保护区行驶的汽车碰到动物穿过马路时一定要停车等待，直到前后动物间隔时间大于τ 时才能通过. 假定某汽车恰好碰到动物穿过马路，求它需要等待的平均时间.

解 令$\tilde{W}_i = \begin{cases} W_i, & W_i \le \tau \\ +\infty, & W_i > \tau \end{cases}$. $\tilde{N}$是以$\tilde{W}_i$为间隔时间间隔的可终止更新过程, ξ为该可终止更新过程的最后更新时刻, 那么所求平均时间

$$t = \mathbb{E}(\xi) + \tau = \frac{1}{1 - F(\tau)}\int_0^\tau (F(\tau) - F(t))\mathrm{d}t + \tau. \qquad \square$$

下面这个例子虽然不是更新过程, 但一定层面上展现了如何应用更新方程分

析与解决问题.

例15.6 (连续时间分枝过程) 设某种生物的寿命分布为设非格子点分布F, 每个生物在它的生命结束时, 独立地以概率p_j产生j个后代, $j=0,1,2,\cdots$ 且

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} jp_j; = \lambda < \infty$$

各个生物及其后代的表现独立. 以$X(t)$记录t时刻的生物个数(设$X_0 = 1$)并令$m(t) = \mathbb{E}(X(t))$. 当$\lambda F(0) < 1$时, 讨论$t \to \infty$时$m(t)$的变化趋势.

解 记$g(u,t) = \mathbb{E}(u^{X(t)})$, 其中$0 < u < 1$, 那么$g(u,t) \le 1$. 对任意$u \in (0,1)$,

$$g'_u(u,t) = \mathbb{E}(X(t)u^{X(t)-1})$$

作为t的函数总是局部有界的. 以最初单个生物的生命结束时间(记作T)为条件考察$g(u,t)$, 可得

$$\begin{aligned} g(u,t) &= \mathbb{E}(u^{X(t)}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(u^{X(t)}|T)) \\ &= \int_t^{\infty} u\mathrm{d}F(t) + \int_0^t \mathbb{E}(u^{X(t)}|T=s)\mathrm{d}F(t). \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

以ξ表示最初单个生物死亡时产生的后代个数,

$$\mathbb{E}(u^{X(t)}|T=s) = \mathbb{E}(u^{\sum_{i=1}^{\xi} X_i(t-T)}|T=s),$$

其中$X_i(t-T)$表示T时刻产生的第i个后代的后代在t时刻时存活的数量. 注意到任何生物都是独立运行的而且运行规律一样, $X_i(t-T)$是独立同分布的随机变量, 而且

$$\mathbb{E}(u^{X_i(t-T)}|T=s) = \mathbb{E}(u^{X_i(t-s)}|T=s) = \mathbb{E}(u^{X_i(t-s)}) = g(u,t-s).$$

注意到ξ与T和$X_i(t-T)$都独立,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u^{X(t)}|T=s) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}(u^{X_i(t-s)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k g(u,t-s)^k. \end{aligned}$$

将其代入(4.4.3)可得

$$g(u,t) = \int_t^{\infty} u\mathrm{d}F(t) + \lambda \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} p_k g(u,t-s)^k.\mathrm{d}F(t).$$

因此

$$\begin{aligned} g'_u(u,t) &= \int_t^{\infty} \mathrm{d}F(t) + \int_0^t g'_u(u,t-s) \sum_{k=1}^{\infty} kp_k g(u,t-s)^{k-1}\mathrm{d}F(t) \quad (4.4.4) \\ &\le \int_t^{\infty} \mathrm{d}F(t) + \int_0^t g'_u(u,t-s) \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \mathrm{d}F(t) \end{aligned}$$

$$= \int_t^\infty \mathrm{d}F(t) + \int_0^t g'_u(u, t-s)\lambda \mathrm{d}F(t).$$

由此可知以及$g'_u(u,t)$局部有界可知

$$g'_u(u,t) \le \bar{F}(t) + \bar{F}(t) * m_G(t),$$

其中$\bar{F}(t) = \int_t^\infty \mathrm{d}F(s)$, $G(t) = \lambda F(t)$, $m_G(t) = \sum_{k=1}^\infty G^{*k}(t)$. 由习题12.8可知$\lambda F(0) \le 1$时, $m_G(t)$局部有界, 由

$$m(t) = \mathbb{E}(X(t)) = \lim_{u \to 1} g'_u(u,t),$$

可得

$$m(t) \le \bar{F}(t) + \bar{F}(t) * m_G(t),$$

从而$m(t)$局部有界, 而且对(4.4.4)两边取极限$u \to 1$得

$$m(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \lambda m(t-s)\mathrm{d}F(t). \tag{4.4.5}$$

由习题12.8可得

$$m(t) = \bar{F}(t) + \bar{F} * m_G(t).$$

(1) 若$\lambda = 1$, 那么(4.4.5)就是标准的更新方成, 由关键更新定理可知

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = \int_0^\infty \bar{F}(s)\mathrm{d}s = 1.$$

(2) 若$\lambda > 1$, 那么由$\lambda F(0) < 1$可知存在常数$\rho > 0$使得

$$\lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{d}F(s) = 1,$$

此时

$$\mathrm{e}^{-\rho t} m(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}\bar{F}(t) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\rho(t-s)} m(t-s)\lambda \mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{d}F(s).$$

对$\mathrm{e}^{-\rho t} m(t)$使用关键更新定理可得

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-\rho t} m(t) = \frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}\bar{F}(s)\mathrm{d}s}{\int_0^\infty \lambda s \mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{d}F(s)}.$$

直接计算可知

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s}\bar{F}(s)\mathrm{d}s = \frac{\lambda - 1}{\rho\lambda}.$$

进而

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^{-\rho t} m(t) = \frac{\lambda - 1}{\rho \lambda^2 \int_0^\infty s \mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{d}F(s)}.$$

(3) 若$\lambda < 1$. 那么

$$m(t) = \bar{F}(t) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \bar{F} * F^{*k}(t).$$

由$\lim_{t \to \infty} \bar{F}(t) = \lim_{t \to \infty} \bar{F} * F^{*k}(t) = 0$可知

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = 0.$$

若存在$\rho > 0$使得

$$\int_0^\infty \lambda e^{\rho s} dF(s) = 1.$$

那么与(2)类似可得

$$\lim_{t\to\infty} e^{\rho t} m(t) = \frac{1-\lambda}{\rho\lambda^2 \int_0^\infty s e^{\rho s} dF(s)}.$$

练习题

15.1 假设当计数器接收到一个粒子后将封闭长为τ的时段, 若在这个期间又有粒子到来, 从粒子到达时刻起, 计数器还将封闭τ时段, 直至在长为τ的时段内没有粒子到达, 此时计数器才重新开放计算. 设粒子到达服从等待分布为F 的更新过程, 求计数器在一个周期内被封闭的平均时长.

15.2 有3个射手轮流射击一个目标, 射手1射击直到他未中, 然后射手2射击直到他未中, 然后射手3射击直到他未中, 然后又回到射手1, 如此循环. 假设三个射手射中的概率分别为p_1, p_2, p_3, 确定每个射手射击次数的长程比例.

15.3 设N是间隔时间分布为F的更新过程, 设F的均值和方差都有限, 分别是μ, σ^2. $A(t)$表示t时刻的年龄, 求$\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t A(s)ds/t$.

15.4 证明例15.3中函数$B(x)$满足$\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = 1$.

15.5* 有偿更新过程X满足$\mathbb{E}(W_i) < \infty$, $\mathbb{E}|Y_i| < \infty$, 其中W_i 服从连续分布. 令$m(t) = \mathbb{E}(X(t))$, 证明对任意$a > 0$

$$\lim_{t\to\infty} (m(t+a) - m(t)) = \frac{a\mathbb{E}(Y_1)}{\mathbb{E}(W_1)}.$$

15.6* 已知$X = \{X_n, n \geq 0\}$为状态空间$S = \{0, 1\}$的时齐马氏链, 初值为0, 转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}, \quad 0 < p, q < 1.$$

设$Y_n, n \geq 1$为一族均值为μ的独立同分布随机变量且与马氏链X独立. 令

$$W_k = \begin{cases} Y_k, & X_k = 0; \\ 0, & X_k = 1. \end{cases}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W_k = \frac{\mu(1-q)}{2-p-q}.$$

4.5 Blackwell定理*

本节，我们将在延迟更新过程范畴下证明Blackwell定理. 我们的结果可以叙述如下:

定理16.1 若延迟更新过程N的间隔时间分布F是非格子点分布, 那么对任意$a > 0$, 延迟更新函数$m(t)$满足

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+a) = m(t)] = \frac{a}{\mu_F}.$$

显然定理13.4只是该定理的一种特殊情形. 为了证明该定理, 我们需要如下的关于独立非负随机变量部分和序列的系列引理.

引理16.2 设对任意$n \geq 1$,令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} W_i, \quad \bar{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{W}_i,$$

其中$W_i, \bar{W}_i$, $i = 1, 2, \cdots$, 是独立序列, 服从相同的非格子点分布F. 那么

$$D := \left\{ x \,\middle|\, \text{对任意}\epsilon > 0, \text{存在}i, j > 1, \text{使得}\mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (x-\epsilon, x+\epsilon)) > 0 \right\} = \mathbb{R}.$$

证明: 我们证明D具有如下性质:

(1) $a \in D$则$-a \in D$. 这容易由N及N'独立且互为版本的设定推出.

(2) $a, b \in D$则$a + b \in D$. 事实上对任意$\epsilon > 0$, 存在$i, j, m, n \geq 1$使得

$$\mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (a - \epsilon/2, a + \epsilon/2)) > 0, \ \mathbb{P}(S_m - \bar{S}_n \in (b - \epsilon/2, b + \epsilon/2)) > 0.$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{i+n} - \bar{S}_{j+m} \in (a + b - \epsilon, a + b + \epsilon)) \\
&\quad \geq \mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (a - \epsilon/2, a + \epsilon/2)) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(S_{i+m} - S_i - \bar{S}_{j+n} + \bar{S}_j \in (b - \epsilon/2, b + \epsilon/2)) \\
&\quad = \mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (a - \epsilon/2, a + \epsilon/2))\mathbb{P}(S_m - \bar{S}_n \in (b - \epsilon/2, b + \epsilon/2)) > 0.
\end{aligned}$$

(3) 若$a_n \in D$且$a_n \to a$, 那么$a \in D$. 事实上对任意$\epsilon > 0$, 存在a_N使得$|a - a_N| < \epsilon/2$, 以及存在i, j使得

$$\mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (a_N - \epsilon/2, a_N + \epsilon/2)) > 0.$$

因此

$$\mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (a - \epsilon, a + \epsilon)) \geq \mathbb{P}(S_i - \bar{S}_j \in (a_N - \epsilon/2, a_N + \epsilon/2)) > 0.$$

(4) $(0,\infty)\cap D\neq\emptyset$. 注意到若$x\notin D$, 则存在$\epsilon_x>0$使得对任意$i,j\geq 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i,j=1}^{\infty}\Big\{S_i-\bar{S}_j\in(x-\epsilon_x,x+\epsilon_x)\Big\}\Big)=0.$$

若$(0,\infty)\cap D=\emptyset$, 那么对一切$0<a<b$, 由闭区间的有限覆盖定理可知

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i,j=1}^{\infty}\Big\{S_i-\bar{S}_j\in[a,b]\Big\}\Big)=0.$$

令$a\to 0, b\to+\infty$可得

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i,j=1}^{\infty}\Big\{S_i-\bar{S}_j\in(0,+\infty)\Big\}\Big)=0.$$

由此并注意前面的结论(1)可知

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i,j=1}^{\infty}\Big\{S_i-\bar{S}_j\in(-\infty 0)\Big\}\Big)=0,$$

进而

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i,j=1}^{\infty}\Big\{S_i=\bar{S}_j\Big\}\Big)=1.$$

这与S，$\bar{S}$之间的独立性矛盾.

现在记$c=\inf\{x>0,x\in D\}$. 若$C>0$, 则由前面的结论(2)可知

$$D=\{0,\pm c,\pm 2c,\cdots\}.$$

由于F是非格子点分布, 必有$x\notin D$但$x\in\mathrm{Supp}(F)$. 因此对任意$\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(S_2-\bar{S}_1\in(x-\epsilon,x+\epsilon)\Big)\\&\geq\mathbb{P}\Big(W_1\in(x-\epsilon/3,x+\epsilon/3)\Big)\mathbb{P}\Big(W_2\in(x-\epsilon/3,x+\epsilon/3)\Big)\\&\times\mathbb{P}\Big(\bar{W}_1\in(x-\epsilon/3,x+\epsilon/3)\Big)>0.\end{aligned}$$

由此可知$x\in D$. 矛盾表明$c=0$. 因此存在一列正数$c_n\in D$使得$c_n\to 0$, 而且

$$D\supset\bigcup_{n\geq 1}\Big\{kc_n,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\Big\}.$$

所以D在$\mathbb{R}$中稠密. 但由前面结论(3)可知D是闭集, 因此$D=\mathbb{R}$. $\square$

下面总设$T=\{T_n,n\geq 1\},T'=\{T'_n,n\geq 1\}$为两独立的部分和序列, 满足

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}V_i,\quad T'_n=\sum_{i=1}^{n}V'_i,$$

其中V_i,V'_i, $i=1,2,\cdots$, 是独立非负随机变量序列, V_1,V'_1分别服从G,G'分布, V_i,V'_i, $i\geq 2$, 服从相同分布F.

对任意$\epsilon>0$，令

$$\nu_1(\epsilon)=\inf\{n\geq 1,\text{存在}m\geq 1\text{使得}|T_n-T'_m|\leq\epsilon\},$$

$$\nu_1'(\epsilon) = \inf\{m \geq 1, \text{存在} n \geq 1 \text{使得} |T_n - T_m'| \leq \epsilon\},$$

$$M(\epsilon) = \sup\{T_n, n \geq 1 : \text{存在} m \geq 1 \text{使得} |T_n - T_m'| \leq \epsilon\},$$

以及对任意$k \geq 1$

$$\nu_{k+1}(\epsilon) = \inf\{n > \nu_k(\epsilon), \text{存在} m > \nu_k'(\epsilon) \text{使得} |T_n - T_m'| \leq \epsilon\},$$

$$\nu_{k+1}'(\epsilon) = \inf\{m > \nu_k'(\epsilon), \text{存在} n > \nu_k(\epsilon) \text{使得} |T_n - T_m'| \leq \epsilon\}.$$

显然$M(\epsilon)$随ϵ的增加单调不降. 此外, 对任意$\epsilon > 0$以及$k \geq 1$,

$$\nu_1'(\epsilon) < \infty \Leftrightarrow \nu_1(\epsilon) < \infty.$$

引理16.3 对任意$\epsilon > 0$以及如上定义的$\nu_1(\epsilon), \nu_1'(\epsilon)$总有$|T_{\nu_1(\epsilon)} - T'_{\nu_1'(\epsilon)}| \leq \epsilon$并且

$$\{\nu_1(\epsilon) = k, \nu_1'(\epsilon) = j\} = \{|T_k - T_j'| \leq \epsilon, |T_i - T_l'| \leq \epsilon, 0 \leq i < k, 0 \leq l < j\}.$$

证明 由定义可知存在$m, n \geq 1$使得

$$|T_{\nu_1(\epsilon)} - T_m'| \leq \epsilon, \quad |T'_{\nu_1'(\epsilon)} - T_n| \leq \epsilon$$

且$\nu_1(\epsilon) \leq n$, $\nu_1'(\epsilon) \leq m$. 由此及T, T'的单调不降性质可得

$$-\epsilon \leq T_{\nu_1(\epsilon)} - T_m' \leq T_{\nu_1(\epsilon)} - T'_{\nu_1'(\epsilon)} \leq T_n - T'_{\nu_1'(\epsilon)} \leq \epsilon.$$

由此易知引理16.3成立. □

该引理表明随机事件$\{\nu_1(\epsilon) = k, \nu_1'(\epsilon) = j\}$可用$V_1, \cdots, V_k, V_1', \cdots, V_j'$表示.

引理16.4 若存在$k \geq 1$使得$\nu_k(\epsilon) = \infty$, 那么$M(\epsilon) < \infty$. 即

$$\{\nu_k(\epsilon) = \infty\} \subset \{M(\epsilon) < \infty\}.$$

证明 若$\nu_1(\epsilon) = \infty$, 则由定义可知$M(\epsilon) = \sup \emptyset = 0$. 若存在$k > 1$使得$\nu_k(\epsilon) = \infty$且$\nu_1(\epsilon) < \infty$, 那么存在一个$j \leq k-1$使得$\nu_i(\epsilon) < \infty$但$\nu_{j+1}(\epsilon) = \infty$. 此时, 对任意$n > \nu_j(\epsilon)$, 若存在$m$使得$|T_n - T_m'| \leq \epsilon$, 则必有$m \leq \nu_j'(\epsilon)$, 因而

$$T_n \leq T'_{\nu_j'(\epsilon)} + \epsilon.$$

由此可知

$$\begin{aligned} M(\epsilon) &= \sup\{T_n, \text{存在} m \text{使得} |T_n - T_m'| \leq \epsilon\} \\ &\leq T_{\nu_j(\epsilon)} \vee \sup\{T_n, n > \nu_j(\epsilon) \text{且存在} m \text{使得} |T_n - T_m'| \leq \epsilon\} \\ &\leq T_{\nu_j(\epsilon)} \vee (T'_{\nu_j'(\epsilon)} + \epsilon) < \infty. \end{aligned}$$

由此可知引理16.4成立. □

引理16.5 对任意$a > 0$以及正整数r, l

$$\mathbb{P}\Big(\Big|(T_{\nu_k(\epsilon)+n} - T_{\nu_k(\epsilon)}) - (T'_{\nu_k'(\epsilon)+m} - T'_{\nu_k'(\epsilon)})\Big| \geq a, n > r, m > l \Big| \nu_k(\epsilon) < \infty\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\big|(T_{1+n} - T_1) - (T'_{1+m} - T'_1)\big| \geq a, n > r, m > l\Big).$$

证明 由引理16.3可知

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\big|(T_{\nu_k(\epsilon)+n} - T_{\nu_k(\epsilon)}) - (T'_{\nu'_k(\epsilon)+m} - T'_{\nu'_k(\epsilon)})\big| \geq a, n > r, m > l, \nu_k(\epsilon) < \infty\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\big|(T_{i+n} - T_i) - (T'_{j+m} - T'_j)\big| \geq a, n > r, m > l, \nu_k(\epsilon) = i, \nu'_k(\epsilon) = j\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{r=i+1}^{i+n} V_r - \sum_{r=j+1}^{j+m} V'_r\Big| \geq a, n > r, m > l\nu_k(\epsilon) = i, \nu'_k(\epsilon) = j\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\nu_k(\epsilon) = i, \nu'_k(\epsilon) = j\Big)\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{s=i+1}^{i+n} V_s - \sum_{s=j+1}^{j+m} V'_s\Big| \geq a, n > r, m > l\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\nu_k(\epsilon) = i, \nu'_k(\epsilon) = j\Big)\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{s=2}^{n+1} V_s - \sum_{s=2}^{1+m} V'_s\Big| \geq a, n > r, m > l\Big) \\
&= \mathbb{P}(\nu_k(\epsilon) < \infty)\mathbb{P}\Big(\big|(T_{1+n} - T_1) - (T'_{1+m} - T'_1)\big| \geq a, n > r, m > l\Big).
\end{aligned}$$

由此可知**引理**16.5中条件概率等式成立. □

引理16.6 若F为非格子点分布, 那么部分和序列T, T'至少满足下面两性质中一个.

(H1) 存在$\epsilon_0 > 0$使得对任意$0 < \epsilon \leq \epsilon_0$以及任意分布$G, G'$, $\mathbb{P}(M(\epsilon) < \infty) = 1$.

(H2) 对任意$0 < \epsilon$以及任意分布G, G', $\mathbb{P}(\nu_1(\epsilon) < \infty) = 1$.

证明 只需证明若(H2)不成立则(H1)必成立. 为此,假设(H2)不成立, 那么存在$3\epsilon_0 > 0$以及分布G, G'使得

$$\mathbb{P}(\nu_1(3\epsilon_0) = \infty) > 0.$$

因此

$$\begin{aligned}
0 &< \mathbb{P}(|T_n - T'_m| > 3\epsilon_0, n, m \geq 1) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(|T_n - T'_m| \geq 3\epsilon_0, n, m \geq 1 | T_1 - T'_1 = y) H(\mathrm{d}y),
\end{aligned}$$

其中H表示$V_1 - V'_1$的分布. 由此可得存在$y \in \mathbb{R}$使得

$$\mathbb{P}(|y + S_n - S'_m| > 3\epsilon_0, n, m \geq 1) > 0, \tag{4.5.1}$$

其中$\{S_n = T_{1+n} - T_1, n \geq 1\}$, $\{S'_m = T'_{1+m} - T'_1, m \geq 1\}$为两具有相同非格子分布$F$的独立随机变量序列的部分和. 由**引理**16.2可知存在$i, j \geq 1$使得

$$\mathbb{P}(|S_i - S'_j + y| \leq \epsilon_0) > 0.$$

令$A=\{|S_i-S'_j+y|\le\epsilon_0\}$,

$$B=\{|y+S_{i+n}-S_i-(S'_{j+m}=S'_j)|>3\epsilon_0,n,m\ge 1\},$$

$$C=\{|S_n-S'_m|\ge 2\epsilon_0,n>i,m>j\}.$$

由S,S'为独立同分布随机变量部分和序列可知随机事件A,B独立，并再由(4.5.1)可知$\mathbb{P}(B)>0$. 注意到$C\supset AB$,

$$p=\mathbb{P}(C)\ge\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)>0.$$

记$C_k=\{|T_{\nu_k(\epsilon_0)+n}-T_{\nu_k(\epsilon_0)}-T'_{\nu'_k(\epsilon_0)+m}-T'_{\nu'_k(\epsilon_0)}|\ge 2\epsilon_0,n>i,m>j\}$. 由**引理**16.5可知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_k|\nu_k(\epsilon_0)<\infty)&=\mathbb{P}(|T_{1+n}-T_1-T'_{1+m}-T'_1|\ge 2\epsilon_0,n>i,m>j)\\&=\mathbb{P}(|S_n-S'_m|\ge 2\epsilon_0,n>i,m>j)=\mathbb{P}(C)=p>0.\end{aligned}$$

对任意分布G,G', 我们有

$$\{\nu_{k+i+j+1}(\epsilon_0)<\infty\}\subset\{\nu_k(\epsilon_0)<\infty\}\cap\Delta$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta&:=\{\text{存在}n,m>i+j\text{使得}|T_{\nu_k(\epsilon_0)+n}-T'_{\nu'_k(\epsilon_0)+m}|\le\epsilon_0\}\\&\subset\{\text{存在}n,m>i+j\text{使得}|T_{\nu_k(\epsilon_0)+n}-T_{\nu_k(\epsilon_0)}-(T'_{\nu'_k(\epsilon_0)+m}-T'_{\nu'_k(\epsilon_0)})|\le 2\epsilon_0\}\\&\subset\bar{C}_k,\end{aligned}$$

这里$\bar{C}_k$表示C_k的对立事件. 由此可知对任意$k\ge 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\nu_{k+i+j+1}(\epsilon_0)<\infty)&\le\mathbb{P}(\nu_k(\epsilon_0)<\infty)\mathbb{P}(\bar{C}_k|\nu_k(\epsilon_0)<\infty)\\&=(1-p)\mathbb{P}(\nu_k(\epsilon_0)<\infty).\end{aligned}$$

进而对任意$k\ge 1$

$$\mathbb{P}(\nu_{k(i+j+1)}(\epsilon_0)<\infty)\le\mathbb{P}(\nu_1(\epsilon_0)<\infty)(1-p)^{k-1}\le(1-p)^{k-1}.$$

因此对任意分布G,G', 由**引理**16.4可知

$$\mathbb{P}(M(\epsilon_0)=\infty)\le\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\nu_{k(i+j+1)}(\epsilon_0)<\infty\})=\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(\nu_{k(i+j+1)}(\epsilon_0)<\infty)=0.$$

由于$M(\epsilon)$随ϵ单调不降, 因此对任意$\epsilon\in(0,\epsilon_0]$都有

$$\mathbb{P}(M(\epsilon)<\infty)\ge\mathbb{P}(M(\epsilon_0)<\infty)=1.$$

由此可知**引理**16.6成立. □

以下用N以及N'分别表示更新时间序列是T和T'的延迟更新过程, 用$\tilde{N}$表示有相同间隔时间分布的更新过程. $m(t)=\mathbb{E}(N(t))$为$N(t)$的更新函数. 我们有如

下的引理

引理16.7 若引理16.6 中性质(H1)成立, 那么分布F的均值$\mu_F = +\infty$而且对任意$a > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+a) - m(t)] = 0.$$

证明 若(H1)成立, 取$G = G'$. 记$E(t) = \{N(t+\epsilon) - N(t) \geq 1\}$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E(t))^2 &= \mathbb{P}(N(t+\epsilon) - N(t) \geq 1; N'(t+\epsilon) - N'(t) \geq 1)\\ &\leq \mathbb{P}(\text{存在}i,j\text{使得}T_i \in (t, t+\epsilon], T'_j \in (t, t+\epsilon])\\ &\leq \mathbb{P}(\text{存在}i,j\text{使得}|T_i - T'_j| \leq \epsilon\text{且}T_i > t)\\ &\leq \mathbb{P}(M(\epsilon) > t) \to 0,\end{aligned}$$

当$t \to \infty$时. 由引理14.1可知, 对任意$k \geq 1$,

$$\begin{aligned}0 \leq m(t+\epsilon) - m(t) &= \mathbb{E}(N(t+\epsilon) - N(t))\\ &\leq k\mathbb{P}(E_t) + \mathbb{E}((N(t+\epsilon) - N(t))\mathbf{1}_{\{N(t+\epsilon)-N(t)\geq k\}})\\ &\leq k\mathbb{P}(E_t) + \mathbb{E}((1+\tilde{N}(\epsilon))\mathbf{1}_{\{1+\tilde{N}(\epsilon)\geq k\}})\end{aligned}$$

先令$t \to \infty$, 再令$k \to \infty$. 可得

$$m(t+\epsilon) - m(t) \to 0.$$

注意到, 对任意$a > 0$, 存在$k > 0$,使得$(k-1)\epsilon \leq a < k\epsilon$. 因此当$t \to \infty$时.

$$m(t+a) - m(t) \leq \sum_{i=1}^{k}[m(t+i\epsilon) - m(t+(i-1)\epsilon)] \to 0.$$

最后我们注意到, 此时若$\mu_F < +\infty$, 则可取G为F的平衡分布F_l, 使得

$$m(t+a) - m(t) = \frac{a}{\mu_F} \neq 0.$$

矛盾表明$\mu_F = +\infty$. □

引理16.8 若引理16.6中性质(H2)成立, 那么对任意$a > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+a) = m(t)] = \frac{a}{\mu_F}.$$

证明 对任意$\epsilon > 0$, 由条件及$\nu'_1(\epsilon)$的定义可知$\mathbb{P}(\nu'_1(\epsilon) < \infty) = 1$. 定义

$$W''_n = \begin{cases} W'_n, & n \leq \nu'_1(\epsilon)\\ W_{\nu_1(\epsilon)+n-\nu'_1(\epsilon)}, & n > \nu'_1(\epsilon).\end{cases}$$

那么对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n$,

$$\mathbb{P}(W''_1 \leq s_1, W''_2 \leq x_2, \cdots, W''_n \leq x_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, W_1'' \le s_1, W_2'' \le x_2, \cdots, W_n'' \le x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, W_1' \le s_1, W_2' \le x_2, \cdots, W_n' \le x_n) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\Big(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, \ {\scriptstyle W_1'\le s_1,\cdots,W_j'\le x_j, \atop W_{i+1}\le x_{j+1}\cdots,W_{i+n-j}\le x_n}\Big).
\end{aligned}
$$

由$(W_i, i\ge 2)$与$(W_j', j\ge 2)$的独立同分布性以及事件$\{\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j\}$可由随机变量$W_1,\cdots,W_i,W_1',\cdots,W_j'$表示的事实可知

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, \ {\scriptstyle W_1'\le s_1,\cdots W_j'\le x_j, \atop W_{i+1}\le x_{j+1}\cdots,W_{i+n-j}\le x_n}\Big) \\
&\quad = \mathbb{P}(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, W_1'\le s_1, \cdots W_j' \le x_j) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(W_{i+1} \le x_{j+1}\cdots, W_{i+n-j} \le x_n) \\
&\quad = \mathbb{P}(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, W_1'\le s_1, \cdots W_j' \le x_j)\mathbb{P}(W_{j+1}' \le x_{j+1}\cdots, W_n' \le x_n) \\
&\quad = \mathbb{P}(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, W_1'\le s_1, \cdots W_j' \le x_j, W_{j+1}' \le x_{j+1}\cdots, W_n' \le x_n).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_1'' \le s_1, W_2'' \le x_2, \cdots, W_n'' \le x_n) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\nu_1(\epsilon)=i, \nu_1'(\epsilon)=j, W_1' \le s_1, W_2'' \le x_2, \cdots, W_n' \le x_n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_1' \le s_1, W_2' \le x_2, \cdots, W_n' \le x_n).
\end{aligned}
$$

这表明$(W_n'', n\ge 1)$是与$(W_n', n\ge 1)$具有相同有限维分布随机变量序列. 因此$W_n'', n\ge 1$相互独立, 而且W_1''服从G'分布, $W_n'', n\ge 2$服从相同的分布F. 记$\{W_n'', n\ge 1\}$的部分和序列为T'', 记以其为为间隔时间序列的延迟更新过程为N''. 那么N''是N'的一个版本.

另一方面, 对任意$t\ge 0$, 由

$$
\begin{aligned}
N''(t+T'_{\nu_1'(\epsilon)}) - N''(T'_{\nu_1'(\epsilon)}) &= \sum_{i=\nu_1'(\epsilon)+1}^{\infty} \mathbf{1}_{(T'_{\nu_1(\epsilon)},\, t+T'_{\nu_1(\epsilon)}]}(T_i'') \\
&= \sum_{i=\nu_1'(\epsilon)+1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}(T_i'' - T'_{\nu_1(\epsilon)}) \\
&= \sum_{i=\nu_1'(\epsilon)+1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}\Big(\sum_{k=1}^{\nu_1'(\epsilon)W_k'} + \sum_{k=1+\nu_1'(\epsilon)}^{i} W_k - \sum_{k=1}^{\nu_1'(\epsilon)W_k'}\Big)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=\nu_1'(\epsilon)+1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}\Big(\sum_{k=1+\nu_1'(\epsilon)}^{i} W_k\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}(\sum_{k=1}^{i} W_k),$$

以及

$$\begin{aligned} N(t+T_{\nu_1(\epsilon)}) - N(T_{\nu_1(\epsilon)}) &= \sum_{i=\nu_1(\epsilon)+1}^{\infty} \mathbf{1}_{(T_{\nu_1(\epsilon)}, t+T_{\nu_1(\epsilon)}]}(T_i) \\ &= \sum_{i=\nu_1(\epsilon)+1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}(T_i - T_{\nu_1(\epsilon)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}(\sum_{k=1}^{i} W_k), \end{aligned}$$

可知

$$N''(t+T-_{\nu_{\cdot 1}(\epsilon)}) - N''(T'_{\nu_1'(\epsilon)}) = N(t+T_{\nu_1(\epsilon)}) - N(T_{\nu_1(\epsilon)}). \tag{4.5.2}$$

由此可得, 当$t \geq T_{\nu_1(\epsilon)}$时

$$\begin{aligned} N(t+a) - N(t) &= N(t+a-T_{\nu_1(\epsilon)} + T_{\nu_1(\epsilon)}) - N(t - T_{\nu_1(\epsilon)} + T_{\nu_1(\epsilon)}) \\ &= N''(t+a-T_{\nu_1(\epsilon)} + T'_{\nu_1'(\epsilon)}) - N''(t - T_{\nu_1(\epsilon)} + T'_{\nu_1'(\epsilon)}). \end{aligned}$$

由此并结合**引理**16.3和更新过程的单调不降性质可知, 当$t \geq T_{\nu_1(\epsilon)}$时

$$N''(a+t-\epsilon) - N''(t+\epsilon) \leq N(t+a) - N(t) \leq N''(t+a+\epsilon) - N''(t-\epsilon).$$

进而对任意$t \geq 0$,

$$\begin{aligned} & m(t+a) - m(t) = \mathbb{E}(N(t+a) - N(t)) \\ &\geq \mathbb{E}((N''(a+t-\epsilon) - N''(t+\epsilon))\mathbf{1}_{t \geq T_{\nu_1(\epsilon)}}) \\ &\geq m''(a+t-\epsilon) - m''(t+\epsilon))) - \mathbb{E}((N''(a+t-\epsilon) - N''(t+\epsilon))\mathbf{1}_{\{t < T_{\nu_1(\epsilon)}\}}), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & m(t+a) - m(t) = \mathbb{E}(N(t+a) - N(t)) \\ &\leq \mathbb{E}((N''(a+t+\epsilon) - N''(t-\epsilon))\mathbf{1}_{t \geq T_{\nu_1(\epsilon)}}) + \mathbb{E}((N(a+t) - N(t)\mathbf{1}_{\{t < T_{\nu_1(\epsilon)}\}}) \\ &\leq m''(a+t+\epsilon) - m''(t-\epsilon) + \mathbb{E}((N(a+t) - N(t)\mathbf{1}_{\{t < T_{\nu_1(\epsilon)}\}}). \end{aligned}$$

由引理14.1可知, 对任意$k \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}((N(a+t) - N(t)\mathbf{1}_{\{t < T_{\nu_1(\epsilon)}\}}) \\ &\leq k\mathbb{P}(t < T_{\nu_1(\epsilon)}) + \mathbb{E}((N(t+a) - N(t))\mathbf{1}_{\{N(t+a) - N(t) \geq k\}}) \\ &\leq k\mathbb{P}(t < T_{\nu_1(\epsilon)}) + \mathbb{E}((1 + \tilde{N}(\epsilon))\mathbf{1}_{\{1+\tilde{N}(\epsilon) \geq k\}}) \end{aligned}$$

先令$t \to \infty$, 再令$k \to \infty$. 由条件(H2)可得

$$\mathbb{E}((N(a+t) - N(t)\mathbf{1}_{\{t<T_{\nu_1(\epsilon)}\}}) \to 0.$$

同理可知

$$\mathbb{E}((N''(a+t-\epsilon) - N(t+\epsilon))\mathbf{1}_{\{t<T_{\nu_1(\epsilon)}\}}) \to 0.$$

因此对任意分布G, G'以及$\epsilon > 0$, 都有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(m''(a+t-\epsilon) - m''(t+\epsilon)) &\leq \lim_{t\to\infty}(m(t+a) - m(t)) \\ &\leq \lim_{t\to\infty}(m''(a+t+\epsilon) - m''(t-\epsilon)).\end{aligned}$$

若$\mu_F < \infty$, 取G'为F的平衡分布, 那么由**定理**14.7可知

$$\frac{a-2\epsilon}{\mu_F} \leq \lim_{t\to\infty}(m(t+a) - m(t)) \leq \frac{a+2\epsilon}{\mu_F}.$$

对其令$\epsilon \to 0$可得

$$\lim_{t\to\infty}(m(t+a) - m(t)) = \frac{a}{\mu_F}.$$

若$\mu_F = \infty$, 则令G'为**引理**14.9中的分布$F^{(c)}$, 那么由该引理可知

$$\limsup_{t\to\infty}(m(t+a) - m(t)) \leq \frac{a+2\epsilon}{\int_0^c (1-F(s))\mathrm{d}s}.$$

令$c \to +\infty$可得$\lim_{t\to\infty}(m(t+a) - m(t)) = 0$. □

最后我们给出定理16.1的证明.

证明 若延迟更新过程的N的间隔时间分布F的均值$\mu_F < +\infty$, 记其更新时间序列为T. 此时由引理16.6和引理16.7可知, 对任意与N独立的间隔时间分布为F的延迟更新过程的更新时间序列T', 引理16.6中(H2)成立, 从而由引理16.8 可知定理结论成立.

若延迟更新过程的N的间隔时间分布F的均值$\mu_F = +\infty$, 那么构造一个与N独立且有相同间隔时间分布的延迟更新过程N'使得延迟时间分布$G = F^{(c)}$. 若引理16.6中(H1)成立, 那么由引理16.7可知结论成立. 若(H2)成立, 那么由引理16.8可知结论成立. □

练习题

16.1 证明: 对任意$0 < \epsilon$以及任意分布G, G', $\mathbb{P}(\nu_1(\epsilon) < \infty) = 1$当且仅当对任意$k$以及任意$0 < \epsilon$, 任意分布$G, G'$, $\mathbb{P}(\nu_k(\epsilon) < \infty) = 1$.

第五章　布朗运动

作为一种物理现象, 布朗运动由19世纪20年代英国植物学家Robert Brown在观察悬浮在液体表面的花粉粒子的运动轨迹时发现. 1905年Einstein给出了布朗运动的物理学解释和方程刻画, 其深层次的数学理论基础与构造则由Wiener在1923年得到. 到目前, 布朗运动已成为运动最广泛的数学模型之一, 在自然科学、金融学、社会科学等领域有大量应用.

5.1　布朗运动及其分布

(A) 标准布朗运动

利用正态分布(随机变量), 我们定义布朗运动如下:

定义17.1 称实值随机过程$B = \{B(t);\ t \geq 0\}$ 为Wiener过程或布朗运动，若

(a) $B(0) = 0$ 且B具有连续轨道;

(b) B是独立增量过程, 即对任意$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n \geq 2$, 增量

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

相互独立;

(c) 正态性, 对任意$0 \leq s < t$, $B(t) - B(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$, 其中$\sigma^2$ 为正常数.

若$B_x(t) = x + B(t)$, 称$B_x = \{B_x(t);\ t \geq 0\}$为从$x$出发的布朗运动.

若布朗运动B满足$\sigma^2 = 1$, 则称其为标准布朗运动. 显然若B是方差为σ^2的布朗运动, 那么B/σ为标准布朗运动.

显然, 由布朗运动定义(b),(c)可知B具有平稳独立增量.

在一定意义上, 布朗运动B可以通过简单对称随机游动在时间和空间上采取一定方式连续化后得到. 由第一章第四节可知简单对称随机游动$S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$记录了每单位时间向左或向右等可能地跳一个单位的粒子在时刻n的轨迹

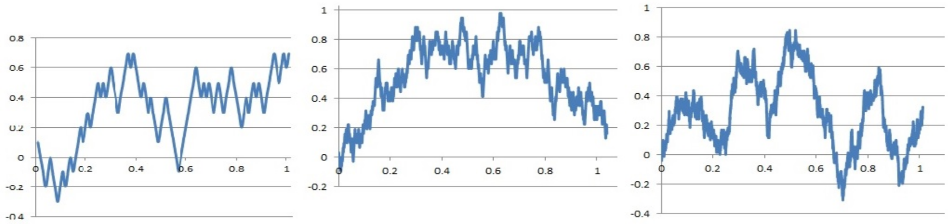
变化. 令

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^{[mt]} \frac{1}{\sqrt{m}} X_k.$$

那么$S_m(t)$记录了每$1/m$单位时间向左或向右(各$1/2$可能)跳$1/\sqrt{m}$单位距离的粒子的轨迹变化. $m \to \infty$则意味着, 粒子跳跃的越来越频繁, 跳跃幅度也越来越小. 对任意固定的时刻t, 中心极限定理保证了

$$S_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{[mt]} X_k = \frac{\sqrt{[mt]}}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{[mt]}} \sum_{k=1}^{[mt]} X_k \to \sqrt{t} N(0,1) = N(0,t).$$

更严格的数学分析表明, 随机过程$S_m(t)$随着$m \to \infty$会收敛到标准布朗运动B. 下面分别是$m = 100, 1000, 5000$时, $S_m(t)$的轨道局部($t \in [0,1]$). 当m比较大时, $S_m(t)$ 可以近似看作布朗运动.



m=100　　m=1000　　m=5000

性质17.1 布朗运动的均值函数$m(t) \equiv 0$; 方差函数$Var(B(t)) = \sigma^2 t$; 协方差函数

$$R(s,t) = \mathbb{E}(B(s)B(t)) = (s \wedge t)\sigma^2.$$

证明: 只需验证协方差函数. 不妨设$s < t$,

$$R(s,t) = \mathbb{E}(B(s)B(t)) = \mathbb{E}(B(s)(B(t) - B(s)) + \mathbb{E}(B^2(s)) = \sigma^2 s. \qquad \square$$

例17.1 设$0 < t_1 < t_2 < t_3$, 求$\mathbb{E}(B(t_1)B(t_2)B(t_3))$.

解 由独立增量与正态性可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B(t_1)B(t_2)B(t_3)) &= \mathbb{E}\big(B(t_1)\big(B(t_1) + B(t_2) - B(t_1)\big)\big(B(t_2) + B(t_3) - B(t_2)\big)\big) \\ &= \mathbb{E}\big(B(t_1)B(t_1)B(t_2)\big) + \mathbb{E}\big(B(t_1)\big(B(t_2) - B(t_1)\big)B(t_2)\big) \\ &= \mathbb{E}\big(B^3(t_1)\big) + \mathbb{E}\big(B(t_1)\big(B(t_2) - B(t_1)\big)^2\big) = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

定理17.2 设$B = \{B(t);\ t \geq 0\}$为标准布朗运动,那么下述过程也是标准布朗运动.

(1) $\{-B(t);\ t \geq 0\}$;

(2) $\{B(t+s) - B(s);\ t \geq 0\}$, 其中$s$为任意给定非负数;

(3) $\{cB(t/c^2);\ t \geq 0\}$ 其中c为任意给定正数;

(4) $\{B(u)-B(u-t);\ 0\le t\le u\}$ 其中u为给定正数.

证明 按布朗运动定义，不难验证上述结论成立. 下面以(4)为例解释如下: 令

$$X(t)=B(u)-B(u-t),\quad 0\le t\le u.$$

(a) 显然$X(0)=0$且X轨道连续;

(b) 对任意$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le u$,

$$\begin{aligned}&(X(t_1),X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1}))\\&=(B(u)-B(u-t_1),B(u-t_1)-B(u-t_2),\cdots,B(u-t_{n-1})-B(u-t_n)),\end{aligned}$$

由布朗运动独立增量性质, 显然相互独立

(c) 对任意$0\le s<t\le u$,

$$X(t)-X(s)=B(u-s)-B(u-t)\sim N(0,t-s).$$

因此$\{X(t),0\le t\le u\}=\{B(u)-B(u-t),0\le t\le u\}$为标准布朗运动. □

注17.1 (2),(3),(4)分别表示对标准布朗运动做起点变换, 尺度变换以及时间反向变换后仍是标准布朗运动. 此外我们还可以证明$\{tB(1/t);\ t\ge 0\}$(其中$t=0$时取值为0)也是标准布朗运动.

(B) 标准布朗运动的有限维分布与条件分布

下面我们研究标准布朗运动的有限维分布. 为此, 总设$B=\{B(t);\ t\ge 0\}$为标准布朗运动并记

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}},$$

即对任意$a\in R$, $t>0$, $f(x-a,t)$是正态分布$N(a,t)$的密度函数. 容易验证

(1) 对任意$a,b\in R,s,t>0$,

$$f(x-a,s)f(x-b,t)=f(a-b,s+t)f(x-\frac{ta+sb}{s+t},\frac{st}{s+t}).\qquad(5.1.1)$$

(2)对任意$x\in R$,

$$\int_x^\infty f(y-a,t)dy=\int_{(x-a)/\sqrt{t}}^\infty f(u,1)du=\Phi((a-x)/\sqrt{t})$$

其中Φ为标准正态分布函数.

定理17.3 对任意$n\ge 1$, $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$, $(B(t_1),B(t_2),\cdots,B(t_n))$是均值

为0, 协方差矩阵为

$$\mathbb{D}=(t_i\wedge t_j)_{i,j=1,\cdots n}=\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1\\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2\\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$$

的n维正态随机变量. 因此$(B(t_1),\cdots,B(t_n))$的联合密度函数为

$$\rho(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=f(x_1,t_1)\prod_{i=2}^{n}f(x_i-x_{i-1},t_i-t_{i-1}).$$

证明 对任意$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 由布朗运动的平稳正态独立增量性质可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k B(t_k)\Big\}\Big)&=\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}(B(t_k)-B(t_{k-1}))\sum_{j=k}^{n}\lambda_j\Big\}\Big)\\&=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}(B(t_k)-B(t_{k-1}))\sum_{j=k}^{n}\lambda_j\Big\}\Big)\\&=\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\Big(\sum_{j=k}^{n}\lambda_j\Big)^2\Big\}.\end{aligned}$$

直接验证可知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\Big(\sum_{j=k}^{n}\lambda_j\Big)^2&=\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{n}t_k\Big(\sum_{j=k}^{n}\lambda_j\Big)^2-\sum_{k=1}^{n-1}t_k\Big(\sum_{j=k+1}^{n}\lambda_j\Big)^2\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{n}2t_k\lambda_k\sum_{j=k+1}^{n}\lambda_j+\sum_{k=1}^{n}t_k\lambda_k^2\Big]\\&=\frac{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathbb{D}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T}{2}.\end{aligned}$$

$(B(t_1),\cdots,B(t_n))$服从均值为0协方差矩阵为$\mathbb{D}$的n维正态分布, 联合密度函数

$$\rho(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\mathbb{D}|}}\mathrm{e}^{-\frac{(x_1,\cdots,x_n)\mathbb{D}^{-1}(x_1,\cdots,x_n)^T}{2}}.$$

由矩阵求逆计算可知$\mathbb{D}^{-1}$可表示为

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{t_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{t_2-t_1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{t_{n-1}-t_{n-2}} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{t_n-t_{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{pmatrix}$$

令$x_0=0$, $t_0=0$, 将$\mathbb{D}^{-1}$的上述表达式代入联合密度函数得

$$\begin{aligned}\rho(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}}\\ &= f(x_1,t_1)\prod_{i=2}^n f(x_i-x_{i-1},t_i-t_{i-1}).\end{aligned}$$ □

推论17.4 当$B(t_k)=a$时, $(B(t_1),\cdots,B(t_{k-1}),B(t_{k+1}),\cdots,B(t_n))$的密度函数为

$$\begin{aligned}&\varrho(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n;t_1,\cdots t_{k-1},t_{k+1},\cdots,t_n|a,t_k)\\ &=\rho(x_1,\cdots,x_{k-1},a,x_{k+1},\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)/f(a,t_k).\end{aligned}$$

特别 $\varrho(x_2,\cdots,x_n;t_2,\cdots,t_n|a,t_1)=f(x_2-a,t_2-t_1)\prod_{i=3}^n f(x_i-x_{i-1},t_i-t_{i-1})$,

$$\varrho(x_1,\cdots,x_{n-1};\cdots,t_{n-1}|a,t_n)=\frac{f(a-x_{n-1},t_n-t_{n-1})}{f(a,t_n)}\prod_{i=1}^{n-1}f(x_i-x_{i-1},t_i-t_{i-1}).$$

证明 由条件概率密度公式, 我们只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}dy_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\rho(y_1,\cdots,y_{k-1},a,y_{k+1},\cdots,y_n;t_1,\cdots,t_n)dy_n=f(a,t_k). \tag{5.1.2}$$

事实上由

$$\begin{aligned}\text{l.h.s of }\ (5.1.2) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(y_1,t_1)dy_1\int_{-\infty}^{\infty}f(y_2-y_1,t_2-t_1)dy_2\\ &\times\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_{k-1}-y_{k-2},t_{k-1}-t_{k-2})f(a-y_{k-1},t_k-t_{k-1})dy_{k-1}\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}f(y_{k+1}-a,t_{k+1}-t_k)dy_{k+1}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_n-y_{n-1},t_n-t_{n-1})dy_n\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}\text{l.h.s of }\ (5.1.2) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(y_1,t_1)dy_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_{k-2}-y_{k-3},t_{k-2}-t_{k-3})dy_{k-2}\\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}f(y_{k-1}-y_{k-2},t_{k-1}-t_{k-2})f(a-y_{k-1},t_k-t_{k-1})dy_{k-1}\\ &=\cdots=\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1,t_1)f(a-y_1,t_k-t_1)dy_1=\text{r.h.s. of }\ (5.1.2),\end{aligned}$$

其中第二个等号用了公式(5.1.1). □

例17.2 在甲乙两人的自行车比赛中,以$Y(t)$表示当完成$100t\%$的比赛路程时甲领先的时间(以秒记). 假设$Y(t)$是方差为σ^2 的布朗运动，若甲以σ秒领先赢得比赛，问甲在路程中点领先的概率是多大?

解 注意到$B(t)=Y(t)/\sigma$ 为标准布朗运动，所求概率为

$$p=\mathbb{P}(B(1/2)>0|B(1)=1)$$

由于在$B(1)=1$条件下, $B(1/2)\sim N(1/2,1/4)$, 因此

$$p=\mathbb{P}(N(1/2,1/4)>0)=\mathbb{P}(N(0,1)>-1)=\Phi(1)\approx 0.8413,$$

其中Φ为标准正态分布函数. □

在给定两个时刻取值的条件下, 我们有如下的结论, 证明省略.

推论17.5 $B(s)=x, B(t)=y$时, 任取$s\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le t$, $(B(t_1),\cdots,B(t_n))$是均值为

$$\left(x+\frac{y-x}{t-s}(t_i-s)\right)_{1\le i\le n},$$

协方差矩阵

$$\mathbb{D}=\left(\frac{(t-t_{i\vee j})(t_{i\wedge j}-s)}{t-s}\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

的n维正态随机变量.

例17.3 在$\{B(1)=0,B(3)=u\}$条件下, 求事件$\{B(2)>u,B(4)>u\}$发生的概率.

解 由独立增量性, 所求概率为

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(B(2)>u,B(4)>u|B(3)=u,B(1)=0)\\&=\mathbb{P}(B(2)>u|B(3)=u,B(1)=0)\mathbb{P}(B(4)>u|B(3)=u,B(2)>u,B(1)=0)\\&=\mathbb{P}(B(2)>u|B(3)=u,B(1)=0)\mathbb{P}(B(4)>u|B(3)=u).\end{aligned}$$

由推论17.5可知(对应地取$s=1,t=3,t_1=2$, $x=0$, $y=u$), $\{B(3)=u,B(1)=0\}$条件下$B(2)\sim N(u/2,1/2)$. 所以

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B(2)>u|B(3)=u,B(1)=0)&=\mathbb{P}(N(u/2,1/2)>u)\\&=\mathbb{P}(N(0,1)>u/\sqrt{2})=1-\Phi(u/\sqrt{2}).\end{aligned}$$

由推论17.4或布朗运动独立增量性可知$\{B(3)=u\}$条件下, $B(4)\sim N(u,1)$. 因此

$$\mathbb{P}(B(4)>u|B(3)=u)=1/2.$$

因此所求概率$p=(1-\Phi(u/\sqrt{2}))/2$. □

(C) 轨道性质

定理17.6 标准布朗运动$B=\{B(t),t\ge 0\}$存在.

(Kolmogrov连续修正定理) 设$\{X(t),t\ge 0\}$为实值随机过程, 若在某个参数区间$[a,b]$ ($[a,b]$可以是$[0,\infty]$) 上存在正常数α, ε使得对任意$t,t+h\in[a,b]$

$$\mathbb{E}(|X(t)-X(t+h)|^\alpha)\le const\cdot h^{1+\varepsilon},$$

那么$\{X(t), t\in[a,b]\}$存在一个轨道连续的修正.

定理17.6的证明 对任意满足条件$\sigma^2=1$, $B(0)=0$的布朗运动, 我们有

$$\mathbb{E}(|B(t+h)-B(t)|^4)=3h^2.$$

由Kolmogorov连续修正定理可知结论成立.

定理17.7 标准布朗运动$B=\{B(t);\ t\geq 0\}$的几乎所有轨道处处不可微.

证明 只考虑$t\in[0,1]$的情形. 任取轨道ω, 若$B(\cdot,\omega)$在s可微, 则存在$\delta\in(0,1/2)$与整数$l\geq 1$使得当$|t-s|<\delta$时

$$|B(t,\omega)-B(s,\omega)|<l|t-s|.$$

对任意$n>4/\delta$, 令$i=[ns]+1\leq n+1$, 对$j=i\pm 1, i\pm 2, i\pm 3$都应有

$$\begin{aligned}&|B(j/n,\omega)-B((j-1)/n,\omega)|\\&\quad\leq|B(j/n,\omega)-B(s,\omega)|+|B((j-1)/n,\omega)-B(s,\omega)|\\&\quad\leq l|j/n-s|+l|(j-1)/n-s|\leq 7l/n.\end{aligned}\tag{5.1.3}$$

令$A_{n,l}^i=\{\omega;$对给定的l,i (5.1.3) 对$j=i+1,i+2,i+3$,或对$j=i-1,i-2,i-3$成立$\}$. 显然随着l的增加, $A_{n,l}^i$ 单调不降. 特别取$\delta=1/m$, $m=2,3,\cdots$, 则

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\{\omega;\text{存在}s\in[0,1]\text{使得}B(\cdot,\omega)\text{在}s\text{点可微}\}\\&\subset\bigcup_{l\geq 1,m\geq 2}\bigcap_{n\geq 4m}\bigcup_{i\leq n+1}A_{n,l}^i.\end{aligned}$$

但是当$n\to\infty$时

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{i\leq n+1}A_{n,l}^i)&\leq(n+1)\max_{1\leq i\leq n+1}\mathbb{P}(A_{n,l}^i)\\&\leq 2(n+1)\Big[\mathbb{P}(|B(j/n)-B((j-1)/n)|\leq 7l/n)\Big]^3\\&=2(n+1)\Big[\int_{-7l/n}^{7l/n}\frac{1}{\sqrt{2\pi/n}}\mathrm{e}^{-ny^2/2}dy\Big]^3\\&\leq 2(n+1)(14l/\sqrt{2\pi n})^3\to 0.\end{aligned}$$

因此$\mathbb{P}(\Omega_1)\leq\lim\limits_{l\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i\leq n+1}A_{n,l}^i)=0$. 即对几乎必然的$\omega$, $B(\cdot,\omega)$处处不可微. □

布朗运动轨道函数$B(\cdot,\omega)$为我们提供了连续但处处不可微的函数实例.

练习题 以下总设$B=\{B(t),t\geq 0\}$为标准布朗运动.

17.1 对任意$0\leq s<t$, 求$B(s)+B(t)$的分布密度函数.

17.2 已知$B(1)=x$, 对任意$0\le s_1<s_2\le s_3<s_4\le 1$, 证明

(1) $\mathbb{E}((B(s_4)-B(s_3))(B(s_2)-B(s_1)))=(s_4-s_3)(s_2-s_1)(x^2-1)$

(2) $\mathbb{E}[((B(s_4)-B(s_1))^2]=(s_4-s_1)+(s_4-s_1)^2(x^2-1)$

17.3 在例17.2中若甲在一半赛程时领先乙σ秒, 问比赛结束时甲领先的概率.

17.4 令$Y(t)=B^2(t)-t$, $R(t)=\mathrm{e}^{cB(t)-c^2t/2}$, 其中$c>0$为常数. 证明对任意$0\le t<s$, $\mathbb{E}(Y(s)|B(t))=Y(t)$以及$\mathbb{E}(R(s)|B(t))=R(t)$.

5.2 反射原理与极值分布

对任意$a \in R$, 定义

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0;\ B(t) = a\} = \begin{cases} \inf\{t \geq 0;\ B(t) \geq a\}, & a \geq 0; \\ \inf\{t \geq 0;\ B(t) \leq a\}, & a < 0. \end{cases}$$

称τ_a为B首次到达状态a的时刻,简称为a的首达时.

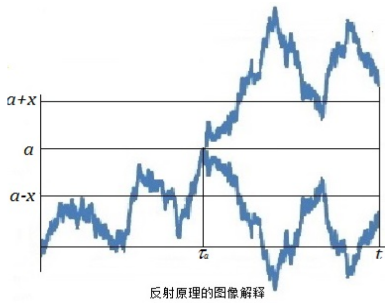
(A) 反射原理

利用布朗运动的对称性和独立增量性, 可得如下反射原理.

引理18.1(反射原理) 对任意$a \in R$及$x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(B(t) \geq a + x, \tau_a \leq t) = \mathbb{P}(B(t) < a - x, \tau_a \leq t). \tag{5.2.1}$$

反射原理的直观图形解释如下,



反射原理的图像解释

我们将在第7章给出该引理的严格证明(详见定理26.7).

推论18.2 对任意$a \in R$, $\mathbb{P}(B(t) \geq a | \tau_a \leq t) = 1/2$.

(B) 极值分布

定理18.3 记$B^*(t) = \max\limits_{0 \leq u \leq t} B(u)$. 对任意$z \geq 0$, $x \leq z$,

$$\mathbb{P}(B^*(t) \geq z, B(t) < x) = \mathbb{P}(B(t) > 2z - x) = \int_{2z-x}^{\infty} f(y,t)\mathrm{d}y.$$

因此$(B^*(t), B(t))$的联合密度函数为

$$h(z,x) = 2f'(2z-x,t) = \frac{2(2z-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \mathrm{e}^{-\frac{(2z-x)^2}{2t}}, \quad x \leq z, z \geq 0.$$

证明 由轨道连续性及$B(0)=0$可知, 对任意$z \geq 0$,

$$\{B^*(t) \geq z\} = \{\tau_z \leq t\} \tag{5.2.2}$$

从而由反射原理(5.2.1)可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(B^*(t) \geq z, B(t) < x) = \mathbb{P}(\tau_z \leq t, B(t) < x) \\ &= \mathbb{P}(B(t) < z - (z-x), \tau_z \leq t) = \mathbb{P}(B(t) > z + (z-x), \tau_z \leq t) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(B(t) > 2z - x) = \int_{2z-x}^{\infty} f(y,t)\mathrm{d}y.$$

上式两边关于z, x求二阶混合偏导后可得联合密度函数$h(z,x)$. □

例18.1 求$\mathbb{P}(B^*(t) > x | B(t) = B^*(t))$.

解 由概率论知识可知$\{B(t) = B^*(t)\}$条件下$B^*(t)$的边际密度函数为

$$g(z) = \frac{h(z,z)}{\int_0^\infty h(z,z)\mathrm{d}z} = \frac{z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2t}}}{\int_0^\infty z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2t}}\mathrm{d}z} = \frac{z}{t}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2t}}$$

因此

$$\mathbb{P}(B^*(t) > x | B(t) = B^*(t)) = \int_x^\infty g(z)\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}.$$ □

推论18.4 对任意$z \geq 0$,

$$\mathbb{P}(B^*(t) \geq z) = 2\mathbb{P}(B(t) \geq z) = \mathbb{P}(|B(t)| \geq z),$$

因此$B^*(t)$与$|B(t)|$ 同分布, $B^*(t)$的密度函数

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-z^2/2t}.$$

证明 对任意$z \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B^*(t) \geq z) &= \mathbb{P}(B^*(t) \geq z, B(t) \geq z) + \mathbb{P}(B^*(t) \geq z, B(t) < z) \\
&= \mathbb{P}(B(t) \geq z) + \mathbb{P}(B(t) > z) = 2\mathbb{P}(B(t) \geq z) \\
&= 2\int_z^\infty \frac{1}{2\pi t}\mathrm{e}^{-u^2/2t}\mathrm{d}u = \mathbb{P}(|B(t)| \geq z).
\end{aligned}$$

推论得证. □

例18.2 假定一只股票价格按标准布朗运动变化，若你以价格$b + c$买入, 而现在的价格恰好为b, 你计划在股票价格回到$b + c$元或最多再观望T 时间后将股票抛出, 问你不能重新获得买入价格的概率($c > 0$).

解 从现在开始看股票的价格$S(t)$是一个从b出发的布朗运动, 即$S(t) = b + B(t)$. 所谓不能重新获得买入价格就是指在时刻T之前，$S(t)$最大值小于$b + c$, 即

$$B_T^* = \max_{0 \leq s \leq T} B(s) < c.$$

由推论18.4可知所求概率为

$$p = 1 - \mathbb{P}(B^*(T) \geq c) = 1 - \mathbb{P}(|B(T)| > c) = 1 - 2\Phi(-c/\sqrt{T}).$$ □

推论18.5 对任意$z > 0$, τ_z的分布密度函数

$$p(t) = \frac{z}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-z^2/2t}.$$

因此$\mathbb{P}(\tau_z < \infty) = 1$, $\mathbb{E}(\tau_z) = \infty$.

证明 对任意$z \geq 0$, 由(5.2.2)可知

$$\mathbb{P}(\tau_z \leq t) = \mathbb{P}(B^*(t) \geq z) = 2\int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-u^2/2t}\mathrm{d}u = \int_{z/\sqrt{t}}^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u$$

两边关于t求导得

$$p(t) = \frac{z}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-z^2/2t}.$$

即

$$\mathbb{P}(\tau_z \leq t) = \int_0^t \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}}\mathrm{e}^{-z^2/2s}\mathrm{d}s.$$

因此

$$\mathbb{P}(\tau_z < \infty) = \int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}}\mathrm{e}^{-z^2/2s}\mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = 1$$

而且

$$\mathbb{E}(\tau_z) = \int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi s}}\mathrm{e}^{-z^2/2s}\mathrm{d}s = \infty.$$

推论得证. □

注意对任意$z \geq 0$, τ_z与τ_{-z}分布相同(见习题18.5), 因此对任意$z \in R$, τ_z的密度函数

$$p(t) = \frac{|z|}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathrm{e}^{-z^2/2t}.$$

因此推论18.5表明对空间R中任意一点z, 布朗运动必然在有限时间内可到达这一点,而到达这一点的平均时长为无穷.

例18.3 求例17.2中在比赛后半程甲都不落后于乙的概率.

解 依题设$Y(t)$是方差为σ的布朗运动, 因而$B(t) = Y(t)/\sigma$是标准布朗运动. 令

$$B_* = \min\{B(u);\ 1/2 \leq u \leq 1\}.$$

已知$B(1) = 1$, 所求概率为

$$p = \mathbb{P}(B_* \geq 0 | B(1) = 1).$$

注意到$W = -B$仍为标准布朗运动, 因此

$$p = \mathbb{P}(W^* \leq 0 | W(1) = -1),$$

其中$W^* = \max\{W(u);\ 1/2 \leq u \leq 1\}$. 记$W(1) = -1$下的条件概率为$\mathbb{P}_1$, 数学期望为$\mathbb{E}_1$ 那么

$$p = \mathbb{P}_1(W^* \leq 0) = \mathbb{E}_1\Big(\mathbb{P}_1\big(W^* \leq 0 | W(1/2)\big)\Big).$$

由推论17.4可知,$W(1) = -1$条件下$W(1/2) \sim N(-1/2, 1/4)$, 因此

$$p = \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}_1\big(W^* \leq 0 | W(1/2) = x\big) f(x + 1/2, 1/4)\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1(W^*\le 0|W(1/2)=x)&=\mathbb{P}(W^*\le 0|W(1/2)=x,W(1)=-1)\\&=\mathbb{P}(\max\{U(t),0\le t\le 1/2\}\le -x|U(0)=0,U(1/2)=-1-x),\end{aligned}$$

其中$U(t)=W(t+1/2)-W(1/2)$为标准布朗运动. 将其重新记作B得

$$\mathbb{P}_1(W^*\le 0|W(1/2)=x)=\mathbb{P}\big(B^*(1/2)\le -x|B(1/2)=-1-x\big).$$

将定理18.3中对应的x换成$-1-x$, t换成$1/2$可得$B(1/2)=-1-x$时$B^*(1/2)$的边际分布密度为

$$g(z|-1-x)=4(2z+1+x)\mathrm{e}^{-(2z+1+x)^2+(1+x)^2},\qquad z\ge 0.$$

因此

$$\mathbb{P}_1(W^*\le 0|W(1/2)=x)=\int_0^{-x}4(2z+1+x)\mathrm{e}^{-(2z+1+x)^2+(1+x)^2}\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{4x}.$$

进而

$$p=\int_{-\infty}^0(1-\mathrm{e}^{4x})\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\mathrm{e}^{-2(x+1/2)^2}\mathrm{d}x=2\Phi(1)-1.\qquad\square$$

(C) 零点概率

定理18.6 从$x\neq 0$ 出发的标准布朗运动$B_x(s)=x+B(s)$在$[0,t]$至少有一个零点的概率

$$p_t(x)=\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t s^{-3/2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2s}}\mathrm{d}s.$$

证明 先设$x<0$, 那么

$$\begin{aligned}p_t(x)&=\mathbb{P}(\max_{0\le u\le t}B(u)+x\ge 0)=\mathbb{P}(\max_{0\le u\le t}B(u)\ge -x)=\mathbb{P}(\tau_{-x}\le t)\\&=\mathbb{P}(\tau_{|x|}\le t)=\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t s^{-3/2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2s}}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

再设$x>0$, 此时

$$\begin{aligned}p_t(x)&=\mathbb{P}(\min_{0\le u\le t}B(u)+x\le 0)=\mathbb{P}(\min_{0\le u\le t}B(u)\le -x)\\&=\mathbb{P}(\max_{0\le u\le t}(-B(u))\ge x)=\mathbb{P}(\tau_x\le t)\qquad(\text{因为}-B\text{也是标准布朗运动})\\&=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t s^{-3/2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2s}}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

综合两种情况可知定理成立. $\square$

推论18.7 设$0<s<t$, B在时间区间(s,t)内至少存在一个零点的概率

$$q=\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}.$$

证明 由定理18.6

$$\begin{aligned}q &= \mathbb{E}(p_{t-s}(B(s))) = 2\int_0^\infty f(x,s)p_{t-s}(x)\mathrm{d}s\\ &= 2\int_0^{t-s}\mathrm{d}u\int_0^\infty f(x,s)f(x,u)\frac{x}{u}\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{t-s}\frac{f(0,s+u)}{u}\mathrm{d}u\int_0^\infty xf(x,\frac{su}{s+u})\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{t-s}\frac{1}{s+u}\sqrt{\frac{s}{u}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

积分变量代换$v=\sqrt{u/s}$后得

$$\begin{aligned}q &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{(t-s)/s}}\frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v \qquad (\text{积分变换 })\\ &= \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{(t-s)/s}) = \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{t-s}{s}} = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}.\end{aligned}$$

推论得证. □

例18.4 设$c>0$为常数, 求$p=\mathbb{P}(\text{存在}t_0\in(1,2)\text{使得}B(t_0)=ct_0|B(3)=3c)$.

解 令$W(t)=tB(1/t)$, 那么$W(t)$仍为标准布朗运动, 此时

$$\{\text{存在}t_0\in(1,2)\text{使得}B(t_0)=ct_0\} = \{\text{存在}t_0\in(1/2,1)\text{使得}W(t_0)=c\}.$$

进而由推论18.7可知

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}(\text{存在}t_0\in(1/2,1)\text{使得}W(t_0)=c|W(1/3)=c)\\ &= \mathbb{P}(\text{存在}t_0\in(1/6,2/3)\text{使得}W(t_0)=0) = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{1}{4}} = 2/3.\end{aligned}$$ □

定理18.8* 令$v_t=\sup\{s;0\le s\le t, B(s)=B^*(t)\}$, 那么$v_t$的密度函数为

$$\nu(s)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}, \qquad 0<s<t.$$

证明 注意到对任意$0<s<t$,

$$\{v_t\le s\} = \{\max_{0\le u\le s}B(u) > \max_{s<u\le t}B(u)\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(v_t\le s) &= \mathbb{P}(\max_{0\le u\le s}B(u) > \max_{s<u\le t}B(u))\\ &= \mathbb{E}\big(\mathbb{P}(\max_{0\le u\le s}B(u) > \max_{s<u\le t}B(u)|B^*(s),B(s))\big)\\ &= \mathbb{E}\big(\mathbb{P}(B^*(s)-B(s) > \max_{s<u\le t}(B(u)-B(s))|B^*(s),B(s))\big).\end{aligned}$$

由平稳独立增量性可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(v_t\le s) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{P}\big(B^*(s)-B(s) > \max_{0\le u\le t-s}W(u)\big)\Big),\\ &= \mathbb{E}\Big(\int_0^{B^*(s)-B(s)}2f(u,t-s)\mathrm{d}u\Big)\end{aligned}$$

其中W表示标准布朗运动且与B独立. 由定理15.3,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(v_t \le s) &= \int_0^\infty \mathrm{d}z \int_0^\infty 4f(z+y,s)\frac{z+y}{s}\mathrm{d}y \int_0^y f(u,t-s)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}z \int_0^\infty 4f(z+u,s)f(u,t-s)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty 4f(z,t)\mathrm{d}z \int_0^\infty f(u+\frac{t-s}{t}z, \frac{(t-s)s}{t})\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty 4f(z,t)\mathrm{d}z \int_{z\sqrt{\frac{(t-s)}{ts}}}^\infty f(u,1)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

两边求导得

$$\begin{aligned}\nu(s) &= \int_0^\infty 4f(z,t)f(z\sqrt{\frac{t-s}{ts}},1)\frac{\sqrt{t}z}{2\sqrt{s^3(t-s)}}\mathrm{d}z \\ &= \int_0^\infty \frac{z}{\pi\sqrt{s^3(t-s)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2s}}\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}.\end{aligned}$$

定理得证. □

练习题

18.1 求$\mathbb{E}(B^*(t)|B(t)=x)$.

18.2 求$\mathbb{P}(B(1)\le x|B(u)\ge 0, 0\le u\le 1)$.

18.3 股票A,B的价格比服从随机过程$Y(t)=\mathrm{e}^{B(t)}$其中$B(t)$为标准布朗运动, 已知在时刻$t=1, t=2$时价格比值分别是$\mathrm{e}^{0.5}$和e, 试估算在$(1,2)$时间段内B 股票价格曾超过A 价格的概率

18.4 证明对任意$z\ge 0$, τ_z与τ_{-z}同分布.

18.5 对任意$\lambda\ge 0$, 证明$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda\tau_z}) = e^{-\sqrt{2\lambda}|z|}$.

18.6 当$0<z\to\infty$时, 证明$\tau_z\to+\infty$, a.s. ([提示] τ_z单调不降从而极限必然存在, 对任意$t>0$, $\mathbb{P}(\lim\limits_{z\to\infty}\tau_z>t)=\lim\limits_{z\to\infty}\mathbb{P}(\tau_z>t)=1$.)

18.7* 令$\gamma_t=\sup\{s\le t; B(s)=0\}$, 证明

$$\mathbb{P}(\gamma_t\le x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{t}}, \qquad x\le t.$$

5.3 高斯过程与积分布朗运动

(A) 高斯过程与布朗桥

定义19.1 设$X=\{X(t);\ t\in T\}$是概率空间$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$上的随机过程. 称$X$为高斯过程(系), 若对任意的$t_1,\cdots,t_n\in T$,

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$$

服从正态分布(包括退化情形), 亦即存在n维向量$\mu=\{\mu_1,\cdots,\mu_n\}^T$以及$n$阶半正定或正定矩阵$\mathbf{D}$使得对任意$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T\in R^n$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k)})=\exp\Big\{\mathrm{i}\lambda^T\mu-\frac{1}{2}\lambda^T\mathbf{D}\lambda\Big\}.$$

由此可知$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$的均值向量为$\mu$, 协方差矩阵为$\mathbf{D}$.

显然高斯过程的有限维分布由其均值(函数)和协方差(函数)唯一确定. 由定理17.2, 布朗运动B 是一个高斯过程; 再由推论17.4,在$B(s),B(t)$给定的条件下布朗运动$\{B(u);\ s<u<t\}$也是高斯过程.

定理19.1 $X=\{X(t);\ t\in T\}$是高斯系当且仅当其中任意有限个随机变量的线性组合都服从一元正态分布.

证明 “必要性”: 任取有限个随机变量$X(t_1),\cdots,X(t_n)$以及任意$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 线性组合$\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k)$的特征函数

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k))})=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sum_{k=1}^n u\lambda_kX(t_k))})=\exp\Big\{\mathrm{i}u\lambda^T\mu-\frac{u^2}{2}\lambda^T\mathbf{D}\lambda\Big\}$$

由此可知$\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k)\sim N(\lambda^T\mu,\lambda^T\mathbf{D}\lambda)$.

“充分性”: 任取$X(t_1),\cdots,X(t_n)$以及$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 由于$\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k)$服从正态分布,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k)})&=\exp\Big\{\mathrm{i}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k))-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k))\Big\}\\&=\exp\Big\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\lambda_k\mathbb{E}(X(t_k))-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n\lambda_k\lambda_j\mathrm{Cov}(X(t_k),X(t_j))\Big\}\\&=\exp\Big\{\mathrm{i}\lambda^T\mu-\frac{1}{2}\lambda^T\mathbf{D}\lambda\Big\}\end{aligned}$$

其中$\mu=\{\mathbb{E}(X(t_1),\cdots,\mathbb{E}(X(t_n)))\}$,

$$\mathbf{D}=\big(\mathrm{Cov}(X(t_i),X(t_j))\big)_{i,j}$$

为正定或半正定矩阵. □

例19.1 设W为标准布朗运动, 对任意$x,y\in\mathbb{R}$, 给定$0\le s<t$, 对任意$u\in[s,t]$,

令
$$W_x^y(u)=W(u)+\Big(\frac{t-u}{t-s}(x-W(s))+\frac{u-s}{t-s}(y-W(t))\Big).$$
一般称$\{W_x^y(u);\ s\le u\le t\}$为布朗桥. 任取$s\le u_1<\cdots<u_n\le t$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\lambda_kW_x^y(t_k))&=\sum_{k=1}^n\lambda_k\Big[W(u_k)+\Big(\frac{t-u}{t-s}(x-W(s))+\frac{u-s}{t-s}(y-W(t))\Big)\Big]\\&=\sum_{k=1}^n\lambda_kW(u_k)-\Big(\sum_{k=1}^n\frac{\lambda_k(t-u_k)}{t-s}\Big)W(s)-\Big(\sum_{k=1}^n\frac{\lambda_k(u_k-s)}{t-s}\Big)W(t)+C.\end{aligned}$$
其中常数$C=\sum_{k=1}^n\frac{\lambda_k(u_k-s)}{t-s}(y-x)$. 由于标准布朗运动是高斯过程, 定理19.1表明布朗桥也是高斯过程. 注意到$W_x^y(s)\equiv x, W_x^y(t)\equiv y$,
$$\mathbb{E}(W_x^y(u))=x+\frac{u-s}{t-s}(y-x),$$
而且直接计算可知对任意$u\le v\in[s,t]$,
$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(W_x^y(u),W_x^y(v))\\&\quad=\mathrm{Cov}\Big(W(u)-\frac{t-u}{t-s}W(s)-\frac{u-s}{t-s}W(t),W(v)-\frac{t-v}{t-s}W(s)-\frac{v-s}{t-s}W(t)\Big)\\&\quad=\mathrm{Cov}\Big(W(u),W(v)-\frac{t-v}{t-s}W(s)-\frac{v-s}{t-s}W(t)\Big)=\frac{(t-v)(u-s)}{t-s}.\end{aligned}$$
高斯过程有限维分布由其均值函数和协方差函数唯一确定, 对照推论17.4,可知
$$\{W_x^y(u);\ u\in[s,t]\}$$
与给定条件$B(s)=x,B(t)=y$的布朗运动$\{B(u),s\le u\le t\}$有相同的有限维分布,从而可看作是它的一个版本. 注意在$\{W_x^y(u)\}$的构造中,我们并没有对标准布朗运动W设定额外的条件. □

推论19.2 若$\{X(t);\ t\in T\}$是高斯过程, 那么对任意$s_k<t_k,k=1,2,\cdots,n$,
$$\{X(t_k)-X(s_k),k=1,2,\cdots,n\}$$
是n维正态随机变量.

证明 对任意$\lambda_k\in\mathbb{R},k=1,2,\cdots,n$, 由定理19.1
$$\sum_{k=1}^n\lambda_k(X(t_k)-X(s_k))=\sum_{k=1}^n\lambda_kX(t_k)+\sum_{k=1}^n(-\lambda_k)X(s_k)$$
为一维正态随机变量, 进而再用一次定理19.1可知推论成立. □

命题19.3 轨道连续的高斯过程$\{X(t),t\ge0\}$若对任意$0\le s\le t$都有
$$\mathbb{E}(X(s))=0\ 且\ \mathbb{E}(X(s)X(t))=s,$$
那么$X=\{X(t);\ t\ge0\}$是标准布朗运动.

证明 只需验证布朗运动的三个条件(a),(b),(c).

(a) X轨道连续且由条件$\mathbb{E}(X(0)^2)=0$可知$X(0)=0$ a.s.

(b) 对任意$0\le s_1<t_1\le s_2<t_2$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(X(t_2)-X(s_2))(X(t_1)-X(s_1))]\\&\quad=\mathbb{E}[X(t_2)X(t_1)]-\mathbb{E}[X(t_2)X(s_1)]-\mathbb{E}[X(s_2)X(t_1)]+\mathbb{E}[X(s_2)X(s_1)]=0.\end{aligned}$$

由于$(X(t_2)-X(s_2),X(t_1)-X(s_1))$为二维正态随机变量, 从而独立. 因此对任意$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$

$$X(t_1),X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

的协方差矩阵为对角阵. 这表明$(X(t_1),X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1}))$独立.

(c) 对任意$0\le s<t$, 由$\mathbb{E}(X(t)-X(s))=0$,

$$\mathbb{E}[(X(t)-X(s))^2]=\mathbb{E}[X^2(t)+X^2(s)-2X(s)X(t)]=t-s$$

以及$X(t)-X(s)$服从正态分布可知$X(t)-X(s)\sim N(0,t-s)$. □

命题19.4 设ξ_n, $n\ge1$, 是一列正态随机变量. 若$\xi_n\xrightarrow{P}X$, 那么X也是正态随机变量, 而且

$$\mathbb{E}(X)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\xi_n),\quad \mathrm{Var}(X)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(X_n).$$

证明 由于ξ_n, $n\ge1$, 是一列正态随机变量, 存在μ_n, σ_n^2使得对任意$\lambda\in R$

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_n})=\exp\{\mathrm{i}\lambda\mu_n-\frac{\lambda^2}{2}\sigma_n^2\}.$$

由$\xi_n\xrightarrow{P}X$可知$\mathbb{P}(|X|<\infty)=1$而且$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_n})\to\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}):=\Phi(\lambda)$. 因此

$$|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi_n})|=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}\sigma_n^2}\to|\Phi(\lambda)|,\qquad \mathrm{i}\lambda\mu_n-\frac{\lambda^2}{2}\sigma_n^2\to\ln\Phi(\lambda).$$

注意到$\Phi(0)=1$且由$\Phi(\lambda)$连续可知存在$\delta>0$使得对任意$\lambda\in(-\delta,\delta)$, $|\Phi(\lambda)|>0$. 这表明$n\to\infty$ 时, σ_n^2 极限存在且有限, 记作σ^2. 注意到

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\xi_n-\mu_n)})=\exp\{-\frac{\lambda^2}{2}\sigma_n^2\}\to\exp\{-\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\}.$$

因此$\xi_n-\mu_n\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2)$. 记$\liminf\limits_{n\to\infty}\mu_n=a$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n=b$, 那么由$\xi_n\xrightarrow{P}X$可知

$$X-a\overset{d}{=}N(0,\sigma^2)\qquad X-b\overset{d}{=}N(0,\sigma^2)$$

因此$a=b<\infty$. μ_n极限也存在, 记作μ. 从而$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 为正态随机变量. □

由命题19.4容易得到以下推论, 证明请读者自己完成.

推论19.5设$\{X(t);\ t\in T\}$是高斯过程, $t_l^k\in T$, $(k=1,2,\cdots,m,l=1,2,\cdots)$. 若对任何固定的$k$, $X(t_l^k)$ 依概率收敛于$Y(k)$ 那么$\{X(t);\ t\in T\}\bigcup\{Y_k;\ k=$

$1,2,\cdots,m\}$仍是高斯系, 而且$\mathrm{Cov}(Y_k,Y_n)=\lim_{l\to\infty}\mathrm{Cov}(X(t_l^k),X(t_l^n))$.

(B)与布朗运动有关的简单积分

在本章的最后, 我们介绍两类特殊情形下与布朗运动有关的积分.

设B是布朗运动,由于$B(t)$关于t连续, 以$B(t)$为被积函数, 黎曼积分$\int_0^t B(u)\mathrm{d}u$总有意义. 一般地称随机过程$\{\int_0^t B(u)\mathrm{d}u; t\geq 0\}$ 为积分布朗运动.

更一般地设$f(t)$是具有连续一阶导数的非随机函数, 对任意$0\leq a\leq b$, 黎曼积分

$$\int_a^b B(u)\mathrm{d}f(u)=\int_a^b B(u)f'(u)\mathrm{d}u=\lim_{\delta\to 0}\sum_{\substack{i=1\\ \delta=\max\{t_i-t_{i-1}\}}}^{n} B(t_i)f'(t_i)(t_i-t_{i-1}),$$

总有意义, 其中$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$为$[a,b]$的任一分割. 注意上式右边极限中每个部分和都是正态随机变量, 因此由命题19.4可知$\int_a^b B(u)\mathrm{d}f(u)$ 服从正态分布. 进一步由推论19.5还可得随机过程

$$\Big\{\int_a^t B(u)\mathrm{d}f(u);\ t\geq a\Big\}$$

是高斯过程. 直接计算可知对任意$s,t\geq a$,

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^t B(u)\mathrm{d}f(u)\Big)=\int_0^t \mathbb{E}(B(u))\mathrm{d}f(u)=0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\Big(\int_a^t B(u)\mathrm{d}f(u),\int_a^s B(v)\mathrm{d}f(v)\Big)&=\int_a^t\int_a^s \mathbb{E}(B(u)B(v))\mathrm{d}f(u)\mathrm{d}f(v)\\&=\int_a^s\int_a^t (s\wedge t)\mathrm{d}f(s)\mathrm{d}f(u).\end{aligned}$$

由上述分析可知, 当B是标准布朗运动时, 积分布朗运动$\int_0^t B(u)\mathrm{d}u$是均值为0、协方差(函数)为

$$\begin{aligned}R(s,t)&=\int_0^s\int_0^t (u\wedge v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^s\int_0^s (u\wedge v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_0^s\int_s^t (u\wedge v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{s^3}{3}+\frac{(t-s)s^2}{2}=s^2(\frac{t}{2}-\frac{s}{6}),\quad s\leq t,\end{aligned}$$

的高斯过程, 而且$\int_0^t B(u)\mathrm{d}u\sim N(0,t^3/3)$.

对布朗运动还可以讨论另外一种形式积分. 这里我们简单介绍$f(t)$是具有连续一阶导数的非随机函数情形(对于更一般的情形我们将在后文讨论) , 对任意$0\leq a\leq b$, 定义区间$[a,b]$上随机积分

$$\int_a^b f(s)\mathrm{d}B(s)=\lim_{\delta\to 0}\sum_{\substack{i=1\\ \delta=\max\{t_i-t_{i-1}\}}}^{n} f(t_{i-1})[B(t_i)-B(t_{i-1})]. \qquad (5.3.1)$$

其中$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$为$[a,b]$的任一分割. 注意到

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})[B(t_i)-B(t_{i-1})] = f(b)B(b)-f(a)B(a)-\sum_{i=1}^{n} B(t_i)(f(t_i)-f(t_{i-1}))$$

因此

$$\int_a^b f(s)\mathrm{d}B(s) = f(b)B(b)-f(a)B(a)-\int_a^b B(s)\mathrm{d}f(s),$$

通常我们称该式为随机积分的分部积分公式. 由(5.3.1)可知, 当$f(t)$为非随机函数时, 极限中的部分和仍为正态随机变量, 因此$\int_a^b f(s)\mathrm{d}B(s)$也是正态随机变量. 进一步由推论19.5还可知随机过程

$$\Big\{\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u);\ t\geq a\Big\}$$

也是高斯过程. 当B是标准布朗运动时, 对任意$a\leq s\leq t$以及$[0,t]$中的分割$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=s<\cdots<t_n=t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u)\Big) &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(\mathbb{E}[B(t_i)]-\mathbb{E}[B(t_{i-1})]) \\ &= \int_a^t f(u)\mathrm{d}\mathbb{E}(B(u))=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}\Big(\int_a^t f(u)\mathrm{d}B(u),\int_a^s f(u)\mathrm{d}B(u)\Big)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})[B(t_i)-B(t_{i-1})]\sum_{i=1}^{m} f(t_{i-1})[B(t_i)-B(t_{i-1})]\Big)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{m} f^2(t_{i-1})[B(t_i)-B(t_{i-1})]^2\Big),\quad \text{由布朗运动独立增量性}\\ &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{m} f^2(t_{i-1})(t_i-t_{i-1}) = \int_a^s f^2(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

例19.2 设B是标准布朗运动，试求出$\int_0^1 u\mathrm{d}B(u)$在$B(1)=1$条件下的分布.

解 由于$B(1)=1$条件下布朗运动仍是高斯过程, 由(5.3.1)可知, 此时$\int_0^1 u\mathrm{d}B(u)$仍是正态随机变量. 由推论17.4以及习题17.2, 仿上面的计算过程可知

$$\mathbb{E}(\int_0^1 u\mathrm{d}B(u)|B(1)=1) = \int_0^1 u\mathrm{d}\mathbb{E}(B(u)|B(1)=1) = \int_0^1 u\mathrm{d}u = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^1 u\mathrm{d}B(u)\Big)^2\Big|B(1)=1\Big] &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{m} t_{i-1}^2\mathbb{E}\Big([B(t_i)-B(t_{i-1})]^2\Big|B(1)=1\Big)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{m} t_{i-1}^2(t_i-t_{i-1}) = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t = 1/3.\end{aligned}$$

即$(\int_0^1 u\mathrm{d}B(u)|B(1)=1)\sim N(1/2,1/3)$. □

要注意的是在随机积分表达式$\int f(t)\mathrm{d}B(t)$中，虽然我们借用了微分符号$\mathrm{d}B(t)$, 但它并不是$B(t)$的真实微分, 因为由定理17.7可知布朗运动B是处处不可微的. 通常我们称$\mathrm{d}B(t)$ 为白噪声(或将$\mathrm{d}B(t)$记作$\dot{B}(t)\mathrm{d}t$, 而称$\dot{B}(t)$为白噪声).

练习题

19.1 设$B=\{B(t),t\geq 0\}$为标准布朗运动, 试确定$Y=\int_0^1 B(s)ds$的分布.若$B(1)=x$, 试在此条件下再确定Y的分布.

19.2 设B是标准布朗运动，试求出$\int_0^1 u\mathrm{d}B(u)$在$B(1)=x$条件下的分布.

19.3* 证明推论19.5.

第六章　鞅论初步

鞅(Martingale)这个概念来自赌博策略研究, 其构词法来自法文中的首字母缩写. 鞅自Lévy和Doob 等人将其引入概率论后, 目前已成为研究随机问题的一个强有力工具.

6.1　σ-代数与条件数学期望*

在本书第一章我们已经介绍了有限个随机变量下条件数学期望的定义. 为了方便介绍鞅, 也为了后文的需要, 这一节我们汇集了一些关于σ-代数, 可测函数, 随机变量积分的相关知识, 并给出σ-代数下条件数学期望的定义. 很多结论我们叙而不证. 对此熟悉的读者可以跳过该节; 若想更进一步了解本节相关知识可参阅 [10]. 以下总设Ω为基本结果空间.

(A) σ-代数与可测函数

对于给定的基本结果空间Ω, 由随机事件构成的σ- 代数满足

(1) $\Omega \in \mathfrak{F}$;　(2) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{F}$;　(3) $A_k \in \mathfrak{F}, k = 1, 2, \cdots \Rightarrow \bigcup\limits_{k\geq 1} A_k \in \mathfrak{F}$.

很多时候基本结果空间Ω上的σ- 代数是不唯一的或者根据情况变化需要重新构造.

定义20.1 设$\mathcal{G}$,$\mathcal{F}$分别为Ω上两σ-代数. 若对任意$A \in \mathcal{G}$都有$A \in \mathcal{F}$,则称$\mathcal{G}$为$\mathcal{F}$的子σ-代数, 记作$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

例20.1设$\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$,$\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{G}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$, 则$\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{F}$均为σ-代数, 且$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$.

任取Ω的一个子集类$\mathcal{C}$, 即由Ω的若干子集构成的集合. 令

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}\ \text{为}\ \Omega\text{的}\sigma-\text{代数且}\ \mathcal{C} \subset \mathcal{G}\}$$

以及

$$\mathcal{G}_0 = \bigcap_{\mathcal{G}\in\mathcal{A}} \mathcal{G} = \{A \subset \Omega, 对任意\ \mathcal{G} \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{G}\}. \tag{6.1.1}$$

那么

(1) $\emptyset \in \mathcal{G}_0$, $\Omega \in \mathcal{G}_0$;

(2) 若$A \in \mathcal{G}_0$, 那么对任意$\mathcal{G} \in \mathcal{A}$,$A \in \mathcal{G}$, 从而$A^c \in \mathcal{G}$, 由此可知$A^c \in \mathcal{G}_0$;

(3) 若$A_i \in \mathcal{G}_0$, $i = 1, 2, \cdots$, 那么对任意$\mathcal{G} \in \mathcal{A}$, $A_i \in \mathcal{G}$, 从而$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$. 由此可知$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}_0$.

这表示$\mathcal{G}_0$也是一个σ-代数. 容易看出$\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_0$而且由$\mathcal{G}_0$构造可知,对任意包含$C$的$\sigma$- 代数$\mathcal{G}$都有$\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$.

定义20.2 对Ω的任意一个子集类$\mathcal{C}$, 称由(6.1.1)得到的σ-代数为由$\mathcal{C}$生成的代数或包含$\mathcal{C}$的最小σ-代数,记作$\sigma(\mathcal{C})$.

显然最小σ-代数$\sigma(\mathcal{C})$是唯一的.

例20.2 设$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{C}_1 = \{\{1\}, \{2\}\}$. 则

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{C}) = \Big\{&\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}\{1, 3, 4\},\\ &\{2, 4\}, \{1, 3\}, \{1\}, \{3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}\Big\},\end{aligned}$$

$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \Big\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\Big\}.$$

例20.3 设$\Omega = R^n$,

$$\mathcal{C} = \{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n), -\infty \le a_i < b_i \le +\infty, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

称$\mathcal{C}$生成的σ-代数$\sigma(\mathcal{C})$为Borel代数, 记作$\mathcal{B}(R^n)$.

我们可以利用如下的π系-λ系法则判断一个集合类是否包含给定子集类$\mathcal{C}$所生成的代数. 定理证明省略.

定理20.1 假设$\mathcal{C}$和$\mathcal{M}$是Ω的两个子集类. $\mathcal{C}$是所谓的π系, 即对任意$A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$(对交封闭). 而子集类$\mathcal{M}$是所谓的λ系, 即满足条件: (1) $\Omega \in \mathcal{M}$; (2) 若$A, B \in \mathcal{M}$且$A \subset B$, 则$B \setminus A \in \mathcal{M}$(对真差封闭); (3) 若对任意$n \ge 1$, $A_n \in \mathcal{M}$且$A_n \in A_{n+1}$, 则$\cup_{n\ge1} A_n \in \mathcal{M}$(对不降序列的并封闭). 若$\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, 那么$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.

定义20.3 设f为Ω到实数集R的一个映射, 若$\mathcal{F}$为Ω上一个σ-代数且对R上任意开区间O,

$$f^{-1}(O) = \{\omega \in \Omega, f(\omega) \in O\} \in \mathcal{F},$$

则称f为Ω上$\mathcal{F}$可测函数,简称为($\mathcal{F}$-)可测(函数), 记作$f \in \mathcal{F}$. 若f还是有界的, 称f是有界可测函数, 记作$f \in b\mathcal{F}$.

显然对任意$A \in \mathcal{F}$, A的示性随机变量$\mathbf{1}_A$是可测的. 若f是R上的连续函数, 那么f是$(R, \mathcal{B}(R))$上可测函数.

我们可以用如下的所谓$\mathcal{L}$系方法证明一个函数集合中包含了所有关于某个σ代数可测的所有有界函数. 证明同样省略.

定理20.2 假设L是一个函数构成的集合, 满足条件: (1)常值函数$1 \in L$; (2) 若L中任意有限个函数的线性组合(如果有意义)属于L; (3) 对任意$f_n \in L$, $n \geq 1$, 若$0 \leq f_n \leq f_{n+1}$且$f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 为有界函数, 那么$f \in L$. 若$\mathcal{C}$是一个π系集类, 且$\mathcal{C}$中所有集合的示性函数都属于L, 那么L包含了所有$\sigma(\mathcal{C})$可测的有界函数.

若$(\Omega, \mathcal{F})$上还定义有概率$\mathbb{P}$, 即$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间，则称f为(该概率空间上的)随机变量, 常记作$X, Y, \cdots$.

利用随机变量, 我们也可以生成σ代数.

定义20.4 设$X_t, t \in I$为$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上一簇随机变量, 对任意$(a,b) \subset R$以及$t \in I$, 令

$$X_t^{-1}(a,b) = \{\omega, X_t(\omega) \in (a,b)\},$$

$\mathcal{C}$是所有形如$X_t^{-1}(a,b)$的集合构成的集合类. 称包含$\mathcal{C}$的最小σ-代数为由$X_t, t \in I$, 生成的σ-代数,记作$\sigma(X_t; t \in I)$.

显然$\sigma(X_t; t \in I) \subset \mathcal{F}$; 对任意$t \in I$, X_t关于$\sigma(X_t; t \in I)$可测且$\sigma(X_t; t \in I)$是使所有$X_t, t \in I$可测的最小σ-代数.

定义20.5 称概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上两个子$\sigma$代数$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$是独立的, 若对任意随机事件$A \in \mathcal{G}_1$, $B \in \mathcal{G}_2$都是独立的, 即$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. 称一簇随机变量$(X_t, t \in T)$ 与子σ代数$\mathcal{G}$是独立的, 如果$\sigma(X_t, t \in T)$与$\mathcal{G}$独立. 称两簇随机变量$(X_t, t \in T)$与$(Y_s, s \in S)$独立, 如果$\sigma(X_t, t \in T)$与$\sigma(Y_s, s \in S)$独立.

由定义易知, 若$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$独立, 那么任意两个分别关于$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$可测的随机变量$X, Y$一定独立; 若$X$ 与$Y_1, \cdots, Y_n$独立当且仅当X与$\sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$独立.

(B) 随机变量的性质

随机变量有如下的性质与结论, 证明省略.

性质20.3 设X, Y为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上两随机变量，那么

$$aX + bY,\ \ X \vee Y = \max\{X, Y\},\ \ X \wedge Y = \min\{X, Y\},\ \ XY,\ \ |X|$$

都是随机变量，其中a, b 为两常数; 若X/Y 有意义, 那么X/Y 也是随机变量;

若X_n为随机变量列且$X_n \to Z$ a.s. 则Z仍是随机变量.

性质20.4 若f为$(R^n, \mathcal{B}(R^n))$上可测函数.那么$f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$仍是$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机变量, 如果$X_1, \cdots, X_n$为$n$个$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机变量.

定理20.5 称随机变量X可积, 若$\mathbb{E}(X) < \infty$, 也即$\mathbb{E}(|X|) < \infty$. 若X可积, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任意$A \in \mathcal{F}$, 当$\mathbb{P}(A) < \delta$时, $\mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_A) < \varepsilon$.(绝对连续性).

定理20.6 设X_n为$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机变量.

(1) 若对任意$n \geq 0$, $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$, 那么$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n)$.(单调收敛定理)

(2) 若X_n依概率收敛到X, 存在Y使得$\mathbb{E}(Y) < \infty$而且对任意$n \geq 0$, $|X_n| \leq Y$, 那么$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.(控制收敛定理)

(3) 若对任意$n \geq 0$, $X_n \geq 0$, 那么$\mathbb{E}(\liminf\limits_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.(Fatou 引理)

定义20.6 对任意$p > 0$, 称$[\mathbb{E}(|X|^p)]^{1/p}$为随机变量$X$的$p$-范数, 记作$\|X\|_p$. 称所有$p$-范数有限的随机变量构成的集合$\{X : \|X\|_p < \infty\}$为$L_p$空间, 记作$L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 或简记为$L_p(\Omega)$. 称随机变量序列$\{X_n, n \geq 0\}$ 在L^p 意义下收敛到随机变量X, 若$\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$, 记作$X_n \xrightarrow{L_p} X$.

对随机变量而言, 容易看出若$0 < p < q$且$\|X\|_q < \infty$, 那么$\|X\|_p < \infty$.

引理20.7 (Hölder 不等式) 若随机变量ζ, η满足$\mathbb{E}(|\zeta|^p) < \infty, \mathbb{E}(|\eta|^q) < \infty$, 其中$1/p + 1/q = 1$. 那么$E|\zeta\eta| < \infty$且

$$\mathbb{E}(|\zeta\eta|) \leq [\mathbb{E}(|\zeta|^p)]^{1/p}[\mathbb{E}(|\eta^q|)]^{1/q} = \|\zeta\|_p\|\eta\|_q. \tag{6.1.2}$$

证明 由$\ln x$为凹函数可知, 对任意$x, y \in (0, \infty)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y.$$

从而对任意$x, y \in (0, \infty)$,

$$x^{1/p}y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

显然上式对$x, y \in [0, \infty)$也成立. 令$x = |\zeta|^p/\mathbb{E}(|\zeta|^p)$, $y = |\eta|^q/\mathbb{E}(|\eta|^q)$, 那么

$$\frac{|\zeta\eta|}{\mathbb{E}(|\zeta|^p)^{1/p}(\mathbb{E}(|\eta|^q))^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|\zeta|^p}{\mathbb{E}(|\zeta|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|\eta|^q}{\mathbb{E}(|\eta|^q)}.$$

两边求期望得

$$\mathbb{E}\Big(\frac{|\zeta\eta|}{(\mathbb{E}(|\zeta|^p))^{1/p}(\mathbb{E}(|\eta|^q))^{1/q}}\Big) \leq \frac{1}{p}\mathbb{E}\Big(\frac{|\zeta|^p}{\mathbb{E}(|\zeta|^p)}\Big) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\Big(\frac{|\eta|^q}{\mathbb{E}(|\eta|^q)}\Big) = 1.$$

移项得所需结论. □

利用Hölder不等式我们还可以得到如下的Minkowski不等式.

引理20.8 (Minkowski 不等式) 若随机变量ζ,η满足$\mathbb{E}(|\zeta|^p)<\infty,\mathbb{E}(|\eta|^p)<\infty$, 其中$p\geq 1$. 那么$\|\zeta+\eta\|_p\leq\|\zeta\|_p+\|\eta\|_p$.

证明 注意到

$$\mathbb{E}(|\zeta+\eta|^p)\leq\mathbb{E}(|\zeta+\eta|^{p-1}|\zeta|)+\mathbb{E}(|\zeta+\eta|^{p-1}|\eta|).$$

对右边两项分别用Hölder不等式并整理后可得Minkowski不等式. □

定理20.9 对任意给定的$p>0$, 若随机变量序列$\{X_n,n\geq 0\}$ 在L_p意义下为柯西基本列, 即对任意$\varepsilon>0$, 存在N, 当$n,m\geq N$ 时

$$\|X_n-X_m\|_p\leq\varepsilon,$$

那么一定存在一个随机变量X使得$X_n\xrightarrow{L_p}X$.

证明 由L_p意义下为柯西基本列定义, 对任意$\varepsilon_k=4^{-k}$, 存在n_k(随k单调增加)使得$n,m\geq n_k$时

$$\mathbb{E}(\|X_n-X_m\|^p)\leq 4^{-kp}.$$

由切比雪夫不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_{n_{k+1}}-X_{n_k}|>\frac{1}{2^k})\leq\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp}4^{-kp}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-kp}<\infty.$$

由推论3.10可知子列$\{X_{n_k}\}$为几乎必然收敛意义下的柯西基本列, 因此存在随机变量X使得$X_{n_k}\to X$, a.s. 此时, 对任意$n\geq 1$, 存在$k>0$使得$n_k>n$. 由

$$|X_n-X|^p\leq 2^p(|X_n-X_{n_k}|^p+|X_{n_k}-X|^p)$$

以及由Fatou引理

$$\mathbb{E}(|X_{n_k}-X|^p)=\mathbb{E}(\lim_{m\to\infty}|X_{n_k}-X_{n_m}|^p)\leq\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}(|X_{n_k}-X_{n_m}|^p)\leq 4^{-kp}$$

易知$\mathbb{E}(|X_n-X|^p)\to 0$, 从而$X_n\xrightarrow{L^p}X$. □

定义20.7 称随机变量簇$\{X_t,t\in T\}$一致可积, 若$\lim\limits_{M\to\infty}\sup\limits_{t\in T}\mathbb{E}(|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|>M\}})=0$.

显然, 若$\{X_t,t\in T\}$一致可积, 则$\{\mathbb{E}(|X_t|),t\in T\}$一致有界; 若存在$p>1$使得$\{\mathbb{E}(|X_t|^p),t\in T\}$一致有界, 那么$\{X_t,t\in T\}$一致可积. 进一步, 我们有如下的等价条件; 证明省略.

定理20.10 若X_n依概率收敛到X, 那么$\{X_n,n\geq 0\}$一致可积$\Leftrightarrow\mathbb{E}|X_n|\to\mathbb{E}|X|<\infty\Leftrightarrow\mathbb{E}(X)<\infty$ 以及$X_n\xrightarrow{L^1}X$.

关于随机变量序列收敛的概念也可以推广到一般随机变量簇的情形. 这些推广是自然的, 我们只写出几乎处处收敛，依概率收敛和L^p意义下收敛. 其它类似, 请读者自己完成.

定义20.8 设$\{X_t, t\in T\}$为一簇随机变量.

(1)称X_t在$t\to t_0$时几乎必然收敛到X, 若$\mathbb{P}(\lim\limits_{t\to t_0} X_n = X) = 1$.

(2)称X_t在$t\to t_0$时依概率收敛到X, 若对任意$\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbb{P}(|X_t - X| > \varepsilon) = 0$.

(3) 称X_t在$t\to t_0$时L^p意义下收敛到X, 若$\lim\limits_{t\to t_0}\|X_t - X\|_p = 0$.

(C) σ-代数下的条件数学期望

定义20.9 设X为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上随机变量, $\mathbb{E}(|X|)<\infty$. $\mathcal{G}$也为Ω的σ-代数且$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, 若存在$\mathcal{G}$上随机变量$Y$, 使得对任意$\mathcal{G}$上有界随机变量$W$都有

$$\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(YW),$$

则称Y是X在子σ-代数$\mathcal{G}$下的条件数学期望, 记作$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

σ代数下条件数学期望在几乎必然相等意义下是唯一的.

性质20.11 设W_1, W_2是随机变量X在σ-代数$\mathcal{G}$下的两个条件数学期望, 那么

$$\mathbb{P}(W_1 = W_2) = 1.$$

证明 令$A = \{W_1\neq W_2\}$, 则$A = (\cup_{k=1}^{\infty}B_k)\cup(\cup_{k=1}^{\infty}C_k)$ 其中

$$B_k = \{W_1 - W_2 \geq \frac{1}{k}\}\in\mathcal{G}, C_k = \{W_1 - W_2 \geq \frac{1}{k}\}\in\mathcal{G}.$$

对任意$k\geq 1$, 由

$$0\leq\frac{1}{k}\mathbb{P}(B_k)\leq\mathbb{E}((W_1 - W_2)\chi_{B_k}) = \mathbb{E}(X\chi_{B_k}) - \mathbb{E}(X\chi_{B_k}) = 0.$$

可知$\mathbb{P}(B_k) = 0$. 类似$\mathbb{P}(C_k) = 0$. 因此$\mathbb{P}(A) = 0$, 即$\mathbb{P}(W_1 = W_2) = 1$. □

性质20.12 条件数学期望具有如下性质

(1) 若$X = a$, 则$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = a$;

(2) 若$\mathbb{E}(X),\mathbb{E}(Y)$存在,则$\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$;

(3) 若X与$\mathcal{G}$独立, 那么$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$;

(4) 若$Z\in\mathcal{G}$有界, 则$\mathbb{E}(XZ|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$;

(5) 若$\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$,则$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$; (条件数学期望平滑性)

(6) 若$X\leq Y$ a.s. 且$\mathbb{E}(X),\mathbb{E}(Y)$存在，则$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\leq\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$;

(7) $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\leq\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$;

(8) 若$\mathcal{G} = \{\emptyset,\Omega\}$, 那么$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$;

(9) 若$\mathcal{G} = \sigma(Y)$其中(X,Y)为离散或连续型随机变量，那么$\mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|Y)$.

注20.1对n个随机变量$Y_1,\cdots,Y_n$, 简记$\mathbb{E}(X|\sigma(Y_1,\cdots,Y_n))$为$\mathbb{E}(X|Y_1,\cdots,Y_n)$.

最后我们强调, 定理20.6中各结论对条件数学期望也成立, 我们有如下极限定理(证明省略).

定理20.13 设X_n为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的随机变量, $\mathcal{G}$是一个子σ-代数, 那么.

(1) 若对任意$n\ge 0$, $0\le X_n\le X_{n+1}$, 那么$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\overset{a.s.}{\to}\mathbb{E}(\lim\limits_{n\to\infty}X_n|\mathcal{G})$.

(2) 若X_n依概率收敛到X, 存在Y使得$\mathbb{E}(Y)<\infty$而且对任意$n\ge 0$, $|X_n|\le Y$, 那么$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})\overset{a.s.}{\to}\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

(3) 若对任意$n\ge 0$, $X_n\ge 0$, 那么$\mathbb{E}(\liminf\limits_{n\to\infty}X_n|\mathcal{G})\le\liminf\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$, a.s.

练习题

20.1 设$\{X_t,t\ge 0\}$为独立增量过程. 对任意$s\ge 0$, 令$\mathcal{G}_s=\sigma\{X_t 0\le t\le s\}$. 用$\pi$系-$\lambda$系方法, 证明对任意$u>v\ge s$, X_u-X_v与$\mathcal{G}_s$独立.

20.2 以$\Omega=\{\omega_1=(\text{正},\text{正}),\omega_2=(\text{正},\text{反}),\omega_3(\text{反},\ \text{正}),\omega_4(\text{反},\text{反})\}$表示抛硬币两次得到的基本结果空间，$X$表示两次抛硬币得到的正面次数，$Y$ 表示第二次抛硬币得到正面的次数，求$\sigma(X),\sigma(Y)$ 以及$\mathbb{E}(X|Y)$.

20.3 验证性质20.13中(1),(3)-(6),(8).

6.2 停时与鞅

如无特别声明, 本章下面各节均给定概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. T为指标集, 未明确时表示$\mathbb{R}_+, Z_+$或他们的一个子集. $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ 为单调非降的$\mathcal{F}$子σ-代数流, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\mathcal{F}_t, t \in T\} \triangleq \vee_{t \in T} \mathcal{F}_t$.

(A) 停时的定义与性质

定义21.1 称一个取值于$T \cup \{+\infty\}$上的随机变量τ为一个(相对于$\{\mathcal{F}_t\}$的)停时, 如果对任意$t \in T$,

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

若对任意$t \in T$,

$$\{\omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

则称τ为(相对于$\{\mathcal{F}_t\}$的)宽停时.

直观理解τ为停时就是指任给一个现在时刻t, τ在t及t之前($\{\tau \leq t\}$)是否发生由现在拥有的信息($\mathcal{F}_t$)完全确定; 而宽停时则是指在t之前($\{\tau < t\}$)是否发生由现在拥有的信息($\mathcal{F}_t$)完全可确定.

显然一个取值于T的常值随机变量$\tau \equiv t$一定是停时. 因此，停时是对“时间”的一个推广。

例21.1 设$\xi = \{\xi_t, t \geq 0\}$是一个关于$\{\mathcal{F}_t\}$适应的随机过程, 轨道函数连续, G, O分别表示闭集和开集, 定义

$$\tau_G = \inf\{t \in T, \xi_t \in G\}, \quad \tau_O = \inf\{t \in T, \xi_t \in O\}.$$

由ξ的连续性，容易检验

$$\{\tau_G \leq t\} = \{\omega, \inf_{s \in Q \cup \{t\}, s \leq t} d(\xi_s(\omega), G) = 0\} \in \mathcal{F}_t,$$

$$\{\tau_O < t\} = \bigcup_{s \in Q, s < t} \{\xi_s \in O\} \in \mathcal{F}_t.$$

因此τ_G, τ_O分别是关于$\{\mathcal{F}_t\}$的停时与宽停时.

命题21.1 停时一定是宽定时. 进一步, 定义σ-代数流$\{\mathcal{F}_{t+}, t \in T\}$, 其中

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_{t+s},$$

那么τ是关于$\{\mathcal{F}_t\}$的宽停时当且仅当τ是关于$\{\mathcal{F}_{t+}\}$的停时.

证明 只需要证后一结论. 由

$$\{\tau \le t\} = \bigcap_{s>0}\{\tau < t+s\} \in \mathcal{F}_{t+}$$

可知若τ是关于代数流F的宽停时则τ是关于代数流F_+的停时.

反之, 由

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{s>0}\{\tau \le t-s\}$$

以及$\mathcal{F}_{(t-s)+} \subset \mathcal{F}_t$可知若$\tau$是关于代数流$F_+$的停时则$\tau$是关于代数流$F$的宽停时.

定理21.2 每个宽停时τ都存在一列只取有限多值的停时τ_n 使得, $\{\tau_n\}$单调下降且$\tau_n \to \tau$对所有$\omega \in \Omega$都成立.

证明 对每一个宽停时τ, 定义

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n}\mathbf{1}_{[\frac{k-1}{2^n} \le \tau < \frac{k}{2^n})} + (+\infty)\mathbf{1}_{\{\tau \ge n\}}.$$

显然τ_n单调下降且点点收敛于τ, 而且

$$\{\tau_n \le t\} = \bigcup_{k \le 2^n t, k \le n2^n} \left\{\frac{k-1}{2^n} \le \tau < \frac{k}{2^n}\right\} = \{\tau < \frac{[2^n t]}{2^n} \wedge n\} \in \mathcal{F}_t.$$

因此τ_n还是一列停时.

定义21.2 对每个停时τ, 令

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \text{对任意}t \in T, A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

容易验证集合类$\mathcal{F}_\tau$构成一个σ-代数. 称$\mathcal{F}_\tau$ 为停时τ以前的σ-代数.

命题21.3 设τ, κ是关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$的停时, 那么

(1) $\tau \wedge \kappa$, $\tau \vee \kappa$, $\tau + \kappa$都是停时.

(2) $\tau \in \mathcal{F}_\tau$

(3) 若$\tau \le \kappa$, 那么$\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\kappa$.

证明 (1) 由于

$$\{\tau \vee \kappa \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\kappa \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$
$$\{\tau \wedge \kappa \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\kappa \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$

可知, $\tau \vee \kappa$, $\tau \wedge \kappa$都是停时. 再注意到

$$\begin{aligned}\{\omega : \tau + \kappa \le t\} &\subset \bigcap_n \bigcup_{k \ge 1}\left\{\omega : \frac{k-1}{n} < \tau \le \frac{k}{n} \le t, \kappa \le t - \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right\} \\ &\subset \bigcap_n \left\{\omega : \tau + \kappa \le t + \frac{1}{n}\right\} = \{\omega : \tau + \kappa \le t\}\end{aligned}$$

以及上式中间的集合属于$\mathcal{F}_t$可知$\tau + \kappa$也是停时.

(2) 对任意$a\in\mathbb{R}$以及$s\in T$, 由

$$\{\tau\le a\}\bigcap\{\tau\le s\}=\{\tau\le a\wedge s\}\in\mathcal{F}_s$$

可知$\{\tau\le a\}\in\mathcal{F}_\tau$. 因此$\tau\in\mathcal{F}_\tau$.

(3)对任意$A\in\mathcal{F}_\tau$, 由$\tau\le\kappa$可知对任意$t\in T$,

$$A\cap\{\kappa\le t\}=A\cap\{\tau\le t\}\cap\{\kappa\le t\}\in\mathcal{F}_t.$$

因此$A\in\mathcal{F}_\kappa$. 从而$\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{F}_\kappa$.

命题21.4 设τ和κ是关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t,t\in T\}$的停时，X是一个可积随机变量, 那么

(1) $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)=\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\kappa\wedge\tau})$;

(2) $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\ge\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)=\mathbf{1}_{\{\tau\ge\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\kappa\wedge\tau})$;

(3) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_\tau)=\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa})$.

证明 先证对任意停时τ,

$$\mathcal{H}_\tau:=\{f\in\mathcal{F}_\infty:f\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\in\mathcal{F}_t\text{ 对任意 }t\in T\}=\{f\in\mathcal{F}_\tau\}.$$

因为对任意$A\in\mathcal{F}_\tau$, $\mathbf{1}_A\in\mathcal{H}_\tau$. 所以, 由单调类定理, $\mathcal{H}_\tau\supset\{f\in\mathcal{F}_\tau\}$. 反之, 若$f\in\mathcal{H}_\tau$, 则对任意$a\in\mathbb{R}$, $t\in T$

$$\{f\le a\}\cap\{\tau\le t\}=\{f\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}}\le a\}\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t.$$

所以$\{f\le a\}\in\mathcal{F}_\tau$, 从而$f\in\mathcal{F}_\tau$. 即$\mathcal{H}_\tau\subset\{f\in\mathcal{F}_\tau\}$.

(1) 对任意$t\in T$, 由

$$\{\tau>\kappa\}\cap\{\tau\wedge\kappa\le t\}=\{\tau>\kappa\}\cap\{\kappa\le t\}=\bigcup_{r\in Q\cup\{t\},r\le t}\{\tau>r\ge\kappa\}\in\mathcal{F}_t$$

可知$\{\tau>\kappa\}\in\mathcal{F}_\kappa$ 以及$\{\tau>\kappa\}\in\mathcal{F}_{\kappa\wedge\tau}$. 从而

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)\mathbf{1}_{\{\tau\wedge\kappa\le t\}}=\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\kappa)\mathbf{1}_{\{\kappa\le t\}}\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}\cap\{\kappa\le t\}}\in\mathcal{F}_t.$$

所以$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)\in\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa}$. 再由

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa})=\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa})$$

可知(1)成立.

(2)的证明类似, 请同学自己补充.

(3) 首先注意到$\{\tau\le\kappa\}=\{\kappa<\tau\}^c\in\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa}$. 因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_\tau)&=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_\tau)+\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{\tau\le\kappa\}}|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_\tau)\\&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa})|\mathcal{F}_\tau)+\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau\le\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_\tau)\\&=\mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa})+\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau\le\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\kappa)|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa})\end{aligned}$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa}) + \mathbf{1}_{\{\tau\le\kappa\}}\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\kappa}).$$

定义21.3 随机过程$\{\xi(t), t \ge 0\}$称为对σ-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$循序可测, 若对任意$t \ge 0$, $\{\xi(s,\omega); s \in [0,t], \omega \in \Omega\}$作为$(s,\omega)$的二元函数对$\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$可测.

命题21.5 若随机过程$\{\xi(t), t \ge 0\}$关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$适应，而且轨道函数右连续, 那么$\{\xi(t), t \ge 0\}$ 关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$循序可测.

证明 定义一列随机过程如下, 对任意$t \ge s \ge 0$

$$X^{(n)}(s) = \begin{cases} \xi(0), & s = 0 \\ \xi(kt/2^n), & s \in (\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}], k = 1, 2, \cdots, 2^n \end{cases}.$$

则$X^{(n)}$作为(s,ω)的二元函数对$\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$可测. 注意到由$\xi$的右连续性可知

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)} = \xi.$$

因此ξ循序可测.

命题21.6 若τ是相对于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$的有限停时且随机过程$\xi$对$\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$循序可测, 那么$\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau$.

证明 注意到对任意$(a,b] \subset [0,t]$, $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\{\omega : (t \wedge \tau(\omega), \omega) \in (a,b] \times A\} = \{\omega : t \wedge \tau(\omega) \in (a,b]\} \cap A \in \mathcal{F}_t.$$

由测度论典型方法容易证明对任意$B \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$,

$$\{\omega : (t \wedge \tau(\omega), \omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t.$$

再注意到ξ对$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$循序可测, 对任意$a \in \mathbb{R}$

$$\{(s,\omega); \xi_s(\omega) \le a, s \le t\} \in \mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t,$$

因此

$$\{\omega : \xi_{t\wedge\tau}(\omega) \le a\} = \{\omega : (t \wedge \tau(\omega), \omega) \in \{(s,\omega); \xi_s(\omega) \le a, s \le t\}\} \in \mathcal{F}_t.$$

于是

$$\{\omega : \xi_\tau(\omega) \le a\} \cap \{\tau \le t\} = \{\omega : \xi_{t\wedge\tau}(\omega) \le a\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

所以$\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau$.

(B) 鞅及上、下鞅的定义与简单性质

定义21.4 称随机过程$X = \{X(s), s \in T\}$关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_s, s \in T\}$是适应的, 如果对任意$s \in T$, $X(s) \in \mathcal{F}_s$, 即对任意$B \in \mathcal{B}(S)$,

$$\{\omega \in \Omega, X(s,\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_s.$$

定义21.5 若随机过程$\{\xi_t, t \in T\}$关于$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$适应, 称$\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$是上鞅(下鞅,

鞅), 如果$\mathbb{E}(|\xi_t|) < \infty$ 而对任意$s \le t$,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \le X_s(\ge X_s, = X_s).$$

若$\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$是上鞅(下鞅，鞅), 有时我们也称作随机过程$\{\xi_t\}$关于$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$为上鞅(下鞅，鞅), 特别若对任意$t \in T$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s, s \le t\}$为$\xi$所生成的自然$\sigma$流, 或无需强调$\sigma$-代数流时, 简称$\{\xi_t\}$为上鞅(下鞅，鞅).

显然$\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$是鞅当且仅当它既是上又是下鞅; $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$是上鞅当且仅当$\{-\xi_t, \mathcal{F}_t\}$ 为下鞅.

例21.1 设$X = \{X_n; n \ge 1\}$为独立同分布随机变量.

(1) 若$\mathbb{E}(X_n) = \mu$, 令$S_0 = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_i - n\mu$, 则$S = \{S_n, n \ge 0\}$关于$X$为鞅.

(2) 若存在$\lambda \in R$使得$\phi(\lambda) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X_n}) < \infty$, 令

$$Y_n = [\phi(\lambda)]^{-n} \exp\{\lambda \sum_{k=1}^{n} X_i\}, \quad n \ge 0, \ \ (\text{规定}Y_0 = 1)$$

则$\{Y_n; n \ge 0\}$ 为鞅. 特别, 若$\phi(\lambda_0) = 1$, 则$\big\{\exp\{\lambda_0 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\}; n \ge 0\big\}$为鞅.

(3) 设f_0, f_1为两概率密度函数, 令

$$L_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_n)}{f_0(X_n)}, \qquad n \ge 0, \ (\text{规定}L_0 = 1)$$

在假设检验中以X_n的分布密度函数为f_0为原假设, 此时$\{L_n, n \ge 0\}$为鞅.

例21.2 (1)设$N(t)$是强度为λ的泊松过程, 令$C_t = N(t) - \lambda t$, 那么$\{C_t, t \ge 0\}$是鞅.

(2)设$B(t)$是方差为σ^2的布朗运动, 令$M_t = \exp\big\{-\lambda B(t) - \frac{\lambda^2\sigma^2 t}{2}\big\}$, 那么$\{M_t, t \ge 0\}$也是鞅.

上面这两个例子的具体验证都很简单, 请读者自己完成.

命题21.7 设$\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$, $\{\zeta_t, \mathcal{F}_t\}$是上鞅(下鞅), 则

(1) $\mathbb{E}(\xi_t)$是非增(降)的

(2) 对任和非负实数α, β, $\{\alpha\xi_t + \beta\zeta_t, \mathcal{F}_t\}$是上鞅(下鞅)

(3) $\{\xi_t \wedge \zeta_t, \mathcal{F}_t\}$仍是上鞅($\{\xi_t \vee \zeta_t, \mathcal{F}_t\}$仍是下鞅).

命题证明简单, 此略.

引理21.8 (Jensen不等式) 随机变量X满足$\mathbb{E}(|X|) < \infty$且$\mathbb{E}(|\psi(X)|) < \infty$其中$\psi(x)$ 是R上凸函数. 那么

$$\psi(\mathbb{E}(X)) \le \mathbb{E}(\psi(X)),$$

进一步, 若$\mathcal{G}$为任一子σ-代数, 那么

$$\psi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \le \mathbb{E}(\psi(X)|\mathcal{G}).$$

证明 只证第二个不等式. 由于凸函数任意一点的左右导数都存在,且

$$\psi(y) - \psi(x) \ge \psi'_+(x)(y-x).$$

因此

$$\psi(X) - \psi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \ge \psi'_+(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

两边求$\mathcal{G}$下条件期望得

$$\mathbb{E}(\psi(X) - \psi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) \ge \psi'_+(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}) = 0.$$

因此$\mathbb{E}(\psi(X)|\mathcal{G}) \ge \psi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$.

利用条件期望的Jensen不等式容易证明

命题21.9 设$\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$为鞅(下鞅), ψ是$\mathbb{R}$ 上凸函数(非降凸函数), 若对任意t,

$$\mathbb{E}(|\psi(\xi(t))|) < \infty,$$

则$\{\psi(\xi_t), \mathcal{F}_t\}$为下鞅.

特别，若$\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$为鞅(下鞅), $r \ge 1$为常数且$|\xi_t|^r$可积, 那么$(|\xi_t|^r, \mathcal{F}_t)$为下鞅.

对于上鞅(下鞅)我们还可以将其表示成鞅与单调增过程的差(和), 为证明简单, 我们只叙述离散参数的情形.

定理21.10 (离散参数的上鞅分解) 任给一个上鞅$\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}$, $n \ge 0$, 必存在唯一的过程$\{X_n\}$, $\{I_n\}$使得

$$\xi_n = X_n - I_n,$$

其中$\{X_n, \mathcal{F}_n\}$是鞅. 对任意$n \ge 1$, $I_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, $I_0 = 0$且$\{I_n\}$是增过程, 即对任意n, $I_n \le I_{n+1}$.

证明 存在性. 令$I_0 = 0$, 对$n \ge 1$,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k - \mathbb{E}(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k)).$$

则$I_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. 由$\{\xi_t\}$为上鞅可知, A_n为增过程. 再令$X_0 = \xi_0$,

$$X_n = \xi_n + I_n, \quad n \ge 1.$$

容易检验$\{X_n\}$为鞅. 此时$\xi_n = X_n - I_n$.

唯一性. 设

$$\xi_n = X_n - I_n = X'_n - I'_n,$$

其中$\{X'_n, A'_n\}$是另一对满足条件的分解. 那么由$I_n - I'_n = X_n - X'_n$可知$\{I_n -$

$I_n'\}$为鞅且$I_n - I_n' \in \mathcal{F}_{n-1}$. 由此可得对任意$n \geq 1$

$$I_n - I_n' = \mathbb{E}(I_n - I_n' | \mathcal{F}_{n-1}) = I_{n-1} - I_{n-1}' = \cdots = I_0 - I_0' = 0.$$

进而$X_n = X_n'$, $n \geq 0$.

推论21.11 若$\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}$为下鞅, 则存在唯一满足定理21.10条件的鞅$\{X_n\}$和增过程$\{I_n\}$, 使得$\xi_n = X_n + I_n$.

命题21.12 令$T = \{1, 2, \cdots, N\}$. τ, κ是相对于$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$的两个停时, 且$\tau \leq \kappa$, 如果$\{\xi_t, t \in T\}$是鞅(上鞅或下鞅), 则

$$\mathbb{E}(\xi_\kappa | \mathcal{F}_\tau) = \xi_\tau (< \xi_\tau, > \xi_\tau).$$

证明 首先注意到$\xi_\tau \in \mathcal{F}_\tau$, $\xi_\kappa \in \mathcal{F}_\kappa$而且容易证明$|\xi_\tau|$, $|\xi_\kappa|$可积.

(1)当$\{\xi_t, t \in T\}$为鞅时, 任取$A \in \mathcal{F}_\tau$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_\kappa \mathbf{1}_A) &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\xi_k \mathbf{1}_{A \cap \{\kappa = k\}}) = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_N | \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{A \cap \{\kappa = k\}}) \\
&= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_N | \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{A \cap \{\kappa = k\} \cap \{\tau \leq k\}}) \\
&= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_N \mathbf{1}_{A \cap \{\tau \leq k\} \cap \{\kappa = k\}} | \mathcal{F}_k)) \\
&= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_N \mathbf{1}_{A \cap \{\kappa = k\}} | \mathcal{F}_k)) = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(\xi_N \mathbf{1}_{A \cap \{\kappa = k\}}) = \mathbb{E}(\xi_N \mathbf{1}_A).
\end{aligned}$$

类似(更简单)可证

$$\mathbb{E}(\xi_\tau \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\xi_N \mathbf{1}_A).$$

因此$\mathbb{E}(\xi_\kappa | \mathcal{F}_\tau) = \xi_\tau$.

(2) 当$\{\xi_t\}$为上鞅(下鞅)时, 由定理21.10(推论21.11)以及结论(1)可知结论成立. 事实上, 以上鞅为例, 此时由$\xi_t = X_t - I_t$可知

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_\kappa | \mathcal{F}_\tau) &= \mathbb{E}(X_\kappa - I_\kappa | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(X_\kappa | \mathcal{F}_\tau) - \mathbb{E}(I_\kappa | \mathcal{F}_\tau) \\
&= X_\tau - \mathbb{E}(I_\kappa | \mathcal{F}_\tau) \leq X_\tau - \mathbb{E}(I_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \xi_\tau.
\end{aligned}$$

由命题21.12, 我们立即可得如下推论(一般称之为有界停时定理), 证明省略.

推论21.13(有界停时定理) 设$\{X_n, n \geq 0\}$是(上, 下)鞅，若S, T为两有界停时且$S \leq T$ a.s. 那么

$$\mathbb{E}(X_T)(\leq, \geq) = \mathbb{E}(X_S).$$

练习题

21.1 设$Y=\{Y_n,n\geq 0\}$是状态空间S上时齐马氏链， 令$X_n=g(Y_n)=f_{Y_n,j_0}$, 其中f_{i,j_0}表示Y从i出发有限时间内到达(回到)某个给定状态j_0 的概率．验证X关于Y是上鞅.

21.2 设$X_1,X_2,\cdots$为独立同分布随机变量满足

$$\mathbb{P}(X_1=1)=p,\mathbb{P}(X=-1)=q=1-p.$$

对任意$n\geq 0$ 令$Y_0=1$以及

$$Y_n=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n},\ 其中\ \ S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k,\ \ n\geq 1.$$

证明$\{Y_n,n\geq 0\}$关于X为鞅.

21.3 设$X_1,X_2,\cdots$为独立同分布随机变量, $\mathbb{E}(X_n)=0$, $\mathbb{E}(X_n^2)=a^2$. 对任意$n\geq 0$, 令$Y_0=0$,

$$Y_n=(\sum_{k=1}^{n}X_k)^2-na^2\ \ n\geq 1.$$

证明$\{Y_n,n\geq 0\}$关于X为鞅.

21.4 设$X=\{X_n,n\geq 0\}$为任一随机过程, $\tau=\min\{n\geq 0;X_n=a或b\}$, $\eta=\inf\{n\geq 0;X_n\leq a\}$. 证明$\tau,\eta$都是停时.

21.5 利用Jessen不等式证明Lyapunov不等式：对任意随机变量X, 若$0<s<t$, 则

$$(\mathbb{E}(|X|^s))^{1/s}\leq(\mathbb{E}(|X|^t))^{1/t}.$$

21.6* 请补充证明若$\psi(x)$是区间(a,b)内凸函数,则函数ψ在(a,b)内左右导数都存在且对任意$x,y\in(a,b)$

$$\psi(y)-\psi(x)\geq\psi'_+(x)(y-x),$$

其中$\psi'_+(y)$表示y的右导数.

6.3 离散鞅

如无特别说明, 本节我们总设离散参数随机过程$\{X_n\}$为上鞅(下鞅，鞅), 这意味着总相应存在一组参考σ-代数流$\{\mathcal{F}_n\}$使得$\{X_n,\mathcal{F}_n\}$为上鞅(下鞅，鞅).

(A) 停时定理

首先, 我们将上一节的有界停时定理推广到一般停时的情形.

引理22.1 设随机变量W满足$\mathbb{E}(|W|)<\infty$, 若T为有限停时, 即$\mathbb{P}(T<\infty)=1$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(W\mathbf{1}_{\{T>n\}})=0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(W\mathbf{1}_{\{T\le n\}})=\mathbb{E}(W).$$

证明 由正项级数的收敛性,当$n\to\infty$时

$$\mathbb{E}(|W|)\ge\mathbb{E}(|W|\mathbf{1}_{\{T\le n\}})=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}(|W|\mathbf{1}_{\{T=k\}})\to\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}(|W|\mathbf{1}_{\{T=k\}}).$$

由于$\mathbb{P}(T<\infty)=1$, 由引理3.13可知

$$\mathbb{E}(|W|\mathbf{1}_{\{T\ge n+1\}})=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{E}(|W|\mathbf{1}_{\{T=k\}})\to 0.$$

从而

$$0\le|\mathbb{E}(W)-\mathbb{E}(W\mathbf{1}_{\{T\le n\}})|\le|\mathbb{E}(W\mathbf{1}_{\{T\ge n+1\}})|\le\mathbb{E}(|W|\mathbf{1}_{\{T\ge n+1\}})\to 0.$$

由此可得引理结论. □

定理22.2 设$\{X_n;n\ge 0\}$为鞅，T是一个有限停时,若$\mathbb{E}(\sup_{n\ge 0}|X_{T\wedge n}|)<\infty$, 那么$\mathbb{E}(X_T)=\mathbb{E}(X_0)$.

证明 令$W=\sup\limits_{n\ge 0}|X_{T\wedge n}|$. 由于$\mathbb{P}(T<\infty)=1$,

$$X_T=\sum_{k=0}^{\infty}X_k\mathbf{1}_{\{T=k\}}=\sum_{k=0}^{\infty}X_{T\wedge k}\mathbf{1}_{\{T=k\}}.$$

从而$|X_T|\le W$. 因此$\mathbb{E}(|X_T|)\le\mathbb{E}(W)<\infty$. 此时由引理22.1

$$|\mathbb{E}(X_{T\wedge n})-\mathbb{E}(X_T)|\le\mathbb{E}(|X_{T\wedge n}-X_T|\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})\le 2\mathbb{E}(W\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})\to 0.$$

所以$\mathbb{E}(X_T)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{T\wedge n})=\mathbb{E}(X_0)$, 其中最后一个等号由有界停时定理可得. □

推论22.3 设$\{X_n;n\ge 0\}$为鞅，T是一个有限停时, 若$\mathbb{E}(T)<\infty$ 且存在$K<\infty$使得

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}-X_n||\mathcal{F}_n)\le K,$$

那么$\mathbb{E}(X_T)=\mathbb{E}(X_0)$.

证明 令$Z_0=|X_0|$, $Z_n=|X_n-X_{n-1}|$, $W=Z_0+\cdots+Z_T$. 则$W\ge|X_T|$且

$$\mathbb{E}(W)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}(Z_k\mathbf{1}_{\{T=n\}})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}(Z_k\mathbf{1}_{\{T\ge k\}}).$$

注意到$\mathbf{1}_{\{T\ge k\}}=1-\mathbf{1}_{\{T\le k-1\}}$为$Y_0,\cdots,Y_{k-1}$的函数, 由条件假设

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_k\mathbf{1}_{\{T\ge k\}})&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T\ge k\}}\mathbb{E}(Z_k|\mathcal{F}_{k-1}))\\&=\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{T\ge k\}}\mathbb{E}\big(|X_k-X_{k-1}|\big|\mathcal{F}_{k-1}\big)\big)\le K\mathbb{P}(T\ge k)\end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}(W)\le\sum_{k=0}^{\infty}K\mathbb{P}(T\ge k)\le K(1+\mathbb{E}(T))<\infty.$$

因为$|X_{T\wedge n}|\le W$对一切n成立, 由定理22.2 可知结论成立. □

定理22.4 设$\{X_n;n\ge0\}$为鞅，T是一个有限停时, 若$\mathbb{E}(|X_T|)<\infty$且

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})=0,$$

那么$\mathbb{E}(X_T)=\mathbb{E}(X_0)$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_T)&=\mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T<n\}})+\mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})=\mathbb{E}(X_{T\wedge n}\mathbf{1}_{\{T<n\}})+\mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})\\&=\mathbb{E}(X_{T\wedge n})-\mathbb{E}(X_{T\wedge n}\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})+\mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})\end{aligned}$$

由条件$\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{T\wedge n}\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})=0$及引理22.1可知$\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T\ge n\}})=0$. 因此

$$\mathbb{E}(X_T)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{T\wedge n})=\mathbb{E}(X_0),$$

其中最后等号由有界停时定理可得. □

定理22.5 设$\{X_n;n\ge0\}$为上鞅, T为有限停时, 若存在随机变量W使得$\mathbb{E}(|W|)<\infty$且对任意$n\ge0$, $X_{T\wedge n}\ge-W$ 成立, 那么$\mathbb{E}(X_0)\ge\mathbb{E}(X_T)$.

证明 任意取定一个正整数N,令$X_n^N=X_n\wedge N$, 那么$\{X_n^N,n\ge0\}$仍是上鞅, 从而由有界停时定理

$$\mathbb{E}(X_0^N)\ge\mathbb{E}(X_{T\wedge n}^N).$$

由条件假设可知$|X_{T\wedge n}^N|\le N\vee|W|<|W|+N$. 因为$T$为有限停时,

$$X_T^N=\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}^N,\quad a.s.$$

从而$|X_T^N|\le N+|W|$. 当$n\to\infty$时,由引理22.1,

$$\mathbb{E}|X_{T\wedge n}^N-X_T^N|\le\mathbb{E}(|X_{T\wedge n}^N-X_T^N|\mathbf{1}_{\{T>n\}})\le2\mathbb{E}((N+W)\mathbf{1}_{\{T>n\}})\to0.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{T\wedge n}^N)=\mathbb{E}(X_T^N)$.由此可得

$$\mathbb{E}(X_0)\ge\mathbb{E}(X_0^N)\ge\mathbb{E}(X_T^N).$$

因为$\mathbb{E}(X_T^N)$随着N的增加而单调增加,

$$\mathbb{E}(X_0) \geq \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(X_T^N).$$

另一方面, 由$X_T = \lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}$及条件假设可知$X_T \geq -W$. 所以

$$\mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{X_T\leq 0\}}) \geq \mathbb{E}(-W) > -\infty.$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T) &= \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{X_T\leq 0\}}) + \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{X_T> 0\}}) \\
&= \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{X_T\leq 0\}}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{k-1<X_T\leq k\}}) \\
&\leq \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{X_T\leq 0\}}) + \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{k-1<X_T\leq k\}}) + N\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_T>N\}}) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(X_T^N).
\end{aligned}$$

综上所述可得$\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_T)$. □

推论22.6 若$\{X_n\}$为非负上鞅, T为有限停时, 那么$\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_T)$.

例22.1 设$a < b$ 为正整数, S_n是从位置a出发的简单(p, q)随机游动, $p < q$. 定义

$$T = \inf\{n \geq 0, S_n = 0 \text{ 或 } S_n = b\}.$$

求$\mathbb{E}(T)$以及$\mathbb{E}(S_T)$.

解 以$X = \{X_i, i \geq 0\}$表示随机游动中每步的步长, 那么X_i 独立同分布且

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = -1) = q.$$

由定义可知T关于$\{S_n\}$为停时. 对任意$k > b$(不妨设$k = mb + r$其中$m \geq 1$, $r = 0, 1, \cdots, b-1$), 当事件$\{T = k\}$发生时, 在k 之前任意相邻的b 步中游动方向X_i 不能完全相同(否则就提前到访了0 或b). 将k步按每b步组合成

$$\{1, 2, \cdots, b\}, \{b+1, \cdots, 2b\}, \cdots \{(m-1)b+1, \cdots, mb\}, \{mb+1, \cdots, mb+r\}.$$

由X_i的独立同分布性可知$\mathbb{P}(T = k) \leq (1 - p^b - q^b)^m$, 从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{b-1} (mb + r)\mathbb{P}(T = mb + r) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} (1 - p^b)^m (m+1) b^2 = \frac{b^2}{p^{2b}} < \infty.
\end{aligned}$$

令$Y_n = S_n - n(p - q)$, 显然$\{Y_n; n \geq 0\}$关于$\{S_n\}$为鞅. 由

$$\mathbb{E}(|Y_{n+1} - Y_n||S_0, \cdots, S_n) = \mathbb{E}(|X_{n+1} - (p-q)||S_0, \cdots, S_n) \leq 1 + (p - q)$$

以及推论22.3可得

$$\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(Y_0),$$

即

$$\mathbb{E}(S_T) = a + (p-q)\mathbb{E}(T). \tag{6.3.1}$$

另一方面, 令$M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. 则$\{M_n, n \geq 0\}$也是鞅,而且对任意$n \geq 0$, $M_{T\wedge n} \leq 1$, 由定理22.2,

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

即

$$\mathbb{P}(S_T = 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathbb{P}(S_T = b) = \left(\frac{q}{p}\right)^a. \tag{6.3.2}$$

将$\mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - \mathbb{P}(S_T = b)$代入(6.3.2)解得

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b}.$$

从而

$$\mathbb{E}(S_T) = b\mathbb{P}(S_T = b) = b\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b}.$$

将其代入(6.3.1)得

$$\mathbb{E}(T) = \frac{b}{p-q}\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b} - \frac{a}{p-q}.$$

(B) 鞅不等式

然后我们介绍几个离散鞅的不等式.

引理22.7 设$\{X_n, n \geq 0\}$为上鞅, 则对任意$\lambda > 0$有

$$\lambda\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X_0) - \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k < \lambda\}}); \tag{6.3.3}$$

$$\lambda\mathbb{P}(\min_{0\leq k\leq n} X_k \leq -\lambda) \leq -\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\min_{0\leq k\leq n} X_k < -\lambda\}}); \tag{6.3.4}$$

$$\lambda\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X_0) + 2\mathbb{E}(X_n^-), \quad X_n^- = (-X_n) \vee 0. \tag{6.3.5}$$

证明 (1) 令$T = \min\{k, X_k \geq \lambda\} \wedge n$, 则$T$为有界停时. 由有界停时定理,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_T) &= \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k < \lambda\}}) + \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\}}) \\ &\geq \lambda\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) + \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k < \lambda\}}).\end{aligned}$$

移项得(6.3.3).

(2)令$S=\min\{k,X_k\le -\lambda\}\wedge n$, 则$S$为有界停时,且$S\le n$. 由有界停时定理

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n)\le\mathbb{E}(X_S)&=\mathbb{E}(X_S\mathbf{1}_{\{\min_{0\le k\le n}X_k\le-\lambda\}})+\mathbb{E}(X_S\mathbf{1}_{\{\min_{0\le k\le n}X_k>-\lambda\}})\\&\le-\lambda\mathbb{P}(\min_{0\le k\le n}X_k\le-\lambda)+\mathbb{E}(X_n\mathbf{1}_{\{\max_{0\le k\le n}X_k>-\lambda\}})\end{aligned}$$

移项得(6.3.4).

(3) 由(6.3.3),(6.3.4)两项直接相加可得(6.3.5). □

注22.8 由$\{X_n,n\ge0\}$为下鞅可推出$\{|X_n|,n\ge0\}$仍是下鞅. 由(6.3.4)可得, 此时

$$\mathbb{P}(\max_{0\le k\le n}|X_k|\ge\lambda)\le\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{\{\max_{0\le k\le n}|X_k|\ge\lambda\}}).\tag{6.3.6}$$

定理22.9(鞅不等式) 设$\{X_n,n\ge0\}$为鞅或非负下鞅, 令$X_n^*=\max\limits_{0\le k\le n}|X_k|$. 那么

(1) 对任意$\lambda>0$及$r\ge1$, $\mathbb{P}(X_n^*\ge\lambda)\le\lambda^{-r}\mathbb{E}(|X_n|^r)$. (极大不等式)

(2) 对任意$r>1$, $\mathbb{E}(|X_n^*|^r)\le(\frac{r}{r-1})^r\mathbb{E}(|X_n|^r)$. (Doob L^r 不等式)

证明 若$\mathbb{E}(|X_n|^r)=+\infty$, 则结论显然成立. 下设$\mathbb{E}(|X_n|^r)<\infty$.

由$\{|X_n|^r,n\ge0\}$为非负下鞅可得, 对任意$k\le n$,

$$\mathbb{E}(|X_n|^r)\ge\mathbb{E}(|X_k|^r).$$

从而令

$$Y_k=\begin{cases}|X_k|^r, & k\le n\\[2ex] |X_n|^r, & k>n.\end{cases}\qquad \tilde{\mathcal{F}}_k=\begin{cases}\mathcal{F}_k, & k\le n\\[2ex] \mathcal{F}_n, & k>n.\end{cases}$$

那么$\{Y_k,\tilde{\mathcal{F}}_n,k\ge0\}$为非负下鞅. 令$T=\min\{k,|X_k|\ge\lambda\}\wedge n$. 则$T$为有界停时且$T\le n$,

$$\mathbb{E}(|X_n|^r)=\mathbb{E}(|Y_n|)\ge\mathbb{E}(|Y_T|)=\mathbb{E}(|X_T|^r)\ge\lambda^r\mathbb{P}(T\le n)=\lambda^r\mathbb{P}(X_n^*\ge\lambda).$$

由此立即可得

$$\mathbb{P}(X_n^*\ge\lambda)\le\lambda^{-r}\mathbb{E}(|X_n|^r).$$

注意到由(6.3.6)可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_n^*|^r)&=\int_0^\infty r\lambda^{r-1}\mathbb{P}(|X_n^*|\ge\lambda)d\lambda\le\int_0^\infty r\lambda^{r-2}\mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n^*|\ge\lambda\}})d\lambda\\&=\mathbb{E}(|X_n|\int_0^{X_n^*}r\lambda^{r-2}d\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda-1}\mathbb{E}(|X_n||X_n^*|^{r-1}).\end{aligned}$$

由Hölder不等式得

$$\mathbb{E}(|X_n^*|^r)\le(\frac{r}{r-1})^r(\mathbb{E}(|X_n|^r))^{1/r}(\mathbb{E}(|X_n^*|^r))^{1-1/r}.$$

从而$\mathbb{E}(|X_n^*|^r)\le(\frac{r}{r-1})^r\mathbb{E}(|X_n|^r)$. □

推论22.10(Kolomogrov 不等式) 设$X_n, n \geq 1$为独立同分布随机变量且

$$\mathbb{E}(X_1) = 0, \quad \mathbf{Var}(X_1) = \sigma^2.$$

令$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$, 则$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$关于$\mathcal{F}_n$ 为鞅, 由极大不等式可得

$$\mathbb{P}(\max_{0\leq k\leq n} S_n \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{n\sigma^2}{\lambda^2},$$

以及由Doob不等式得$\mathbb{E}(|\max_{0\leq k\leq n} S_k|^2) \leq 4\mathbb{E}(S_n^2) = 4n\sigma^2$. □

(C) 鞅极限定理

最后我们介绍离散鞅的收敛问题. 为此, 我们首先给出一种刻画随机过程反复穿越某个区域的方法. 为此令$X = \{X_t\}$, 其中参数集$T \subset \mathbb{R}$. 设$F = \{t_1, t_2, \cdots, t_d\}$是$T$的一个有限子集满足

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_d.$$

对任意$a < b$, 我们递归定义一列停时: 对任意$j = 1, 2, \cdots$,

$$\tau_F^0 = \inf\{t \geq t_1 : X_t > b, t \in F\}, \qquad \tau_F^1 = \inf\{t > T_0 : X_t < a, t \in F\};$$

$$\tau_F^{2j} = \inf\{t > T_{2j-1} : X_t > b, t \in F\}, \qquad \tau_F^{2j+1} = \inf\{t > T_{2j} : X_t < a, t \in F\},$$

其中约定$\inf\emptyset = t_d$. 令

$$D_a^b[X, F] = \sup\{j : \tau_F^{2j-1} < t_d\}$$

以及

$$D_a^b[X, T] = \sup\{D_a^b[X, F] : F \subset T\text{是有限子集}\}.$$

称$D_a^b[X, T]$为随机过程$\{X_t, t \in T\}$ 下穿区间$[a, b]$ 的次数. 直观地看, $\{X_t, t \in T\}$的下穿次数就X的取值从区间$[a, b]$的上方下降到$[a, b]$ 下方这种现象按时间先后顺序发生的次数.

特别, 若T为有限点集$t_1 < t_2 < \cdots < t_d$, 那么按定义,

$$\{D_a^b[X, T] = j\} = \{t_1 \leq \tau_T^{2j-1} < t_d = \tau_T^{2j+1}\} \in \mathcal{F}_{t_d}.$$

定理22.11(下穿不等式) 设$\{X_t, t \in T\}$为下鞅, T可数, 那么

$$\mathbb{E}(D_a^b[X, T]) \leq \frac{1}{b-a}\sup_{t\in T}\mathbb{E}[(X_t - b)^+].$$

证明 任取T的有限子集$F : t_1 < t_2 < \cdots < t_d$, 由下鞅的有界停时定理, 对任意$k \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}(X_{\tau_F^{2k+1}\wedge t_d} - X_{\tau_F^{2k}\wedge t_d}) \\ &= \mathbb{E}\Big((X_{\tau_F^{2k+1}\wedge t_d} - X_{\tau_F^{2k}\wedge t_d})(\chi_{\{\tau_F^{2k} < t_d = \tau_F^{2k+1}\}} + \chi_{\{t_d > \tau_T^{2k+1}\}})\Big) \end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{E}((X_{t_d}-b)\chi_{\{\tau_F^{2k}<t_d=\tau_F^{2k+1}\}})+(a-b)\mathbb{P}(\tau_F^{2k+1}<t_d)$$
$$\leq \mathbb{E}((X_{t_d}-b)\chi_{\{\tau_F^{2k}<t_d=\tau_F^{2k+1}\}})+(a-b)\mathbb{P}(D_a^b(x,F)\geq k+1).$$

从而

$$\mathbb{P}(D_a^b(X,F)\geq k+1)\leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}((X_{t_d}-b)\chi_{\{\tau_F^{2k}<t_d=\tau_F^{2k+1}\}})$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}((X_{t_d}-b)^+\chi_{\{\tau_F^{2k}<t_d=\tau_F^{2k+1}\}}).$$

两边关于k求和得

$$\mathbb{E}(D_a^b(X,F))\leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}((X_{t_d}-b)^+\chi_{\{\tau_F^0<t_d\}})\leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}((X_{t_d}-b)^+).$$

由于$D_a^b[X,T]=\sup_F\{D_a^b[X,F]\}$易知定理结论成立. □

定理22.12 (Doob收敛定理) 设$\{X_n,n\geq 0\}$为(上，下)鞅，若

$$M=\sup_n \mathbb{E}(|X_n|)<\infty.$$

则存在随机变量X_∞使得当$n\to\infty$ 时$X_n\to X_\infty$且$\mathbb{E}|X_\infty|<\infty$.

证明 由于上鞅的负过程为下鞅, 因此只考虑下鞅情形. 令$\mathbb{Q}$表示有理数全体, 设$a,b\in\mathbb{Q}$, $a<b$. 由下穿不等式

$$\mathbb{E}(D_a^b(X,\mathbb{N}))\leq \frac{1}{b-a}\sup_n \mathbb{E}((X_n-b)^+)\leq \frac{1}{b-a}(b+\sup_n \mathbb{E}|X_n|)<\infty.$$

于是$D_a^b(X,\mathbb{N})<\infty, a.s.$ 令

$$W_{a,b}=\{\liminf_{n\to\infty} X_n<a,\qquad \limsup_{n\to\infty} X_n>b\},$$
$$W=\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} W_{a,b}.$$

由$W_{a,b}\subset\{D_a^b(X,\mathbb{N})=+\infty\}$可知$\mathbb{P}(W_{a,b})=0$, 从而$\mathbb{P}(W)=0$. 显然对任意$\omega\notin W$,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)=\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega),$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)$存在, 记作$X_\infty(\omega)$. 若$\omega\in W$,则补充定义$X_\infty(\omega)=0$. 因此

$$X_n\to X_\infty, a.s.$$

由Fatou引理

$$\mathbb{E}(|X_\infty|)=\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty}|X_n|)\leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}(|X_n|)<\infty.$$

因此结论成立.

推论22.13 (1)若$\{X_n\}$为鞅或下鞅, 且一致可积, 那么存在X_∞使得$X_n\xrightarrow{a.s.,L^1}X_\infty$而且对任意$n\geq 0$,

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n)=(\geq)X_n,\quad a.s.$$

(2)若$\{X_n\}$为非正下鞅, 则存在可积随机变量X_∞使得$X_n \overset{a.s.}{\to} X_\infty$而且对任意$n \geq 0$, $\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) \geq X_n$, a.s.

证明 (1)由一致可积性可知$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, 从而由定理22.12可知存在可积随机变量$X_\infty$使得$X_n \overset{a.s.}{\to} X_\infty$, 再由一致可积性, 可得$X_n \overset{L^1}{\to} X_\infty$. 因此

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = (\geq) X_n, \quad a.s.$$

(2)由$\{X_n\}$为非正下鞅可知$\{|X_n|\}$为非负上鞅. 因而

$$\sup_n \{\mathbb{E}|X_n|\} \leq \mathbb{E}(|X_0|) < \infty,$$

由定理22.6以及Fatou引理可知结论成立.

推论22.14 设$\{X_n\}$为鞅或非负下鞅, $p > 1$. 若$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$, 则$X_n \overset{a.s.,L^p}{\longrightarrow} X_\infty$ 且$\|X_\infty\|_p = \sup_n \|X_n\|_p$.

证明 由$\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$可知$\{X_n\}$一致可积. 因此

$$X_n \overset{a.s}{\to} X_\infty, \qquad a.s.$$

对$\{|X_n|, n \geq 0\}$应用Doob L^p不等式可知$X^* \in L^p$. 又由

$$|X_n - X_\infty|^p \leq (2X^*)^p$$

以及控制收敛定理,

$$X_n \overset{L^p}{\to} X_\infty.$$

所以也有

$$\|X_\infty\|_p = \lim_{n\to\infty} \|X_n\|_p = \sup_n \|X_n\|_p.$$

定理22.15 设$\{X_n, n \leq 0\}$是一个(下)鞅. 则存在$X_{-\infty}$使得

$$\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty} \ a.s.$$

若还有$\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$, 则$\{X_n, n \leq 0\}$一致可积且$X_n \overset{L^1}{\to} X_{-\infty}$,

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-\infty}) = (\geq) X_{-\infty},$$

其中$\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\leq 0} \mathcal{F}_n$.

证明 注意到$\{X_n^+\}$为下鞅，$\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) \leq X_0^+ < +\infty$. 因此

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to-\infty} X_n^+) \leq \liminf_{n\to-\infty} \mathbb{E}(X_n^+) \leq \mathbb{E}(X_0^+) < \infty.$$

所以

$$\liminf_{n\to-\infty} X_n \leq \liminf_{n\to-\infty} X_n^+ < +\infty, \quad a.s.$$

从而, 若定理的结论不真, 则存在两实数$a < b$使得

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to-\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to-\infty} X_n) > 0.$$

这表明$\lim\limits_{n\to-\infty}\mathbb{E}(D_a^b(X,n))=\infty$, 其中$D_a^b(X,n)$ 表示$\{X_k,n\le k\le 0\}$下穿区间$[a,b]$的次数. 这与定理22.11结果矛盾. 因此存在$X_{-\infty}$使得当$n\to-\infty$时$X_n\xrightarrow{a.s.}X_{-\infty}$.

下面证明第二个结论. 为此任取$c>0$, $n\ge 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>c\}}|X_n|dP&=\int_{\{X_n<-c\}}-X_ndP+\int_{\{X_n>c\}}X_ndP\\&=\int_{X_n\ge -c}X_ndP+\int_{X_n>c}X_ndP-\mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$

注意到$\mathbb{E}(X_n)$随$n\to-\infty$单调不增, 由$\sup_n\mathbb{E}(|X_n|)<\infty$可知$\lim\limits_{n\to-\infty}\mathbb{E}(X_n)$存在且有限. 因此对任意$\varepsilon>0$, 存在$n_0<0$, 使得对任意$n\le n_0$,

$$\mathbb{E}(X_n)>\mathbb{E}(X_{n_0})-\varepsilon/2.$$

进一步利用下鞅性质可得, 对任意$n\le n_0$

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_n|>c\}}|X_n|dP&\le\int_{\{X_n\ge -c\}}X_{n_0}dP-\mathbb{E}(X_{n_0})+\int_{\{X_n>c\}}X_{n_0}dP+\varepsilon/2\\&\le\int_{\{|X_n|>c\}}X_{n_0}dP+\varepsilon/2.\end{aligned}$$

由于$\mathbb{P}(|X_n|\ge c)\le c^{-1}\sup_n\mathbb{E}|X_n|$, 当$c$充分大时, 对任意$n\le 0$

$$\int_{\{|X_n|\ge c\}}|X_{n_0}|dP<\varepsilon/2,\qquad \int_{\{|X_j|\ge c\}}|X_j|dP<\varepsilon/2, j=1,2,\cdots,n_0.$$

因此, 当c充分大时, $\int_{|X_n|>c}|X_n|dP<\varepsilon$对一切$n\le 0$都成立, 即$\{X_n,n\le 0\}$一致可积. 所以$X_n\xrightarrow{L^1}X_{-\infty}$.

最后, 对任意$A\in\mathcal{F}_{-\infty}$, 对任意$m<n$,

$$\int_A X_m\mathrm{d}P=(\le)\int_A X_n\mathrm{d}P.$$

令$m\to-\infty$得

$$\int_A X_{-\infty}dP=(\le)\int_A X_ndP,$$

即$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{-\infty})=(\ge)X_{-\infty}$.

注22.16 定理22.15也可按时间正向增加的方式叙述如下:

设$\{\mathcal{F}_n,n\ge 0\}$为一列单调下降的σ-代数流, $\{X_n,n\ge 0\}$满足

(1) $X_n\in\mathcal{F}_n$,

(2) 对任意$0\le n\le m$, $\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m)=(\ge)X_m$.

(此时常称$\{X_n,\mathcal{F}_n\}$为反向(下)鞅.) 那么存在X_∞使得

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty\ \ a.s.$$

若还有$\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$, 则$\{X_n, n \geq 0\}$一致可积且

$$X_n \stackrel{L^1}{\to} X_\infty, \qquad \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_\infty) = (\geq) X_\infty,$$

其中$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$.

推论22.17 设Y, X, X_n, $n \geq 0$是一族随机变量, $X_n \to X$, a.s. $|X_n| \leq Y$且Y可积. 任取一族σ-代数流, 若$\mathcal{F}_n$单调增加, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n).$$

证明 对任意$m > 0$, 令$U_m = \inf_{n\geq m} X_n$, $V_m = \sup_{n\geq m} X_n$. 由假设可知$U_m \stackrel{a.s}{\to} X$, $V_m \stackrel{a.s}{\to} X$而且$|U_m|, |V_m| \leq Y$. 对任意$n \geq m$, 令

$$U_{m,n} := \mathbb{E}(U_m|\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(V_m|\mathcal{F}_n) =: V_{m,n}$$

容易证明此时$\{U_{m,n}, \mathcal{F}_n, n \geq m\}$是一致可积鞅, 因此存在$U_{m,\infty}$使得

$$U_{m,n} \stackrel{a.s, L^1}{\longrightarrow} U_{m,\infty}.$$

注意到, 对任意$A \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$, 存在$m_0$使得$A \in \mathcal{F}_{m_0}$. 对任意$n > m_0$,

$$\mathbb{E}(U_{m,n}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U_m|\mathcal{F}_n)\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(U_m\mathbf{1}_A).$$

令$n \to \infty$得$\mathbb{E}(U_{m,\infty}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(U_m\mathbf{1}_A)$. 容易验证定理19.1的条件满足, 由此可得, 对任意$A \in \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ 也有

$$\mathbb{E}(U_{m,\infty}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(U_m\mathbf{1}_A),$$

即$U_{m,\infty} = \mathbb{E}(U_m| \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n)$. 所以

$$\mathbb{E}(U_m| \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n).$$

同理可证

$$\mathbb{E}(V_m| \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n).$$

令$m \to \infty$, 由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n).$$

练习题

22.1 试构造一个鞅$\{X_n, n \geq 0\}$和停时T使得$\mathbb{E}(X_T) \neq \mathbb{E}(X_0)$.

22.2 证明对任意鞅或非负下鞅$\{X_n, n \geq 0\}$及停时τ, $\mathbb{E}(|X_\tau|) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|)$.

22.3 若例22.1中$p = 1/2$, 求相应的$\mathbb{E}(T), \mathbb{E}(S_T)$.

22.4 设$\{X_n, n \geq 0\}$为鞅, $\mathbb{E}(X_n) = 0$且$\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, $n \geq 0$, 证明

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\mathbb{E}(X_n^2) + \lambda^2}.$$

22.5 给定$\lambda > 0$, 若$X_1, X_2, \cdots$,满足对任意$n \geq 1$, $\mathbb{E}(\exp(\lambda X_{n+1}) | X_1, \cdots, X_n) \leq 1$, 令$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $S_0 = 0$. 证明

$$\mathbb{P}(\max_{n \geq 0}(x + S_n) > l) \leq \mathrm{e}^{-\lambda(l-x)}, \quad , x \leq l.$$

22.6 设$X_1, X_2, \cdots$,为独立随机变量且存在$t > 0$使得对任意$k \geq 1$,

$$\psi_k(t) = \mathbb{E}(\exp(tX_k)) < \infty.$$

若$\Psi_n(t) = \prod_{k=1}^n \psi_k(t) \to \Psi(t) \in (0, \infty)$,证明$S_n = X_1 + \cdots + X_n$几乎必然收敛.

6.4 连续参数鞅

与上节不同, 本节如无特别说明, 总假设连续参数随机过程$\{X_t, t\in T\}$为上鞅(下鞅，鞅).

(A) 连续参数鞅的轨道连续性

我们首先讨论连续参数(上、下)鞅的轨道连续性.

引理23.1 若$\{X_t, t\in \mathbb{R}_+\}$为下鞅, 则对a.s. ω,, $\lim\limits_{r\uparrow t, r\in \mathbf{Q}} X_r(\omega)$对任意$t\in(0,\infty)$存在, 而且$\lim\limits_{r\downarrow t, r\in \mathbf{Q}} X_r(\omega)$对任意$t\in[0,\infty)$也存在.

证明 任取正整数M, 由下穿不等式可知, 对任意$a,b\in\mathbf{Q}$, $a<b$,

$$\mathbb{E}(D_a^b[X,[0,M]\cap\mathbf{Q}])\le \mathbb{E}[(X_M-b)^+]/(b-a).$$

因此存在Ω_M使得$\mathbb{P}(\Omega_M)=1$且当$\omega\in\Omega_M$时, 对任意$a,b\in\mathbf{Q}$, $a<b$,

$$D_a^b[X,[0,M]\cap\mathbf{Q}]<\infty.$$

令$\Omega_0=\cap_{M=1}^\infty\Omega_M$. 此时$\mathbb{P}(\Omega_0)=1$, 而且与定理21.12以及定理21.15证明一样, 可知对任意$\omega\in\Omega_0$, 引理结论成立. □

对任意$t\in[0,\infty)$, 定义

$$X_{t+}=\limsup_{r\downarrow t, r\in\mathbf{Q}} X_r, \qquad X_{t-}=\limsup_{0\le r\uparrow t, r\in\mathbf{Q}} X_r.$$

由引理23.1可知, 当X为下鞅时，上述定义中上极限$\limsup$可换成极限$\lim$.

引理23.2 设$\{X_t, t\in\mathbb{R}_+\}$是一个下鞅, 则对任意$t\ge 0$, $\mathbb{E}(|X_{t+}|)<\infty$, 且

(1) $X_t\le \mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$ $a.s.$而且等式成立当且仅当函数$t\to\mathbb{E}(X(t))$右连续.

(2) $\{X_{t+}\}$关于$\{\mathcal{F}_{t+}\}=\{\cap_{s>t}\mathcal{F}_s\}$仍为下鞅, 而当$X$为鞅时$(X_{t+},\mathcal{F}_{t+})$也为鞅.

证明 对任意取定的$t\ge 0$, 只需在一个闭区间$t\in[a,b]\in\mathbb{R}_+$中讨论即可. 设$t_n\in\mathbf{Q}$, $t_n\downarrow t$. 注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_{t_n}|)&=\mathbb{E}(X_{t_n}^+)+\mathbb{E}(X_{t_n}^-)\\&=2\mathbb{E}(X_{t_n}^+)-\mathbb{E}(X_{t_n})\le 2\mathbb{E}(X_{t_1}^+)-\mathbb{E}(X_t)<\infty,\end{aligned}\tag{6.4.1}$$

由定理22.15及其后面的注记可知X_{t+}可积且$X_{t_n}\xrightarrow{a.s.L^1}X_{t+}$.

(1) 进一步注意到当$n<m$时,

$$\mathbb{E}(X_{t_m}|\mathcal{F}_t)\le\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_{t_m})|\mathcal{F}_t)=\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t).$$

因此$\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)$单调下降, 极限存在. 又因为$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X_{t_1}|\mathcal{F}_t)|)\le\mathbb{E}(|X_{t_1}|)<\infty$, 对

任意$A\in\mathcal{F}_t$, 由单调收敛定理及$X_{t_n}\xrightarrow{L^1}X_{t_+}$可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_A) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}_A)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{t_n}\mathbf{1}_A)=\mathbb{E}(X_{t_+}\mathbf{1}_A).\end{aligned}$$

这表明$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)=\mathbb{E}(X_{t_+}|\mathcal{F}_t)$. 结合不等式$X_t\le\mathbb{E}(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)$可得

$$X_t\le\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)\qquad a.s.$$

进一步, 若上式取等号, 那么

$$\mathbb{E}(X_t)=\mathbb{E}(X_{t+})=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_{t_n})=\lim_{s\downarrow t}\mathbb{E}(X_s),$$

因此函数$t\to\mathbb{E}(X_t)$是右连续的. 反之若$t\to\mathbb{E}(X_t)$是右连续的, 则由

$$0=\lim_{r\in\mathbf{Q},r\downarrow t}\mathbb{E}(X_{r_n}-X_t)=\mathbb{E}(X_{t_+}-X_t)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)-X_t)$$

可知$X_t=\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$, a.s.

(2) 对任意$s<t$, 取$s_n\in\mathbf{Q}$使得$s_n<t$且$s_n\downarrow s$. 则

$$X_{s_n}\le\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{s_n})\le\mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_+)|\mathcal{F}_{s_n})=\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n}). \tag{6.4.2}$$

令$Y_n=\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n})$, 显然$\{Y_n\}$为反向鞅且由(6.4.1)的类似分析可知

$$\sup_n\mathbb{E}(|Y_n|)<\infty.$$

因此由定理22.15后的注可知

$$Y_n\to Y_\infty=\mathbb{E}(X_{t_+}|\mathcal{F}_{s+}).$$

所以

$$X_{s+}=\lim_{n\to\infty}X_{s_n}\le\mathbb{E}(X_{t_+}|\mathcal{F}_{s+}), \tag{6.4.3}$$

即$\{X_{t+},\mathcal{F}_{t+}\}$为下鞅. 特别, 若$X$为鞅, 那么(6.4.2)中各不等号均为等号, 从而(6.4.3) 中不等号也为等号, 即$\{X_{t+},\mathcal{F}_{t+}\}$为鞅. □

定理23.3 设$\{\mathcal{F}_t\}$为一族单调不降σ-代数, 右连续, 即对任意t, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$. $\{X_t\}$关于$\{\mathcal{F}_t\}$为下鞅, 若$t\to\mathbb{E}(X_t)$右连续, 则X有一个右连续修正$\tilde{X}$使得$\{\tilde{X}_t\}$也是$\{\mathcal{F}_t\}$下鞅且对a.s. ω,及$t>0$

$$\tilde{X}_{t-}:=\lim_{s\uparrow t}\tilde{X}_s(\omega)=\lim_{s\in\mathbf{Q},s\uparrow t}X_s(\omega),\qquad s>0.$$

证明 令

$$N_t=\bigcup_{a<b,a,b\in\mathbf{Q}}\Big\{\omega:\sup_{s\in\mathbf{Q}\cap[0,t]}|X_s(\omega)|=\infty\quad\text{或}\quad D_a^b(X,[0,t]\cap\mathbf{Q})=\infty\Big\}.$$

由下穿不等式, $\mathbb{P}(N_t)=0$. 令$N_{t+}=\cap_{s>t}N_s$, 则$N_t\in\mathcal{F}_t, N_{t+}\in\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$. 定义

$$\tilde{X}_t(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in\mathbf{Q},s\downarrow t}X_s(\omega), & \omega\notin N_{t+},\\ 0, & \omega\in N_{t+}.\end{cases}$$

由于$\omega\in N_{t+}$时极限$\lim\limits_{s\in\mathbf{Q},s\downarrow t}X_s(\omega)$存在, 因此上述定义有意义. 由此$\tilde{X}_t\overset{a.s}{=}X_{t+}$. 注意到$\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$ 而且函数$t\to\mathbb{E}(X_t)$连续, 由引理23.2

$$\tilde{X}_t=X_{t+}=\mathbb{E}(X_{t+}|\mathcal{F}_t)=X_t,\quad a.s.$$

即$\tilde{X}$是X的一个修正.

其次, 我们验证$\tilde{X}$右连续. 为此任取$t\in\mathbb{R}_+$, $\omega\notin N_{t+}$, 由于

$$N_{t+}=\cap_{s>t}N_s=\cap_{s>t}N_{s+},$$

所以存在$t_0>t$使得对任意$s\in(t,t_0]$, $\omega\notin N_s$. 对任意$\varepsilon>0$, 选取$0<\delta<t_0-t$, 使当$r\in\mathbf{Q}$且$0\le r-t<\delta$ 时, $|\tilde{X}_t(\omega)-X_r(\omega)|<\varepsilon$, 于是当$0<s-t<\delta/2$时有

$$|\tilde{X}_t(\omega)-\tilde{X}_s(\omega)|=\lim_{r\downarrow s}|\tilde{X}_t(\omega)-X_r(\omega)|\le\varepsilon.$$

若$\omega\in N_{t+}$, 则对任意$s>t$, $\omega\in N_{s+}$, 所以$\lim_{s\downarrow t}\tilde{X}_s(\omega)=\tilde{X}_t(\omega)=0$. 因此$\tilde{X}$右连续.

最后, 我们验证$\tilde{X}$的左极限与X的左极限a.s.相同. 令

$$N=\cup_{t>0}N_t=\cup_{n=1}^{\infty}N_n,$$

则$\mathbb{P}(N)=0$, 对任意$\omega\notin N$以及任意t, $l:=\lim_{r\in\mathbf{Q},r\uparrow t}X_t(\omega)$存在且有限, 从而对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$使得当$0<t-r<\delta$ 时有$|X_r(\omega)-l|<\varepsilon$. 因此对任意$0<t-s<\delta$有

$$|\tilde{X}_s-l|=\lim_{s<r<t,r\in\mathbf{Q},r\downarrow s}|X_r(\omega)-l|\le\varepsilon.$$

即$\tilde{X}_{t-}:=\lim_{s\uparrow t}\tilde{X}_s(\omega)=l=\lim_{s\in\mathbf{Q},s\uparrow t}X_s(\omega)$. □

注23.4 (1) 若不设$\{\mathcal{F}_t\}$右连续, 那么修正$\tilde{X}$关于$\{\mathcal{F}_{t+}\}$为下鞅.
(2)若$\{X_t,\mathcal{F}_t\}$为鞅且$\mathcal{F}_t$右连续, 那么存在右连续的修正$\tilde{X}$使得$(\tilde{X}_t,\mathcal{F}_t)$仍为鞅.

(B) 连续参数鞅的不等式与极限

由引理23.2以及定理23.3, 不失一般性, 以后我们总设(上, 下)鞅是轨道右连续的. 在此假设下，我们容易将离散(上, 下)鞅的不等式和极限定理推广到具有连续参数情形的(上, 下)鞅.

定理23.5 设$\{X_t,t\in T\}$是一个右连续鞅或右连续非负下鞅, 其中T是R中一个子

集. 令$X^*=\sup_{t\in T}|X_t|$. 对任意$p\geq 1$,

$$\lambda^p\mathbb{P}(X^*\geq\lambda)\leq\sup_{t\in T}\mathbb{E}(|X_t|^p)$$

且对任意$p>1$,

$$\mathbb{E}(|X^*|^p)|\leq\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sup_{t\in T}\mathbb{E}(|X_t|^p).$$

证明 取D为T的可数稠密子集, 由右连续性,

$$X^*=\sup_{t\in T}|X_t|=\sup_{t\in D}|X_t|.$$

再取D中有限子集D_n使得$D_n\to D$. 因此

$$X^*=\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in D_n}|X_t|.$$

对$\{X_t,t\in D_n\}$, 由定理21.9可知对任意$\lambda>0$及$p\geq 1$,

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in D_n}|X_t|\geq\lambda)\leq\lambda^{-p}\sup_{t\in D_n}\mathbb{E}(|X_t|^p)\leq\lambda^{-p}\sup_{t\in T}\mathbb{E}(|X_t|^p),$$

以及

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in D_n}|X_t|^p)\leq(\frac{p}{p-1})^p\sup_{t\in D_n}\mathbb{E}(|X_t|^p)\leq(\frac{p}{p-1})^p\sup_{t\in T}\mathbb{E}(|X_t|^p).$$

令$n\to\infty$可知定理23.5成立. □

定理23.6 设$\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$为右连续下鞅, 则

$$(b-a)\mathbb{E}(D_a^b(X,\mathbb{R}_+))\leq\sup_t\mathbb{E}(X_t-b)^+.$$

证明 只需注意到X_t右连续时$D_a^b(X,\mathbb{R}_+)=D_a^b(X,\mathbb{R}_+\cap\mathbf{Q})$. 由离散情形的下穿不等式不难证明结论成立. □

定理23.7 若下鞅$\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$右连续, 满足$\sup_t\mathbb{E}(X_t^+)<\infty$, 则存在可积随机变量$X_\infty$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}X_t=X_\infty,a.s.$$

特别, 若$\{X_t\}$ 是非负上鞅, 则存在X_∞使得$\lim_{t\to\infty}X_t=X_\infty<\infty$, a.s., 且

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)\leq X_t,\quad a.s.$$

证明 与定理22.12的证明一样, 只需将其中离散下鞅的下穿不等式换成定理23.6的下穿不等式, 我们可得$\lim_{t\to\infty}X_t=X_\infty,a.s.$ 若$\{X_t\}$是非负上鞅, 那么由条件数学期望的Fatou引理可得

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)=\mathbb{E}(\liminf_{s\to\infty}X_s|\mathcal{F}_t)\leq\liminf_{s\to\infty}\mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t)=X_t,\quad a.s.$$ □

定理23.8 若$\{X_t,t\leq 0\}$是一个右连续下鞅, 则存在$X_{-\infty}$使得

$$\lim_{t\to-\infty}X_t=X_{-\infty},\quad a.s.$$

若还有$\sup_t \mathbb{E}|X_t| < \infty$, 则$X_{-\infty}$ 可积, $X_t \overset{a.s.,L^1}{\longrightarrow} X_{-\infty}$且$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{-\infty}) \geq X_{-\infty}$, 其中$\mathcal{F}_{-\infty} = \cap_{t\leq 0}\mathcal{F}_t$.

证明 仿定理22.15证明可得, 请同学自己完成, 此略. □

定理23.9 设$\{X_t, t \in R_+\}$是右连续鞅, 则下列条件等价

(1) 存在可积X_∞, 使得$X_t \overset{L^1}{\to} X_\infty$;

(2) 存在可积X_∞, 使得$X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)$;

(3) $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$一致可积.

若上述条件之一满足, 则$X_t \to X_\infty$, a.s. 进一步, 若对某个$p > 1$,

$$\sup_{t\in R_+} \mathbb{E}(|X_t|^p) < \infty,$$

则上述条件都成立, 且$X_t \overset{a.s.,L^p}{\longrightarrow} X_\infty$.

证明 (1)⇒(2). 由于对任意$h > 0$, $X_t = \mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t)$, 对任意$A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_{t+h}\mathbf{1}_A).$$

令$h \to \infty$得$\mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_\infty\mathbf{1}_A)$, 即(2)成立.

(2)⇒(3). 由条件可知$|X_t| \leq \mathbb{E}(|X_\infty||\mathcal{F}_t)$, 因此

$$\int_{|X_t|>\alpha} |X_t|dP \leq \int_{|X_t|>\alpha} |X_\infty|dP.$$

注意到当$\alpha \to \infty$时,

$$\mathbb{P}(|X_t| > \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_t|)}{\alpha} \leq \frac{\mathbb{E}(|X_\infty|)}{\alpha} \to 0.$$

由可积随机变量的绝对连续性可知$\{X_t\}$一致可积.

(3)⇒(1). 由一致可积性可验证定理23.7条件成立, 从而存在可积随机变量X_∞, 使得$X_t \to X_\infty$, a.s. 再由一致可积性可知$X_t \overset{L^1}{\to} X_\infty$.

剩余部分与推论22.14类似, 此略. □

(C) 连续时间鞅的停时定理.

定理23.10 设$\{X_t, t \in T\}$为右连续一致可积鞅, S, U为两停时且$S \leq U$, 那么

$$X_S = \mathbb{E}(X_U|\mathcal{F}_S).$$

证明 首先证明若S, U为两只有有限个取值的停时且$S \leq U$, 那么定理结论成立. 此时不妨设S的取值为$t_1 < \cdots < t_d \leq \infty$. 注意到由定理23.9, 存在可积随机变量$X_\infty \in \mathcal{F}_\infty := \vee_{t\in T}\mathcal{F}_t$ 使得对任意$t_k, k = 1, \cdots, d$,

$$X_{t_k} = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{t_k}).$$

对任意$A \in \mathcal{F}_S$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_A) &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_\infty \mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_{t_k} \mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_S \mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) = \mathbb{E}(X_S \mathbf{1}_A).\end{aligned}$$

因此$X_S = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_S)$. 类似可证,$X_U = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_U)$. 由$\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_U$以及条件数学期望的平滑性可知此时结论成立.

对一般的停时$S \le U$, 由定理21.2可知取值有限的停时列

$$S_n := \begin{cases} \frac{[2^n S]+1}{2^n}, & S \le n; \\ +\infty, & S > n, \end{cases} \qquad T_n := \begin{cases} \frac{[2^n T]+1}{2^n}, & T \le n; \\ +\infty, & T > n, \end{cases}$$

单调下降地分别收敛到S, U. 由前面关于有限个取值的停时证明可知, 对任意$n \ge 1$,

$$X_{S_n} = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{S_n}), \qquad X_{U_n} = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{U_n}) \tag{6.4.4}$$

以及

$$X_{S_n} = \mathbb{E}(X_{U_n}|\mathcal{F}_{S_n}). \tag{6.4.5}$$

(6.4.4)表明$\{X_{S_n}\}$, $\{X_{U_n}\}$是一致可积的, (6.4.4)表明, 对任意$A \in \mathcal{F}_S$,

$$\mathbb{E}(X_{S_n}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_{U_n}\mathbf{1}_A).$$

令$n \to \infty$, 由右连续性与一致可积性可得

$$\mathbb{E}(X_S\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_U\mathbf{1}_A).$$

即$X_S = \mathbb{E}(X_U|\mathcal{F}_S)$, 定理得证. □

推论23.11 设$\{X_t, t \in T\}$为右连续鞅, S, U为两有界停时且$S \le U$, 那么

$$X_S = \mathbb{E}(X_U|\mathcal{F}_S).$$

证明 由于S, U都有界, 不妨上界为$K \in T$, 那么由定理23.9可知$\{X_t, t \le K\}$为一致可积鞅, 进而由定理23.10可知结论成立. □

定理23.12 设$\{X_t, t \in T\}$是右连续非负上鞅, 则对任意停时$S \le U$, 有

$$X_S \ge \mathbb{E}(X_U|\mathcal{F}_S).$$

证明 与定理23.9的证明类似，我们先证明S, U只取有限个值得情形. 由于X为右连续非负上鞅, 由定理23.6可知存在可积的极限X_∞. 设S, U 的取值为$t_1 < \cdots < t_d \le \infty$. 对任意$k \ge 1$, 容易验证$\mathbb{E}|X_{S\wedge t_k}| < \infty$且

$$\mathbb{E}(X_{S\wedge t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_k}) = \mathbb{E}(X_S\mathbf{1}_{\{S\le t_k\}}|\mathcal{F}_{t_k}) + \mathbb{E}(X_{t_{k+1}}\mathbf{1}_{\{S>t_k\}}|\mathcal{F}_{t_k})$$

$$\le X_S\mathbf{1}_{\{S\le t_k\}} + X_{t_k}\mathbf{1}_{\{S>t_k\}} = X_{S\wedge t_k}.$$

这表明$\{X_{S\wedge t_k}, \mathcal{F}_{t_k}\}$为非负上鞅, 类似可知$\{X_{U\wedge t_k}, \mathcal{F}_{t_k}\}$为非负上鞅. 对任意$A\in\mathcal{F}_S$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_S\mathbf{1}_A) &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_S\mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_{U\wedge t_k}\mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) \\ &\ge \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_{U\wedge t_d}\mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E}(X_U\mathbf{1}_{\{S=t_k\}\cap A}) = \mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_A),\end{aligned}$$

即$\mathbb{E}(X_U|\mathcal{F}_S)\le X_S$, 当$S,T$取有限多值时成立.

对一般的停时, 与定理23.10证明类似，可找到有限取值的停时列S_n, U_n 单调下降地分别收敛到S, U, 且$S_n\le U_n$. 由前面关于有限值停时证明可知, 对任意$A\in\mathcal{F}_S$,

$$\mathbb{E}(X_{S_n}\mathbf{1}_A)\ge\mathbb{E}(X_{U_n}\mathbf{1}_A).$$

注意到$\{X_{S_n}\}$, $\{X_{U_n}\}$为反向上鞅, 而且

$$\sup_n \mathbb{E}|X_{U_n}|\le\sup_n\mathbb{E}|X_{S_n}|\le\mathbb{E}(X_0)<\infty.$$

对$\{-X_{S_n}\}$, $\{-X_{U_n}\}$应用定理21.9及其后面的注可得$\{X_{S_n}\}$, $\{X_{U_n}\}$均一致可积. 从而由右连续性可知定理结论成立. □

定理23.13 设$\{X_t, t\in T\}$为右连续一致可积鞅(非负上鞅), S,U为停时, 那么

$$X_{U\wedge S} = (\ge)\mathbb{E}(X_U|\mathcal{F}_S).$$

证明 由命题21.4,21.6及定理23.10(定理23.12)可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) &= \mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T\ge S\}}|\mathcal{F}_S) + \mathbb{E}(X_T\mathbf{1}_{\{T<S\}}|\mathcal{F}_S) \\ &= \mathbf{1}_{\{T\ge S\}}\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_{S\wedge T}) + \mathbb{E}(X_{S\wedge T}\mathbf{1}_{\{T<S\}}|\mathcal{F}_S) \\ &= (\ge)\mathbf{1}_{\{T\ge S\}}X_{S\wedge T} + X_{S\wedge T}\mathbf{1}_{\{T<S\}} = X_{S\wedge T}.\end{aligned}$$

例23.1 令$B=\{B_t, t\ge 0\}$为标准布朗运动. 对任意$a<0<b$. 试求概率

$$\mathbb{P}(a<\min_{0<s<t}B_s\le\max_{0<s<t}B_t<b).$$

解 令$\tau_a=\inf\{t\ge 0, B_t=a\}$, $\tau_b=\inf\{t\ge 0, B_t=b\}$, 那么所求概率为

$$p=\mathbb{P}(T_a\wedge T_b>t).$$

对任意$\lambda\in\mathbb{R}$, 注意到$M_t=\exp\{-\lambda B_t-\frac{\lambda^2 t}{2}\}$ 为鞅, 由推论23.11可知, 对任意$u>0$

$$\mathbb{E}(M_{u\wedge T_a\wedge T_b})=\mathbb{E}(M_0)=1,$$

再令$u\to\infty$, 注意到$B_{u\wedge T_a\wedge T_a}$总在$a,b$之间, 由控制收敛定理可得

$$\mathbb{E}(M_{T_a\wedge T_b})=\mathbb{E}(M_0)=1.$$

由此可得对任意$\lambda>0$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda a}\mathrm{e}^{-\lambda^2T_a/2}\mathbf{1}_{\{T_a<T_b\}})+\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda b}\mathrm{e}^{-\lambda^2T_b/2}\mathbf{1}_{\{T_b<T_a\}})=1,$$
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda a}\mathrm{e}^{-\lambda^2T_a/2}\mathbf{1}_{\{T_a<T_b\}})+\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda b}\mathrm{e}^{-\lambda^2T_b/2}\mathbf{1}_{\{T_b<T_a\}})=1.$$

解之得

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda^2T_a/2}\mathbf{1}_{\{T_a<T_b\}})=\frac{(\mathrm{e}^{2\lambda b}-1)\mathrm{e}^{\lambda a}}{\mathrm{e}^{2\lambda b}-\mathrm{e}^{2\lambda a}},$$
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda^2T_b/2}\mathbf{1}_{\{T_b<T_a\}})=\frac{(\mathrm{e}^{2\lambda a}-1)\mathrm{e}^{\lambda b}}{\mathrm{e}^{2\lambda a}-\mathrm{e}^{2\lambda b}}.$$

因此

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda^2(T_a\wedge T_b)/2})=\frac{1+\mathrm{e}^{\lambda(b+a)}}{\mathrm{e}^{\lambda b}+\mathrm{e}^{\lambda a}},$$

也即

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_a\wedge T_b})=\frac{1+\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda}(b+a)}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda}b}+\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda}a}}=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}b}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|a|}}{1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}(b-a)}}. \tag{6.4.6}$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}b}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|a|}}{1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}(b-a)}}&=\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}b}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|a|}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-k\sqrt{2\lambda}(b-a)}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}((2k+1)b-2ka)}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}(2kb-(2k+1)a)}\right]+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|a|}\\
&\quad+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}b}-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}(2kb-(2k-1)a)}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}((2k-1)b-2ka)}\right].\end{aligned}$$

记τ_z的密度函数为$g_z(s)$. 由$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda\tau_z})=\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|z|}$(习题16.5)以及$g_z(s)=g_{-z}(s)$可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}b}+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}|a|}}{1+\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda}(b-a)}}&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda s}(g_b(s)+g_{|a|}(s))\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda s}\sum_{k=1}^{\infty}[g_{2k(b-a)+b}(s)+g_{2k(b-a)+|a|}(s)]\mathrm{d}s\\
&\quad-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda s}\sum_{k=-\infty}^{-1}[g_{2k(b-a)+|a|}(s)+g_{2k(b-a)+b}(s)]\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\tilde{g}_{2k(b-a)+b}(s)+\tilde{g}_{2k(b-a)+|a|}(s)\right]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{g}_z(s) = \begin{cases} g_z(s), & z > 0; \\ -g_z(s), & z < 0. \end{cases} = \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2s}}.$$

因此$\tau_a \wedge \tau_b$的概率密度函数

$$\rho(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[\tilde{g}_{2k(b-a)+b}(s) + \tilde{g}_{2k(b-a)+|a|}(s) \Big],$$

从而所求概率

$$p = \int_t^{\infty} \rho(s) \mathrm{d}s = \int_t^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[\tilde{g}_{2k(b-a)+b}(s) + \tilde{g}_{2k(b-a)+|a|}(s) \Big] \mathrm{d}s. \qquad \square$$

练习题

23.1 设W是初值为0的带漂移标准布朗运动, 漂移系数为$\mu > 0$, (1) 对任意$\lambda > 0$, 求$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda \tau_x})$, 其中$x > 0$, $\tau_x = \inf\{t \geq 0, W_t = z\}$; (2) 求$\tau_x$的概率密度函数; (3) 求$\max_{0 \leq s \leq t} W_s$的分布函数.

第七章 马氏性

在第三章我们已经指出所谓马氏性其实是条件独立性, 是指在已知现在的条件下, 过去与未来独立, 并对离散时间离散状态的随机过程给出了马氏性的数学定义。这一章, 我们讨论一般随机过程马氏性的数学刻画.

7.1 马氏性

本节我们总设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为某概率空间, $X=\{X(s),s\in T\}$为该概率空间上随机过程. 参数集$T\subset\mathbb{R}$, 状态空间$S\subset\mathbb{R}$为闭集.

为了刻画马氏性, 首先要给出所谓过去, 现在与未来的数学表示. 对离散时间离散状态的随机过程我们可以通过枚举时间和状态来确定表示过去、未来和现在的事件. 对一般随机过程, 枚举法可能有困难. 一种转换是我们可以把过去、现在和未来的事件看作某种信息. 那么随着时间流逝, 信息会增加, 将所有信息收集在一起, 随时间变化就会得到所谓信息流; 该信息流中包含了我们所观察到的和所关心的随机现象. 因此数学上可将该信息流用一簇不降的σ- 代数流表示. 设$\{\mathcal{F}_s,s\in T\}$ 是一簇不降的σ- 代数流表示, 即对任意$s<t\in T$, $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$. 任取一个时刻点$s$, 把它看作现在, σ-代数$\mathcal{F}_s$表示现在及此前所有可能观察到的信息(过去)而$X(s)$ 的值则表示现在的状态, $\{X(t)\in B\}$表示未来某个时刻t 可能发生的随机事件. 在此设置下, 我们定义马氏性如下:

定义24.1 设随机过程$X=\{X(s),s\in T\}$关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_s,s\in T\}$是适应的, 若对任意$s<t\in T$, $B\in\mathcal{B}(S)$,

$$\mathbb{P}(X(t)\in B|\mathcal{F}_s)=\mathbb{P}(X(t)\in B|X(s)), \tag{7.1.1}$$

则称$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},X,\{\mathcal{F}_t\})$是一个马氏过程, 或称$(X,\{\mathcal{F}_t\})$为$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上(以$\{\mathcal{F}_t\}$ 为参考σ-代数) 的马氏过程. 称(7.1.1)为马氏性. 特别, 若$\mathcal{F}_t=\sigma\{X(s),s\leq t\}$, $t\in T$, 则简称X是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上马氏过程.

下面我们研究马氏过程(马氏性)的定义的等价形式以方便我们判断与应用.

定理24.1 X是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上马氏过程当且仅当对任意$B\in\mathcal{B}(S)$, $n\geq 1$及$t_1<t_2<\cdots<t_n<t\in T$,

$$\mathbb{P}(X(t)\in B|X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))=\mathbb{P}(X(t)\in B|X(t_n)). \qquad (7.1.2)$$

证明 由$\sigma\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}\subset\mathcal{F}_{t_n}$及条件期望定义可知(7.1.1)⇒(7.1.2).

下面我们证明(7.1.2)⇒(7.1.1). 为此, 对任意$s\in T$, $B\in\mathcal{B}(S)$, 令

$$\mathcal{A}=\{O\in\mathcal{F}_s,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X(t)\in B\}}\mathbf{1}_O)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X(t)\in B\}}|X(s))\mathbf{1}_O)\}.$$

显然

(1) 由于$\Omega\in\sigma\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}$以及(7.1.2), $\Omega\in\mathcal{A}$;

(2) 若$A,B\in\mathcal{A}$且$A\subset B$, 由$\mathcal{A}$定义及数学期望的线性性质, 显然有$B\setminus A\in\mathcal{A}$;

(3) 若$A_n\in\mathcal{A}$且$A_n\uparrow A$, 由$\mathcal{A}$定义及单调收敛定理

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X(t)\in B\}}\mathbf{1}_A)&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X(t)\in B\}}\mathbf{1}_{A_n})\\&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X(t)\in B\}}|X(s))\mathbf{1}_{A_n})\\&=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X(t)\in B\}}|X(s))\mathbf{1}_A),\end{aligned}$$

因此$A\in\mathcal{A}$.

上述三条性质表明$\mathcal{A}$是一个λ-系集合类.

再令

$$\mathcal{D}=\{O\in\sigma\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\},t_1<\cdots<t_n=s\in T,n\geq 1\}.$$

对任意$O_1,O_2\in\mathcal{D}$, 存在$t_1'<\cdots<t_k'=s$以及$t_1''<\cdots<t_l''=s$使得

$$O_1\in\sigma\{X(t_1'),\cdots,X(t_k')\},\quad O_2\in\sigma\{X(t_1''),\cdots,X(t_l'')\},$$

因而

$$O_1\cap O_2\in\sigma\{X(t_1'),\cdots,X(t_k'),X(t_1''),\cdots,X(t_l'')\}\subset\mathcal{D}.$$

这表明$\mathcal{D}$是一个π-系集合类.

由于从(7.1.2)可知$\mathcal{D}\subset\mathcal{A}$, 由定理19.1

$$\mathcal{F}_s\subset\sigma\{D\}\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{F}_s,$$

即$\mathcal{A}=\mathcal{F}_s$. 因此(7.1.1)成立.

定理24.2 下列条件等价

(A) X是$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上马氏过程;

(B) 对一切$s < t \in T$及$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$上有界可测函数$f$,

$$\mathbb{E}(f(X(t))|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X(t))|X(s)); \tag{7.1.3}$$

(C) 令$\mathcal{F}^s = \sigma\{X(t), t \geq s\}$(未来事件$\sigma$-代数), 对任意$(\Omega, \mathcal{F}^s)$上有界可测函数$g$,

$$\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(g|X(s)); \tag{7.1.4}$$

(D) 对任意有界函数$f \in \mathcal{F}_s, g \in \mathcal{F}^s$,

$$\mathbb{E}(fg|X_s) = \mathbb{E}(f|X(s))\mathbb{E}(g|X(s)); \tag{7.1.5}$$

证明 显然$(C) \Rightarrow (B) \Rightarrow (A)$成立. 下证$(B) \Rightarrow (C)$($(A) \Rightarrow (B)$更简单,请读者自己完成). 为此, 令

$$\mathcal{H} = \{g \in \mathcal{F}^s; g\text{有界且使得(7.1.4)成立}\},$$

$$\mathcal{D} = \Big\{\{X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \cdots, X(t_n) \in A_n\};$$
$$A_k \in \mathcal{B}(S), t_k \geq s, k = 1, 2, \cdots, n, n \geq 1\Big\}.$$

容易验证$\mathcal{H}$构成一个线性空间. 而且

(1) 对常值函数$f \equiv 1$, 显然$f \in \mathcal{F}^s$且(2.1.4)成立, 因此$f \in \mathcal{H}$

(2) 显然$\mathcal{D} \subset \mathcal{F}^s$, 容易验证$\mathcal{D}$为$\pi$-系集合类且$\sigma\{D\} = \mathcal{F}^s$. 任取$A \in \mathcal{D}$, 存在$s \leq t_1 < \cdots < t_n$以及$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(S)$使得

$$\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A_1}(X(t_1)) \cdots \mathbf{1}_{A_n}(X(t_n)).$$

当$n = 1$时由(7.1.3)可知$\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$.

设$n = k-1$时$\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$, 即对任意$s \leq t_1 < \cdots < t_{k-1}$以及$A_1, \cdots, A_{k-1} \in \mathcal{B}(S)$, 若$\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A_1}(X(t_1)) \cdots \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X(t_{k-1}))$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1)) \cdots \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X(t_{k-1}))|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1)) \cdots \mathbf{1}_{A_{k-1}}(X(t_{k-1}))|X_s).\end{aligned}$$

当$n = k$时, 由假设及(7.1.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1)) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1))\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_2}(X(t_2)) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|\mathcal{F}_{t_1})|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1))\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_2}(X(t_2)) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|X_{t_1})|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1))\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_2}(X(t_2)) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|X_{t_1})|X(s)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1))\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_2}(X(t_2)) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|\mathcal{F}_{t_1}))|X(s)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1))\mathbf{1}_{A_2}(X(t_2)) \cdots \mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|\mathcal{F}_{t_1}))|X(s))\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}(X(t_1))\mathbf{1}_{A_2}(X(t_2))\cdots\mathbf{1}_{A_k}(X(t_k))|X(s)) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|X(s)).$$

即$n=k$时$\mathbf{1}_A\in\mathcal{H}$仍成立. 由数学归纳法原理可知, 对任意$A\in\mathcal{D}$, $\mathbf{1}_A\in\mathcal{H}$.

(3) 若$f_n\in\mathcal{H}$, $0\le f_n\uparrow f$且f有界, 对任意$O\in\mathcal{F}_s$, 由单调收敛定理

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f\mathbf{1}_O) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(f_n\mathbf{1}_O) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(f_n|X(s))\mathbf{1}_O)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|X(s))\mathbf{1}_O)),\end{aligned}$$

因此$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}(f|X(s))$, 即$f\in\mathcal{H}$.

综合以上事实, 由定理19.2可知, $\mathcal{H}$包含所有$\mathcal{F}^s$可测的有界函数, 即(7.1.4)从而(C)成立.

最后,我们证明(C)⇔(D).

首先由(C)可得对任意$f\in\mathcal{F}_s, g\in\mathcal{F}^s$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(fg|X(s)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(fg|\mathcal{F}_s)|X(s)) = \mathbb{E}(f\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_s)|X(s))\\ &= \mathbb{E}(f\mathbb{E}(g|X(s))|X(s)) = \mathbb{E}(g|X(s))\mathbb{E}(f|X(s)).\end{aligned}$$

即(D)成立. 反过来，由(D)成立, 对任意$O\in\mathcal{F}_s$以及$g\in\mathcal{F}^s$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g\mathbf{1}_O) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(g\mathbf{1}_O|X(s))) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g|X(s))\mathbb{E}(\mathbf{1}_O|X(s)))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_O\mathbb{E}(g|X(s))|X(s))) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_O\mathbb{E}(g|X(s))).\end{aligned}$$

这表明$\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}(g|X(s))$, 即(C)成立. □

(B) 转移概率函数簇

对任意$s<t\in T, x\in S, B\in\mathcal{B}(S)$, 由条件数学期望定义, $\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|X(s))$只是对几乎所有的$X(s)$取值有意义,而且$B$不同,使条件期望无意义的例外集也可能不同. 但在适当条件下(比如本文设定: $S\subset\mathbb{R}$ 为闭集), 由正则条件分布的存在性可知, 存在该条件期望的一种形式, 记作$P(s,x;t,B)$, 即

$$P(s,x;t,B) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|X(s))|_{X(s)=x} =: \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|X(s)=x).$$

使得如下条件成立

(A1) 对任意给定$s<t\in T, x\in S$, $P(s,x;t,\cdot)$是$(S,\mathcal{B}(S))$上一个概率测度;

(A2) 对任意给定$s<t\in T, B\in\mathcal{B}(S)$, $P(s,\cdot;t,B)$是$(S,\mathcal{B}(S))$上一个可测函数.

一般地, 我们称$P(s,x;t,B)$为转移概率(函数), 它刻画了过程X将s时刻的状态x迁移使其在t时刻落入B中的概率.

注24.3 当$s=t$时, 由$P(s,x;t,B)$表示可知$P(s,x;t,B)=\mathbf{1}_B(x)$.

命题24.4 满足如上条件的函数簇$\{P(s,x;t,B) s<t\in T, x\in S, B\in\mathcal{B}(S)\}$满足

如下的C-K方程: 对任意$s \le r \le t \in T$

$$P(s,x;t,B) = \int_S P(s,x;r,dy)P(r,y;t,B).$$

证明 利用定理20.1容易证明对任意$(S,\mathcal{B}(S))$上有界可测函数f

$$\mathbb{E}(f(X(r))|X(s)=x) = \int_S f(y)P(s,x;r,dy).$$

因此

$$\begin{aligned} P(s,x;t,B) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|X(s)=x) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|\mathcal{F}_r)|X(s)=x) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|X(r))|X(s)=x) = \mathbb{E}(P(r,\cdot;t,B)|X(s)=x) \\ &= \int_S P(s,x;r,dy)P(r,y;t,B). \end{aligned}$$

命题24.5 对任意$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$, 记$X(t_1)$的分布为$P_{t_1}(\cdot)$. 那么对任意$B \in \mathcal{B}(S^n)$, X的有限维分布

$$\begin{aligned} P((X(t_1),\cdots,X(t_n)) \in B) = &\int_S P_{t_1}(dy_1)\int_S P(t_1,y_1;t_2,dy_2)\int\cdots \\ &\times \int_S P(t_{n-1},y_{n-1};t_n,dy_n)\mathbf{1}_B(y_1,\cdots,y_n). \end{aligned}$$

证明 先用C-K方程证明命题结论对$\mathcal{B}(S)\times\mathcal{B}(S)\times\cdots\times\mathcal{B}(S)$内所有集合成立, 然后再用测度论基本方法将结论过渡到所有$\mathcal{B}(S^n)$的集合. 具体细节请同学自己补充.

注24.6 若参数T中最小元素为t_0, 那么$X(t_0)$的分布称为过程X的初始分布, $X(t_0)$的取值称为过程的初始值.

定义24.42 称满足条件(A1),A(2)与C-K方程的函数族

$$\{P(s,x;t,B) s \le t \in T, x \in S, B \in \mathcal{B}(S)\}$$

为一个转移概率簇, 也称为转移函数簇.

定理24.7 给定一个转移概率簇$\{P(s,x;t,B) s \le t \in T, x \in S, B \in \mathcal{B}(S)\}$, 记$T$中最小元素为$u$, 则可构造一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$及其上一个马氏过程$X = X(t), t \in T$使得

$$P(s,x;t,B) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X(t))|X(s))|_{X(s)=x} = \mathbb{P}(X(t) \in B|X(s)=x).$$

证明 为了使用Kolmogorov定理, 我们先利用转移概率簇构造一簇满足对称性和相容性的有限维分布簇函数. 为此任取S上一个概率分布记作$P_u(dy)$. 对任意

$$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T \text{ 以及 } x_{t_1}, \cdots, x_{t_n} \in \mathbb{R},$$

将$t_1,\cdots,t_n$按次序重排后记作$t'_1,\cdots,t'_n$满足$t'_1<t'_2<\cdots<t'_n$, 定义

$$\begin{aligned}F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})=&\int_S P_u(dy)\int_{S_{t'_1}}P(u,y;t'_1,dy_1)\int_{S_{t'_2}}\cdots\\&\times\int_{S_{t'_n}}P(t'_{n-1},y_{n-1};t'_n,dy_n),\end{aligned}$$

其中$S_{t'_i}=S\cap(-\infty,x_{t'_i}]$, $i=1,2,\cdots,n$. 由F的构造与C-K 方程,容易验证

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

为一簇满足对称性和相容性的概率分布函数. 因此由Kolmogorov定理, 存在概率空间$(\Omega,\mathcal{F})$, 其中

$$\Omega=S^T=\{(\omega_t;t\in T);\omega_t\in S\},$$

$$\mathcal{F}=\sigma\Big\{\{(\omega_t,t\in T);(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})\in B\};B\subset\mathcal{B}(S^n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\Big\}.$$

使得$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上随机过程$X=\{X(t),t\in T\}$, 其中

$$X(t,\omega)=\omega_t,$$

在概率$\mathbb{P}$下的有限维分布簇恰好是

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n);t_1,\cdots,t_n\in T,k\geq 1\}.$$

任取$t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}\in T$, $B\in\mathcal{B}(S)$以及$O\in\mathcal{B}(S^n)$, 由X的有限维分布表示可知,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X(t_{n+1})\in B,(X(t_1),\cdots,X(t_n))\in O)\\&=\int_S P_u(dy)\int_S P(u,y;t_1,dy_1)\int_S\cdots\\&\quad\times\int_S P(t_n,y_n;t_{n+1},dy_{n+1})\mathbf{1}_O(y_1,\cdots,y_n)\mathbf{1}_B(y_{n+1})\\&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_O(X(t_1),\cdots,X_{t_n})P(t_n,X_n;t_{n+1},B))\end{aligned}$$

这表明

$$\mathbb{P}(X(t_{n+1})\in B|X(t_1),\cdots,X(t_n))=P(t_n,X(t_n);t_{n+1},B)$$

以及

$$\mathbb{P}(X(t_{n+1})\in B|X(t_n))=P(t_n,X(t_n);t_{n+1},B).$$

因此(7.1.2)成立, 从而X为马氏过程且转移函数簇就是给定的$P(s,x;t,B)$.

定义24.3 称马氏过程X是时间齐次的(时齐的), 若存在一个$T\times S\times\mathcal{B}(S)$上三元函数$P(\cdot,\cdot,\cdot)$使得, 对任意$s\leq t\in T$, $x\in S$, $B\in\mathcal{B}(S)$,

$$\mathbb{P}(X(t)\in B|X(s)=x)=P(t-s,x,B),$$

即转移概率$P(s,x;t,B)$与增加量$t-s$有关而与s,t的具体值无关.

注24.8 上面的讨论表明给定一个马氏过程, 则可以得到一个转移概率簇, 而且该马氏过程的有限维分布就由该转移概率簇和该过程的初始分布确定, 反过来给定一个转移概率簇，则可构造马氏过程与之对应. 这表明对马氏过程统计性质的研究本质上就是对转移概率函数族的研究. 这种联系从一定角度说明马氏过程与泛函分析理论的关联, 而时齐性则从一个角度简化了转移概率簇的复杂程度.

例24.1 验证布朗运动$B=\{B_t,t\geq 0\}$是马氏过程, 并求其转移概率函数.

证明 由定理24.1, 只需验证对任意$n\geq 1$及$t_1<t_2<\cdots<t_n<t\in T$ 以及任意$B\in\mathcal{B}(R)$),

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(B_t)|B_{t_n},B_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_1})=\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(B_t)|B_{t_n}).$$

由随机变量条件数学期望定义, 这等价于验证对任意$x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(B_t)|B_{t_n}=x_n,\cdots,B_{t_1}=x_1)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(B_t)|B_{t_n}=x_n). \tag{7.1.6}$$

记$(B_{t_1},\cdots,B_{t_n},B_t)$的联合密度函数为$\rho(x_1,\cdots,x_n,x)$, 由定理15.3可知

$$(7.1.6)\text{左边}=\frac{\int_B\rho(x_1,\cdots,x_n,x)\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}}\rho(x_1,\cdots,x_n,x)\mathrm{d}x}=\int_B f(x-x_n,t-t_n)\mathrm{d}x=(7.1.6)\text{右边}.$$

因此布朗运动B是马氏过程. 此时对任意$s<t$, $x\in\mathbb{R}$, $B\in\mathcal{B}(R)$, 转移概率函数

$$\begin{aligned}P(s,x,t,B)&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(B_s)|B_t=x)=\int_B f(y-x,s-t)\mathrm{d}y\\&=\int_B\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(s-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(s-t)}}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由此易知, 转移概率函数是时齐的, 因此布朗运动是时齐的马氏过程. □

注24.9 布朗运动的任意转移概率函数$P(s,x,t,B$, 都存在函数$p(s,x,t,y)$使得

$$P(s,x,t,B)=\int_B p(s,x,t,y)\mathrm{d}y.$$

我们常把满足这种条件的四元函数$p(s,x,t,y)$称作转移概率密度函数.

练习题

24.1 证明泊松过程为连续时间马氏过程.

7.2 强马氏性

在上一节我们定义的马氏性中代表现在的时间是非随机的. 然而, 在讨论实际问题时所谓的“现在”常常不是确定的, 是随机的. 此时如果马氏性仍成立, 我们称这样的性质是强马氏性. 本节将简要介绍强马氏性的定义和性质.

(A) 强马氏性定义

设$X = \{X(s), s \geq 0\}$为关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$的时齐马氏过程, 状态空间$S \subset \mathbb{R}$, 转移概率族为$\{\mathbb{P}(t, x, B), x \in S, B \in \mathcal{B}(S)\}$.

定义25.1 称时齐马氏过程X是Feller过程, 若对任意$t > 0$以及任意S上有界连续函数h,

$$\mathbb{E}(h(X(t))|X(0) = \cdot) = \int_S h(y)\mathbb{P}(t, \cdot, dy)$$

仍是S上有界连续函数.

定义25.2 称时齐马氏过程X具有强马氏性(是强马氏过程), 如果对任意停时τ以及任意有界可测函数g,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X(\tau+t))\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_\tau) &= \mathbb{E}(g(X(t))|X(0) = X(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \\ &= \int_S g(y)\mathbb{P}(t, X(\tau), dy)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}, \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

定理25.1 轨道右连续的Feller过程是强马氏过程.

证明 任取一停时τ. 注意到$n \to \infty$时

$$\mathbb{E}(g(X(\tau+t))\mathbf{1}_{\{\tau<n\}}|\mathcal{F}_\tau) \stackrel{L^1}{\to} \mathbb{E}(g(X(\tau+t))\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathcal{F}_\tau)$$

$$\mathbb{E}(g(X(t))|X(0) = X(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau<n\}} \stackrel{a.s}{\to} \mathbb{E}(g(X(t))|X(0) = X(\tau))\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}$$

因此只需在τ有界条件下证明强马氏性成立. 以下设τ有界.

先考虑τ取有限个值$t_1, \cdots, t_k$得情形. 此时对任一有界可测函数g, 以及任意可测集$A \in \mathcal{F}_\tau$以及$t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X_{\tau+t})\mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}(g(X_{\tau+t})\sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=t_i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(g(X_{\tau+t})\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=t_i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X_t)|X(0) = X_{t_i})\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=t_i\}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X_t)|X(0) = X_\tau)\mathbf{1}_{A\cap\{\tau=t_i\}}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X_t)|X(0) = X_\tau)\mathbf{1}_A).\end{aligned}$$

这表明当T是只取有限个值得停时时总有

$$\mathbb{E}(g(X(\tau+t))|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(g(X(t))|X(0) = X(\tau)).$$

下面考虑一般的停时. 此时由定理25.2可知存在一列只取有限多值的有界停时列τ_n使得τ_n单调下降地收敛到τ. 任取一个有界连续函数h以及任意可测集$A \in \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$, 由前述结论可知, 对任意$n$

$$\mathbb{E}(h(X(\tau_n+t))\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(h(X(t))|X(0) = X(\tau_n))\mathbf{1}_A).$$

由Feller性及右连续性可知

$$\mathbb{E}(h(X(\tau+t))\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(h(X(t))|X(0) = X(\tau))\mathbf{1}_A).$$

即对任意有界连续函数f可得

$$\mathbb{E}(h(X(\tau+t))|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(h(X(t))|X(0) = X(\tau)).$$

注意到任意有界可测函数总可由一列一致有界连续函数收敛得到, 由控制收敛定理可得定理结论. □

类似于定理25.1的证明，我们还可得如下推论, 具体证明过程请读者补充.

推论25.2 轨道右连续的Feller过程关于$\{\mathcal{F}_{t+}\}$仍是马氏过程, 从而关于$\{\mathcal{F}_{t+}\}$也是强马氏过程.

定理25.3 (Blumenthal $0-1$律) 设X是轨道右连续的Feller过程, 若$A \in \mathcal{F}_{0+}$, 则

$$\mathbb{P}_x(A) = 0 \text{ 或 } 1.$$

证明 由推论25.2可知X关于$\{\mathcal{F}_{t+}\}$仍是马氏过程. 任取$A \in \mathcal{F}_{0+}$,

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|X_0 = x) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_{0+}) = \mathbf{1}_A.$$

由于$\mathbb{P}_x(A)$为非随机的, 所以它只能是0或1, 从而$\mathbf{1}_A = 0$, a.s. 或$\mathbf{1}_A = 1$, a.s. □

(B) 布朗运动与强马氏性

命题25.4 标准布朗运动$B = \{B(t), t \geq 0\}$是轨道连续的Feller 过程.

证明 注意到对任意有界可测函数g以及$t > 0$

$$\mathbb{E}(g(B(t))|B(0) = x) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}dy$$

关于x为有界连续函数, 因此B是Feller过程. □

性质25.5 设B是标准布朗运动, 令

$$A^+=\{\omega;\text{存在}\delta>0\text{使得}B_t(\omega)>0\text{对任意}0<t<\delta\text{成立}\},$$

$$A^-=\{\omega;\text{存在}\delta>0\text{使得}B_t(\omega)<0\text{对任意}0<t<\delta\text{成立}\},$$

$$A=\{\omega;\text{对任意}\delta>0,\ B_t(\omega)\text{在}(0,\delta)\text{内有零点}\}.$$

则$\mathbb{P}_0(A^+)=\mathbb{P}_0(A^-)=0$, $\mathbb{P}_0(A)=1$.

证明 任取$0<\delta_n\to 0$, 由定义

$$A^+=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{\omega B_t(\omega)>0\text{对任意}0<t<\delta_n\text{成立}\}.$$

因此$A^+\in\mathcal{F}_{0+}$. 又由于

$$\mathbb{P}_0(A^+)\le\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_0(B_{\delta_n}>0)=\frac{1}{2}<1,$$

由定理25.3, 命题25.4得$\mathbb{P}_0(A^+)=0$. 同理$\mathbb{P}_0(A^-)=0$. 进而$\mathbb{P}_0(A)=1$. □

定理25.6 设$B=\{B(t),t\ge 0\}$为标准布朗运动, τ为$\mathcal{F}_t=\sigma\{B(u),u\le t\}$停时. 在$\{\tau<\infty\}$条件下,$\tilde{B}=\{\tilde{B}_t,t\ge 0\}$仍为标准布朗运动且与$\mathcal{F}_\tau$ 独立, 其中$\tilde{B}_t=B(\tau+t)-B(\tau)$.

证明 只需证明在$\{\tau<\infty\}$条件下, $\tilde{B}$的有限维分布与B相同且与$\mathcal{F}_\tau$独立. 为此, 记事件A下的条件概率为$\mathbb{P}_A$,数学期望为$\mathbb{E}_A$, 则对任意可测集合G和可测函数g,

$$\mathbb{P}_A(G)=\frac{\mathbb{P}(AG)}{\mathbb{P}(A)},\qquad \mathbb{E}_A(g)=\frac{\mathbb{E}(g\mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

进一步,若$A\in\mathcal{F}_\tau$,可证明(请同学补充)

$$\mathbb{E}_A(g|\mathcal{F}_\tau)=\mathbb{E}(g\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\tau),\qquad \text{a.s. w.r.t }\ \mathbb{P}_A.$$

因此, 利用标准布朗运动的强马氏性, 我们可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\{\tau<\infty\}}(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_k\tilde{B}_{t_k}}|\mathcal{F}_\tau)&=\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_k\tilde{B}_{t_k}}|\mathcal{F}_\tau)\\&=\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{E}_x(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_k(B(t_k)-x)})|_{x=B(\tau)}\\&=\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_kB(t_k)}).\end{aligned}$$

注意到最后一个表达式为常值变量, 这表明在$\{\tau<\infty\}$条件下, $\tilde{B}$与$\mathcal{F}_\tau$独立. 进一步由

$$\mathbb{E}_{\{\tau<\infty\}}(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_k\tilde{B}_{t_k}})=\mathbb{E}_{\{\tau<\infty\}}(\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_kB(t_k)}))=\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{i\sum_k\lambda_kB(t_k)})$$

可知, 在$\{\tau<\infty\}$条件下, $\tilde{B}$的有限维分布与标准布朗运动相同. 显然$\tilde{B}$轨道连续, 从而在$\{\tau<\infty\}$条件下也是标准布朗运动. □

定理25.7 (反射原理) 设$B=\{B(t),t\ge 0\}$为标准布朗运动, $\mathcal{F}_t=\sigma\{B(u),u\le t\}$,

τ为停时. 令

$$\breve{B}_t(\omega) = \begin{cases} B_t(\omega), & t < \tau(\omega); \\ 2B_\tau(\omega) - B_t(\omega), & t \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

则(1) $\breve{B} = \{\breve{B}_t, t \geq 0\}$为标准布朗运动; (2)$(\breve{B}, \tau)$与$(B, \tau)$同分布.

证明 容易看出

$$B_t + \breve{B}_t = 2B_{t\wedge\tau}$$

$$B_t - \breve{B}_t = 2(B_t - B_{t\wedge\tau})$$

则

$$B_t = B_{t\wedge\tau} + (B_t - B_{t\wedge\tau}) = B_{t\wedge\tau} + \tilde{B}_{t-\tau}\mathbf{1}_{\{t>\tau\}}$$

$$\breve{B}_t = B_{t\wedge\tau} - (B_t - B_{t\wedge\tau}) = B_{t\wedge\tau} - \tilde{B}_{t-\tau}\mathbf{1}_{\{t>\tau\}},$$

其中$\tilde{B}_t = (B_{t+\tau} - B_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}$. 由定理25.6 可知$\tilde{B}$为标准布朗运动且与$\mathcal{F}_\tau$独立, 进而与$B_{t\wedge\tau}$独立. 注意到$\tilde{B}$与$-\tilde{B}$同分布, 且$B_t$与$\breve{B}_t$ 分别为三元组

$$(B_{\cdot\wedge\tau}, \tau, \tilde{B}), \quad (B_{\cdot\wedge\tau}, \tau, -\tilde{B})$$

的相同函数, 故B与$\breve{B}$同分布. 同理$(\breve{B}, \tau)$与(B, τ)同分布. □

练习题

25.1 证明: 任意离散时间的时齐马氏链都是强马氏过程.

第八章　Ito积分与扩散过程*

第6章我们简要地提及了一些与Brown运动有关的特殊积分. 这一章将进一步介绍这方面的理论. 本章内容需要较系统的测度论知识.

8.1　Ito 积分

给定概率空间$(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$以及单调不降的子$\sigma$-代数流$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. $B = \{B_t, t \geq 0\}$是$(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ 上标准布朗运动且对$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$适应, 而且对任意$t \geq s$, $B_t - B_s$关于$\mathcal{F}_s$独立, 即对任意$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(B_{t-s} \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} \mathrm{d}y.$$

此时我们也称B_t为关于σ-代数流$\{\mathcal{F}_t\}$的Wiener过程.

(A) 基本函数的积分

对任意$0 \leq S < T \leq \infty$, 令

$$\mathfrak{A}_0(S,T) = \Big\{\phi\text{有界, 对任意}t \geq 0, \phi(t,\cdot) \in \mathcal{F}_t\text{且存在}n \geq 1\text{以及}$$
$$0 = t_0 < \cdots < t_n\text{使得}\phi = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(t_k, \omega) \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)\Big\}.$$

通常称$\mathfrak{A}_0(S,T)$中的函数为基本函数(elementary), 显然基本函数都是循序可测的.

任取$\phi \in \mathfrak{A}_0(S,T)$, 不妨设$S = t_k < t_{k+1} < t_n < T = t_{n+1}$, 仿Riemann 积分可定义

$$\int_S^T \phi(u,\omega) \mathrm{d}B_u = \sum_{i=k}^{n} \phi(t_i, \omega)\big(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\big). \tag{8.1.1}$$

引理26.1(Ito等距公式) 若$\phi \in \mathfrak{A}_0(S,T)$, 那么

$$\mathbb{E}\Big[(\int_S^T \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_S^T \phi^2(u,\omega)\mathrm{d}u\Big].$$

证明 记$\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$, 容易验证

$$\mathbb{E}(\phi(t_i)\phi(t_j)\Delta B_i \Delta B_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \mathbb{E}(\phi^2(t_j))(t_{j+1} - t_j), & i = j. \end{cases}$$

因此由定义式(8.1.1)

$$\mathbb{E}\Big[(\int_S^T \phi(t,\omega)\mathrm{d}B_t)^2\Big] = \sum_{k \le j \le n} \mathbb{E}(\phi^2(t_j))(t_{j+1} - t_j) = \mathbb{E}\Big[\int_S^T \phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t\Big]. \qquad \square$$

进一步, 对任意$t \in [S,T]$, $\phi \in \mathfrak{A}_0(S,T)$, 按定义式(8.1.1), 可记

$$\eta(t,\omega) = \int_S^t \phi(u,\omega) dB_u.$$

性质26.2 若$\phi, \psi \in \mathfrak{A}_0(S,T)$, 那么

(1) 对任意$a(\omega), b(\omega) \in \mathcal{F}_S$, $t \in [S,T]$,

$$\begin{aligned}&\int_S^t [a(\omega)\phi(u,\omega) + b(\omega)\psi(u,\omega)]\mathrm{d}B_u \\ &\quad = a(\omega)\int_S^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u + b(\omega)\int_S^t \psi(u,\omega)]\mathrm{d}B_u,\end{aligned}$$

(2) 对任意$S \le s < t \le T$

$$\int_S^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u = \int_S^s \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u + \int_s^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u,$$

(3) 对几乎所有ω, $\eta(t,\omega)$在$[S,T]$上连续;

(4) $\{\eta(t,\omega), \mathcal{F}_t\}$循序可测;

(5) $\{\eta(t,\omega), \mathcal{F}_t\}_{t\in[S,T]}$是鞅.

证明 只证明(4)和(5), 其他由定义式(8.1.1)容易得到，请同学自己补充.

(4) 注意到对任意$t \in [S,T]$,

$$\eta(t,\omega) = \sum_{i=k}^{n} \phi(t_i \wedge t, \omega)\big(B_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - B_{t_i \wedge t}(\omega)\big).$$

显然$\phi(t_i \wedge \cdot, \cdot)$, $B_{t_{i+1}\wedge \cdot}(\cdot) - B_{t_i \wedge \cdot}(\cdot)$都循序可测, 因此$\eta(\cdot,\cdot)$ 循序可测.

(5) 显然对任意t, $\eta(t,\omega)$平方可积且关于$\{\mathcal{F}_s\}$适应. 对任意$S \le s < t \le T$,

$$\mathbb{E}(\eta(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\eta(s) + \int_s^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u|\mathcal{F}_s)$$

与定义式(8.1.1)类似, 不失一般性可设$s = t_k < t_{k+1} < \cdots < t_{m+1} = t$,

$$\int_s^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u = \sum_{i=k}^{m} \phi(t_i,\omega)\big(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\big),$$

因此由$B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$与$\mathcal{F}_{t_i}$独立, $\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0$以及$\phi(t_i) \in \mathcal{F}_{t_i}$可知

$$\mathbb{E}(\int_s^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u|\mathcal{F}_s) = 0.$$

所以$\mathbb{E}(\eta(t)|\mathcal{F}_s) = \eta(s)$, 即$\{\eta(t,\omega), \mathcal{F}_t\}_{t\in[S,T]}$是鞅.

(B) Ito 积分

为了扩大积分(8.1.1)的适用性, 我们考虑如下形式的函数集合

$$\mathfrak{A}(S,T)=\Big\{\phi(s,\omega);(s,\omega)\in\mathbb{R}^+\times\Omega,\phi\text{关于}\{\mathcal{F}_s\}\text{循序}$$
$$\text{可测且}\mathbb{E}(\int_S^T\phi^2(s,\omega)\mathrm{d}s)<\infty\Big\},$$

其中$\int\cdot\mathrm{d}s$表示Lebesgue积分(以后都按此理解). 对任意$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$, 如下引理成立.

引理26.3 对任意$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$, 存在一列$\phi_n\in\mathfrak{A}_0(S,T)$使得$n\to\infty$时

$$\mathbb{E}\Big(\int_S^T|\phi_n(s,\omega)-\phi(s,\omega)|^2\mathrm{d}s\Big)\to 0.$$

证明 只证明$S=0,T=\infty$的情形. 其他情况更简单, 此略.

不妨设ϕ有界, 否则由$\phi\in\mathfrak{A}(0,\infty)$可知,

$$\mathbb{E}\Big(\int_S^T|\phi(s,\omega)\mathbf{1}_{\{|\phi|\le n\}}-\phi(s,\omega)|^2\mathrm{d}s\Big)\to 0.$$

因此可用$\phi(s,\omega)\mathbf{1}_{\{|\phi|\le n\}}$逼近$\phi(s,\omega)$.

(1)若$\phi(t,\omega)$对t连续, 令

$$\phi_n(t,\omega)=\begin{cases}n\int_{(j-1)/n}^{j/n}\phi(u,\omega)\mathrm{d}u, & \frac{j}{n}\le t<\frac{j+1}{n},1\le j\le n^2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然ϕ_n是循序可测的. 由Cauchy-Schwarz不等式

$$\int_{j/n}^{(j+1)/n}|\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t=n\Big|\int_{(j-1)/n}^{j/n}\phi(u,\omega)\mathrm{d}u\Big|^2\le\int_{(j-1)/n}^{j/n}|\phi(u,\omega)|^2\mathrm{d}u,\quad(8.1.2)$$

从而

$$\int_T^\infty|\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t\le\int_{T-2/n}^\infty\phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty|\phi(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t\\&=\int_0^L|\phi(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t+\int_L^\infty|\phi(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t\\&\le\int_0^L|\phi(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t+4\int_{L-2/n}^\infty\phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

注意到ϕ连续且有界, 因而当$n\to\infty$时由控制收敛定理, 上式第一项收敛到0. 再由$\phi\in\mathfrak{A}(0,\infty)$可知, $\int_0^\infty\phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t$几乎处处有限, 因此当$L\to\infty$ 时，上式第二项几乎处处收敛到0. 综上可知

$$\int_0^\infty|\phi(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t\to 0,\qquad\text{a.s. w.r.t }\omega$$

再由(8.1.2)易知
$$\int_0^\infty |\phi(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)|^2\mathrm{d}t \le 4\int_0^\infty \phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t,$$
结合控制收敛定理得
$$\mathbb{E}\Big(\int_S^T |\phi_n(s,\omega)-\phi(s,\omega)|^2\mathrm{d}s\Big) \to 0.$$
即当$\phi(t,\omega)$对t连续时结论成立.

(2) 若ϕ不连续, 令
$$\tilde\phi_n(t,\omega) = \begin{cases} n\int_0^{1/n}\phi(t-u,\omega)\mathrm{d}u, & t\ge 1/n \\ n\int_0^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}u, & t<1/n. \end{cases}$$
由ϕ有界和循序可测性可得, $\tilde\phi_n(t,\omega)$有界且循序可测. 注意到对任意$1/n\le s<t$,
$$\begin{aligned} |\tilde\phi_n(t,\omega)-\tilde\phi_n(s,\omega)| &= n\Big|\int_0^{1/n}\phi(t-u,\omega)\mathrm{d}u - \int_0^{1/n}\phi(s-u,\omega)\mathrm{d}u\Big| \\ &= n\Big|\int_{-(t-s)}^{1/n-(t-s)}\phi(s-u,\omega)\mathrm{d}u - \int_0^{1/n}\phi(s-u,\omega)\mathrm{d}u\Big| \\ &\le 2nM(t-s), \end{aligned}$$
其中M为$|\phi|$的上界. 由此容易看出$\tilde\phi_n(t,\omega)$关于t连续. 进一步, 由Cauchy-Schwarz不等式与Fubini定理
$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\phi(t)-\tilde\phi_n(t)|^2\mathrm{d}t &= \int_{1/n}^\infty \Big|n\int_0^{1/n}[\phi(t)-\phi(t-s)]\mathrm{d}s\Big|^2 + 4\int_0^{1/n}\phi^2(t)\mathrm{d}t \\ &\le n\int_0^{1/n}\mathrm{d}s\int_{1/n}^\infty |\phi(t)-\phi(t-s)|^2\mathrm{d}t + 4\int_0^{1/n}\phi^2(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
由于对几乎所有ω, $\phi(\cdot,\omega)$在$[0,\infty)$上平方可积, 由此可知
$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty |\phi(t)-\phi(t-s)|^2\mathrm{d}t \to 0.$$
因此
$$\int_0^\infty |\phi(t)-\tilde\phi_n(t)|^2\mathrm{d}t \to 0, \quad \text{a.s. w.r.t. } \omega \tag{8.1.3}$$
再次由Cauchy-Schwarz不等式与Fubini定理可得,
$$\int_0^\infty \tilde\phi_n^2(t)\mathrm{d}t \le \int_0^\infty \phi^2(t)\mathrm{d}t,$$
因此
$$\int_0^\infty |\phi(t)-\tilde\phi_n(t)|^2\mathrm{d}t \le 6\int_0^\infty \phi^2(t)\mathrm{d}t.$$
由此并结合(8.1.3)与控制收敛定理可得
$$\mathbb{E}\int_0^\infty |\phi(t)-\tilde\phi_n(t)|^2\mathrm{d}t \to 0.$$
此时对$\tilde\phi_n(t)$应用步骤(1)的结果可知ϕ不连续时引理结论成立. □

注26.4 $T<\infty$且$\phi(t,\omega)$关于t连续时$\phi_n(t,\omega)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\phi(t_k,\omega)\mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})}$符合引理要求.

任取$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$, 由引理26.3可知, 存在$\phi_n\in\mathfrak{A}_0(S,T)$使得

$$\mathbb{E}\Big(\int_S^T|\phi(t)-\phi_n(t)|^2\mathrm{d}t\Big)\to 0.$$

对ϕ_n可按(8.1.1)定义积分$\eta_n=\int_S^T\phi_n(u)\mathrm{d}B_u$ 再由Ito等距公式，η_n在Ω上平方(二阶矩)可积且

$$\mathbb{E}|\eta_n-\eta_m|^2=\mathbb{E}\Big(\int_S^T|\phi_n(u)-\phi_m(u)|^2\mathrm{d}u\Big)\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

这表明η_n在L_2意义下收敛到一个平方可积随机变量,记作$\eta(\omega)$, 使得当$n\to\infty$时

$$\mathbb{E}|\eta_n-\eta|^2\to 0. \tag{8.1.4}$$

即

$$\eta=(L^2)\lim_{n\to\infty}\eta_n=(L^2)\lim_{n\to\infty}\int_S^T\phi_n(u)\mathrm{d}B_u.$$

利用此极限，我们可以定义$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$的一类积分如下.

定义26.1 对任意$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$, 称

$$\eta=(L^2)\lim_{n\to\infty}\int_S^T\phi_n(u)\mathrm{d}B_u$$

为ϕ在$[S,T]$上的Ito积分, 记作

$$\eta=\int_S^T\phi(u)\mathrm{d}B_u,$$

其中$\phi_n\in\mathfrak{A}_0(S,T)$为任意引理26.3刻画的函数$\phi$的逼近函数列.

注26.5 Ito积分并不是$\int_S^T\phi_n(u)\mathrm{d}B_u$(几乎处处)点点收敛的极限, 但由二阶矩收敛与几乎处处关系，存在一个子列$\{n_k\}$使得Ito 积分为$\int_S^T\phi_{n_k}(u)\mathrm{d}B_u$几乎处处收敛的极限.

命题26.6 定义26.1是合理的，即对任意$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$由定义26.1定义的Ito积分是唯一的，不随$\{\phi_n\}$的选取不同而改变.

证明 任取ϕ_n,ψ_n为满足引理26.3的两列不同的ϕ逼近函数列, 分别记其按(8.1.1)定义的积分为η_n,ζ_n，记其在L^2 意义下的极限分别为η,ζ. 那么对任意n,

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{E}|\eta-\zeta|^2\big)^{1/2}&\le\big(\mathbb{E}|\eta-\eta_n|^2\big)^{1/2}+\big(\mathbb{E}|\eta_n-\zeta_n|^2\big)^{1/2}+\big(\mathbb{E}|\zeta_n-\zeta|^2\big)^{1/2}\\&\le\big(\mathbb{E}|\eta-\eta_n|^2\big)^{1/2}+\big(\mathbb{E}|\zeta_n-\zeta|^2\big)^{1/2}\\&\quad+\Big(\mathbb{E}\int_S^T|\phi_n(u)-\phi(u)|^2\mathrm{d}u\Big)^{1/2}+\Big(\mathbb{E}\int_S^T|\phi(u)-\psi_n(u)|^2\mathrm{d}u\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

令$n \to \infty$, 由引理26.3及(8.1.4)可知

$$\mathbb{E}(|\eta-\zeta|^2)=0,$$

即$\eta(\omega)=\zeta(\omega)$, a.s. □

(C) Ito 积分的简单性质

定理26.7 对任意$\phi \in \mathfrak{A}(S,T)$, 存在一个关于$t$是连续的修正

$$\eta(t,\omega)=\int_S^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u, \qquad t \in [S,T].$$

证明 取$\phi_n \in \mathfrak{A}_0(S,T)$满足引理26.3. 令$\eta_n(t,\omega)=\int_S^t \phi_n(u,\omega)\mathrm{d}B_u$. 由性质26.2可知, 对几乎所有$\omega$, 对任意$n$, $\eta_n(t,\omega)$ 关于t 连续. 由$\eta_n(t,\omega)$ 关于$\mathcal{F}_t$为鞅可知，对任意n,m, $\eta_n-\eta_m$关于$\mathcal{F}_t$ 仍为鞅, 从而由鞅的极大不等式以及Ito等距公式, 当$n,m\to\infty$时

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sup_{S\le t\le T}|\eta_n(t)-\eta_m(t)|>\varepsilon) &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}[|\eta_n(T)-\eta_m(T)|^2]\\ &=\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\Big[\int_S^T(\phi_n(u)-\phi_m(u))^2\mathrm{d}u\Big]\to 0.\end{aligned}$$

因此我们可以选取一列子列$n_k\uparrow\infty$使得

$$\mathbb{P}(\sup_{S\le t\le T}|\eta_{n_{k+1}}(t)-\eta_{n_k}(t)|>2^{-k})\le 2^{-k}.$$

由Borel-Cantelli引理,

$$\mathbb{P}(\sup_{S\le t\le T}|\eta_{n_{k+1}}(t)-\eta_{n_k}(t)|>2^{-k},\text{i.o.})=0.$$

因此，对几乎所有ω, 存在$k_1(\omega)$, 使得当$k>k_1(\omega)$时

$$\sup_{S\le t\le T}|\eta_{n_{k+1}}(t)-\eta_{n_k}(t)|<2^{-k},$$

$\eta_{n_k}(t,\omega)$对几乎所有ω是一致收敛的.极限记为$J(t,\omega)$. 由$I_{n_k}(t,\omega)$关于t的连续性可知, 对几乎所有ω, $J(t,\omega)$ 关于t连续. 又由于对任意$t\in[S,T]$,

$$(L^2)\lim_{k\to\infty}\eta_{n_k}(t)=\eta(t).$$

因此对每一个t,

$$\eta(t,\omega)=J(t,\omega),\text{a.s. w.r.t. }\omega.$$

即存在一个关于t连续的修正.

注26.8 由定理26.7, 不失一般性, 我们总可假设Ito积分$\int_S^t\phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u$关于$t$连续.

由性质26.2以及Ito等距公式容易验证对任意$\phi\in\mathfrak{A}(S,T)$, 下列性质仍成立, 证明省略.

性质26.9 若$\phi,\psi\in\mathfrak{A}(S,T)$, 那么

(1) 对任意$a(\omega), b(\omega) \in \mathcal{F}_S$, $t \in [S,T]$,

$$\int_S^t [a(\omega)\phi(u,\omega) + b(\omega)\psi(u,\omega)]\mathrm{d}B_u$$
$$= a(\omega)\int_S^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u + b(\omega)\int_S^t \psi(u,\omega)\mathrm{d}B_u;$$

(2) 对任意$S \le s < t \le T$

$$\int_S^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u = \int_S^s \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u + \int_s^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u,$$

(3) $\{\eta(t,\omega), \mathcal{F}_t\}$循序可测;

(4) $\{\eta(t,\omega), \mathcal{F}_t\}_{t\in[S,T]}$是鞅;

(5) $\mathbb{E}\Big[(\int_S^T \phi(t,\omega)\mathrm{d}B_t)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_S^T \phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t\Big]$ (Ito等距公式).

(6) 记$X(t) = \int_S^t \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u$, $t \in [S,T]$. 若$\tau \in [S,T]$关于$\{\mathcal{F}_t\}$为停时, 那么

$$X(\tau) := \int_S^\tau \phi(u,\omega)\mathrm{d}B_u = \int_S^T \phi(u,\omega)\mathbf{1}_{\{u<\tau\}}\mathrm{d}B_u.$$

例26.1 对任意$0 < t < \infty$, 求$\int_0^t B_u \mathrm{d}B_u$.

解 记$\phi(s) = B_s$,

$$\phi_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{kt/n}\mathbf{1}_{[\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n})}(s).$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\int_0^t \phi_n(s)\mathrm{d}B_s &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{kt/n}(B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}[(B_{(k+1)t/n})^2 - (B_{kt/n})^2 - (B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^2]\\ &= \frac{1}{2}[(B_t)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^2].\end{aligned}$$

注意到$n \to \infty$时

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^2 - t\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big(\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\Big((B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^2 - t/n\Big)\Big]^2\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{0\le k\le n-1}\Big((B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^2 - t/n\Big)^2\Big]\\ &= \sum_{0\le k\le n-1}\Big(\mathbb{E}(B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^4 + \frac{t^2}{n^2} - 2\frac{t}{n}\mathbb{E}(B_{(k+1)t/n} - B_{kt/n})^2\Big)\\ &= \sum_{0\le k\le n-1}\frac{2t^2}{n^2} = 2t^2/n \to 0.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^t B_u \mathrm{d}B_u = (L^2)\lim_{n\to\infty}\int_0^t \phi_n(s)\mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

8.2 Ito公式与Girsanov变换

对任意$t \in [0,\infty]$, 令

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(u,\omega)\mathrm{d}u + \int_0^t \beta(u,\omega)\mathrm{d}B_u, \tag{8.2.1}$$

其中$\beta \in \mathfrak{A}(0,\infty)$, $\alpha \in \mathfrak{B}(0,\infty)$以及

$$\mathfrak{B}(0,\infty) = \Big\{\phi(s,\omega); (s,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \phi\text{关于}\{\mathcal{F}_s\}\text{循序}$$
$$\text{可测且}\mathbb{E}\int_0^\infty |\phi(s,\omega)|ds < \infty\Big\}.$$

由Ito积分可知, X_t有定义, 对每个ω, 作为t的函数, X_t是连续的. 通常我们称这样的X_t为Ito过程. 为了表示和计算方便，我们也常将积分形式的公式(8.2.1)记成如下微分形式

$$\mathrm{d}X_t = \alpha(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\mathrm{d}B_t. \tag{8.2.2}$$

注 特别强调，从数学严格意义来讲(8.2.2)本身是没有意义的. 在随机微分领域，微分方程(8.2.2)的真实含义是积分方程(8.2.1), 此后都按此理解.

(A) Ito公式

定理27.1 (Ito公式) 设Ito过程X_t满足

$$\mathrm{d}X_t = \alpha(t)\mathrm{d}t + \beta(t)\mathrm{d}B_t.$$

设$g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$为二阶连续可导函数,$\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$都有界, 那么$Y_t = g(t,X_t)$也是Ito过程, 且

$$\mathrm{d}Y_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(\mathrm{d}X_t)^2,$$

其中$(\mathrm{d}X_t)^2 = (\mathrm{d}X_t)\cdot(\mathrm{d}X_t)$按如下方式计算

$$\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}B_t\cdot\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}B_t\cdot\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}t.$$

即

$$\mathrm{d}Y_t = \Big[\frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)\alpha(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\beta^2(t)\Big]\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)\beta(t)\mathrm{d}B_t.$$

证明 记$\gamma(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)\alpha(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\beta^2(t)$. 如前面注中所强调的, 我们所要证明的其实是等式

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \gamma(u)\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\beta(t)\mathrm{d}B_u. \tag{8.2.3}$$

下面我们分两种情况验证.

(1)当$\alpha(u),\beta(u)\in\mathfrak{A}_0(0,\infty)$时, 不失一般性可设$t_n=t$,

$$X_t=X_0+\sum_{i=0}^{n-1}\alpha(t_i)(t_{i+1}-t_i)+\sum_{i=0}^{n-1}\beta(t_i)(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}).$$

因此

$$Y_t=g(t,X(t))=g(0,X(0))+\sum_{i=0}^{n-1}(g(t_{i+1},X_{t_{i+1}})-g(t_i,X_{t_i}))$$

注意到

$$\begin{aligned}&g(t_{i+1},X_{t_{i+1}})-g(t_i,X_{t_i})\\&=g\big(t_{i+1},X_{t_i}+\alpha(t_i)(t_{i+1}-t_i)+\beta(t_i)(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\big)-g(t_i,X_{t_i}),\end{aligned}$$

进一步将区间$[t_i,t_{i+1})$做m等分$t_i=t_{i0}<\cdots<t_{im}=t_{i+1}$，令$x_k=X_{t_i}+\alpha(t_i)(t_{ik}-t_i)+\beta(t_i)(B_{t_{ik}}-B_{t_i})$, 由泰勒展式得

$$\begin{aligned}g(t_{i+1},X_{t_{i+1}})-g(t_i,X_{t_i})&=\sum_{k=0}^{m-1}g(t_{i(k+1)},x_{k+1})-g(t_{ik},x_k)\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\frac{\partial g}{\partial t}(t_{ik},x_k)(t_{i(k+1)}-t_{ik})+\frac{\partial g}{\partial x}(t_{ik},x_k)(x_{k+1}-x_k)\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{ik},x_k)(x_{k+1}-x_k)^2+o(t_{i(k+1)}-t_k)+o[(x_{k+1}-x_k)^2]\Big].\end{aligned}$$

注意到$x_{k+1}-x_k=\alpha(t_i)(t_{i(k+1)}-t_{ik})+\beta(t_i)(B_{t_{i(k+1)}}-B_{t_{ik}})$,

$$\begin{aligned}(x_{k+1}-x_k)^2&=\alpha^2(t_i)(t_{i(k+1)}-t_{ik})^2+\beta^2(t_i)(B_{t_{i(k+1)}}-B_{t_{ik}})^2\\&\quad+2\alpha(t_i)\beta(t_i)(t_{i(k+1)}-t_{ik})(B_{t_{i(k+1)}}-B_{t_{ik}})\end{aligned}$$

容易验证$m\to\infty$时，在L^2意义下下面的收敛成立

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{ik},x_k)\alpha^2(t_i)(t_{i(k+1)}-t_{ik})^2\to 0,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{ik},x_k)\alpha(t_i)\beta(t_i)(t_{i(k+1)}-t_{ik})(B_{t_{i(k+1)}}-B_{t_{ik}})\to 0.$$

类似例25.1计算可知在L^2意义下,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{ik},x_k)\beta^2(t_i)[(B_{t_{i(k+1)}}-B_{t_{ik}})^2-(t_{i(k+1)}-t_{ik})]\to 0,$$

这表明在L^2意义下,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{ik},x_k)\beta^2(t_i)(B_{t_{i(k+1)}}-B_{t_{ik}})^2\to\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u)\beta^2(u)\mathrm{d}u,$$

进而
$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_{ik},x_k)(x_{k+1}-x_k)^2\to\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u)\beta^2(u)\mathrm{d}u.$$
此外容易看出在L^2意义下
$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\frac{\partial g}{\partial t}(t_{ik},x_k)(t_{i(k+1)}-t_{ik})+\frac{\partial g}{\partial t}(t_{ik},x_k)(x_{k+1}-x_k)\Big]\\&=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(\frac{\partial g}{\partial t}(u,X_u)+\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\alpha(u)\Big)\mathrm{d}u+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\beta(u)\mathrm{d}B_u.\end{aligned}$$
以及
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\Big[o(t_{i(k+1)}-t_k)+o(x_{k+1}-x_k)^2\Big]=0.$$
综上可知此时
$$\begin{aligned}Y_t&=g(t,X(t))\\&=g(0,X(0))+\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(\frac{\partial g}{\partial t}(u,X_u)+\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\alpha(u)\Big)\mathrm{d}u\\&\quad+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\beta(u)\mathrm{d}B_u+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u)\beta^2(u)\mathrm{d}u\Big]\\&=g(0,X(0))+\int_0^t\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\beta(u)\mathrm{d}B_u+\int_0^t\gamma(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$
即当α, β均为基本函数时成立.

(2)若$\alpha\in\mathfrak{B}(0,\infty),\beta\in\mathfrak{A}(0,\infty)$, 则存在$\beta_n\in\mathfrak{A}_0(0,\infty)$使得
$$\mathbb{E}\Big(\int_0^\infty|\beta_n(u,\omega)-\beta(u,\omega)|^2\mathrm{d}u\Big)\to 0.\tag{8.2.4}$$
与引理26.3类似, 可证明存在$\alpha_n\in\mathfrak{A}_0(0,\infty)$使得
$$\mathbb{E}\int_0^\infty|\alpha_n(u,\omega)-\alpha(u,\omega)|\mathrm{d}u\to 0.\tag{8.2.5}$$
记
$$X_t^{(n)}=X_0+\int_0^t\alpha_n(u)\mathrm{d}u+\int_0^t\beta_n(u)\mathrm{d}B_u,$$
令$Y_t^{(n)}=g(t,X_t^{(n)})$, 由前面已经证明的(1)可知
$$Y_t^{(n)}=Y_0+\int_0^t\gamma_n(u)\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n)})\beta_n(u)\mathrm{d}B_u,$$
其中$\gamma_n(u)=\frac{\partial g}{\partial t}(u,X_u^{(n)})+\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n)})\alpha_n(u)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u^{(n)})\beta_n^2(u)$. 首先我们注意到
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|X_n(s,\omega)-X(s,\omega)|\ge\epsilon)\\&\le\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_0^s\big(\beta_n(u)-\beta(u)\big)\mathrm{d}B_u\Big|\ge\epsilon/2\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le t}\Big|\int_0^s\big(\alpha_n(u)-\alpha(u)\big)\mathrm{d}u\Big|\ge\epsilon/2\Big)\\
&\le\frac{4}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\Big(\int_0^t|\beta_n(u)-\beta(u)|^2\mathrm{d}u\Big)+\frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}\Big(\int_0^t|\alpha_n(u)-\alpha(u)|\mathrm{d}u\Big)\to 0.
\end{aligned}
$$

因此与定理26.7证明类似，由Borel-Cantelli引理可知存在子列n_k使得

$$
\sup_{0\le s\le t}|X_{n_k}(s,\omega)-X(s,\omega)|\to 0,\qquad a.s.
$$

由g的连续性

$$
Y_t^{(n_k)}=g(t,X_t^{(n_k)})\to Y_t=g(t,X_t),\qquad a.s. \tag{8.2.6}
$$

同时由$\frac{\partial g}{\partial t},\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$的连续性可推得,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le t}\Big|\frac{\partial g}{\partial t}(s,X_{n_k}(s,\omega))-\frac{\partial g}{\partial t}(s,X(s,\omega))\Big|\to 0,\qquad a.s.\\
&\sup_{0\le s\le t}\Big|\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n_k}(s,\omega))-\frac{\partial g}{\partial x}(s,X(s,\omega))\Big|\to 0,\qquad a.s.\\
&\sup_{0\le s\le t}\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_{n_k}(s,\omega))-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X(s,\omega))\Big|\to 0,\qquad a.s.
\end{aligned}
$$

由$\frac{\partial g}{\partial t},\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$的有界性及控制收敛定理可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big|\int_0^t\Big[\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n_k)})\beta_{n_k}(u)-\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\beta(u)\Big]\mathrm{d}B_u\Big|^2\\
&\quad\le 2\mathbb{E}\int_0^t\Big[\Big|\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n_k)})\Big|^2|\beta_{n_k}(u)-\beta(u)|^2\\
&\qquad+\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n_k)})-\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\Big)^2\beta^2(u)\Big]\mathrm{d}u\to 0,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big|\int_0^t\gamma_{n_k}(u)\mathrm{d}u-\int_0^t\gamma(u)\mathrm{d}u\Big|\\
&\quad\le\mathbb{E}\int_0^t\Big|\frac{\partial g}{\partial t}(u,X_u^{(n_k)})-\frac{\partial g}{\partial t}(u,X_u)\Big|\mathrm{d}u\\
&\qquad+\mathbb{E}\int_0^t\Big|\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n_k)})-\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u)\Big||\alpha(u)|\mathrm{d}u\\
&\qquad+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u^{(n_k)})\Big||\beta_{n_k}^2(u)-\beta^2(u)|\mathrm{d}u\\
&\qquad+\mathbb{E}\int_0^t\Big|\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n_k)})\Big||\alpha_{n_k}(u)-\alpha(u)|\mathrm{d}u\\
&\qquad+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t\Big|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u^{(n_k)})-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,X_u)\Big||\beta(u)|\mathrm{d}u\to 0.
\end{aligned}
$$

因此在L^1意义下

$$
\int_0^t\gamma_{n_k}(u)\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^{(n_k)})\beta_{n_k}(u)\mathrm{d}B_u
$$

$$\to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u)\beta(u)\mathrm{d}B_u + \int_0^t \gamma(u)\mathrm{d}u.$$

结合(8.2.6)可得

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u)\beta(u)\mathrm{d}B_u + \int_0^t \gamma(u)\mathrm{d}u.$$

定理证毕. □

利用函数逼近方法可进一步证明

推论27.2 若定理27.1中二阶连续可导函数$g(t,x)$满足

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t), \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\alpha(t), \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)\beta^2(t), [\frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\beta(t)]^2$$

均在$[0,\infty) \times \Omega$上可积, 那么仍有

$$\mathrm{d}Y_t = \Big[\frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\alpha(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)\beta^2(t)\Big]\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\beta(t)\mathrm{d}B_t.$$

Ito公式还可推广到多个Ito过程的函数情形.

推论27.3 设$X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n)}$为$n$个Ito过程, 其中

$$dX_t^{(i)} = \alpha_i(u)\mathrm{d}u + \beta_i(u)\mathrm{d}B_u.$$

$g(t, x_1, \cdots, x_n)$为连续二阶可导函数. 令$Y_t = g(t, X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n)})$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t = &\frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n)})\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n)})\mathrm{d}X_t^{(i)} \\ &+ \sum_{1\le i,j\le n} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n)})\mathrm{d}X_t^{(i)}\mathrm{d}X_t^{(j)},\end{aligned}$$

其中$\mathrm{d}X_t^{(i)}\mathrm{d}X_t^{(j)}$仍按如下方式计算

$$\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}B_t\cdot\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}B_t\cdot\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}t.$$

(B) 指数鞅与Girsanov变换

命题27.4(指数鞅) 若β为$[0,\infty)\times\Omega$上循序可测有界函数, 令

$$Z_t = \exp\Big[\int_0^t \beta(u)\mathrm{d}B_u - \frac{1}{2}\int_0^t \beta^2(u)\mathrm{d}u\Big],$$

那么$\{Z_t, \mathcal{F}_t\}_{0\le t<\infty}$为鞅.

证明 只需证明对任意$0 \le s < t$, $\mathbb{E}(Z_t) < \infty$并且$\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) = Z_s$. 为此, 记

$$W_t = \int_0^t \beta(u)\mathrm{d}B_u - \frac{1}{2}\int_0^t \beta^2(u)\mathrm{d}u,$$

若$\beta \in \mathfrak{A}_0(0,\infty)$, 不妨设

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, \quad \beta(u) = \sum_{k=0}^{n-1}\beta(t_k)\mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})}(u).$$

那么

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{W_t})=\mathbb{E}\Big(\exp\{\sum_{k=0}^{n-1}[\beta(t_k)(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})-\frac{1}{2}\beta^2(t_k)(t_{k+1}-t_k))\}\Big)=1.$$

若$\beta\in\mathfrak{A}(0,\infty)$, 则由引理25.3, 存在一致有界的$\beta_n\in\mathfrak{A}_0(0,\infty)$使得对任意

$$\mathbb{E}\int_0^t|\beta_n(u)-\beta(u)|^2\mathrm{d}u\to 0$$

此时

$$\int_0^t\beta_n(u)\mathrm{d}B_u\overset{L^2}{\to}\int_0^t\beta(u)\mathrm{d}B_u$$
$$\int_0^t\beta_n^2(u)\mathrm{d}u\overset{L^1}{\to}\int_0^t\beta^2(u)\mathrm{d}u$$

记

$$W_n(t)=\int_0^t\beta_n(u)\mathrm{d}B_u-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_n^2(u)\mathrm{d}u.$$

存在子列, 不妨仍记作n使得$W_n(t)\overset{a.s}{\to}W(t)$ 从而

$$\mathrm{e}^{W_n(t)}\overset{a.s.}{\to}\mathrm{e}^{W_t}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{2W_n(t)})&=\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{2\int_0^t\beta_n(s)\mathrm{d}B_s-\int_0^t\beta_n^2(s)\mathrm{d}s\Big\}\Big)\\&\le\Big[\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{4\int_0^t\beta_n(s)\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t(4\beta_n(s))^2\mathrm{d}s\Big\}\Big)\Big]^{1/2}\\&\qquad\times\Big[\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{6\int_0^t\beta_n^2(s)\mathrm{d}s\Big\}\Big)\Big]^{1/2}\\&\le\mathrm{e}^{3M^2t},\end{aligned}\tag{8.2.7}$$

其中M表示函数$|\beta(u)|$的上界. 由Fatou引理

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{2W_t})\le\mathrm{e}^{3M^2t},\qquad t>0.$$

另一方面, 由Ito公式，

$$\mathrm{d}\mathrm{e}^{W_t}=\beta\mathrm{e}^{W_t}\mathrm{d}B_t$$

注意到

$$\mathbb{E}\int_0^t\beta^2(s)\mathrm{e}^{2W_s}\mathrm{d}s\le M^2\int_0^t\mathbb{E}(\mathrm{e}^{2W_s})\mathrm{d}s<\infty,$$

即对任意$t>0$, 函数$\beta(s)\mathrm{e}^{W_s}\in\mathfrak{A}(0,t)$, 其中$s\in[0,t]$. 因此由性质25.9(4)

$$\mathrm{e}^{W_t}=1+\int_0^t\beta\mathrm{e}^{W_s}\mathrm{d}B_s$$

关于$\{\mathcal{F}_t\}$为鞅.

注27.5 (8.2.7)还表明$\{W_n(t)\}_n$一致可积, 从而由控制收敛定理

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{W_t})=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{W_n(t)})=1.\tag{8.2.8}$$

定理27.5(Girsanov变换) 任意取定T, 设$\beta(u,\omega)$为$[0,T]\times\Omega$上循序可测有界函数, 令

$$Z_t=\exp\Big(\int_0^t\beta(u)\mathrm{d}B_u-\frac{1}{2}\int_0^t\beta^2(u)\mathrm{d}u\Big).$$

定义

$$\tilde{\mathbb{P}}(A)=\int_A Z_T(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P},\qquad A\in\mathcal{F}_T$$

那么$\tilde{\mathbb{P}}$是$(\Omega,\mathcal{F}_T)$上概率的测度, 并且

$$X_t=B_t-\int_0^t\beta(u)\mathrm{d}u,\qquad 0\le t\le T$$

对σ-代数流$\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 是概率空间$(\Omega,\mathcal{F}_T,\tilde{\mathbb{P}})$上的Brown运动.

证明 由于Z_T非负且由(8.2.8)可知$\mathbb{E}(Z_T)=1$, 因此$\tilde{\mathbb{P}}$是$(\Omega,\mathcal{F}_T)$上的测度. 此时对任意$A\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_T$, 由$\{Z_t,\mathcal{F}_t\}$为鞅可知

$$\mathbb{E}(Z_T\mathbf{1}_A)=\mathbb{E}(Z_s\mathbf{1}_A).$$

记$\tilde{\mathbb{P}}$下的期望为$\tilde{\mathbb{E}}$. 对任意$0\le s<t\le T$, 若$g\in\mathcal{F}_t$可积, 任取$A\in\mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{\mathbb{E}}(g|\mathcal{F}_s)\mathbf{1}_A)&=\tilde{\mathbb{E}}(g\mathbf{1}_A)=\mathbb{E}(g\mathbf{1}_AZ_T)=\mathbb{E}(g\mathbf{1}_AZ_t)\\&=\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(gZ_t|\mathcal{F}_s))=\mathbb{E}(Z_s\mathbf{1}_A\mathbb{E}(gZ_t|\mathcal{F}_s)Z_s^{-1})\\&=\tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(gZ_t|\mathcal{F}_s)Z_s^{-1}).\end{aligned}$$

这表明

$$\tilde{\mathbb{E}}(g|\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}(gZ_t|\mathcal{F}_s)Z_s^{-1}.\tag{8.2.9}$$

要证$\{X_t,\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$是$(\Omega,\mathcal{F}_T,\tilde{\mathbb{P}})$上的Brown运动, 只需证对任意$s<t$, $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\tilde{\mathbb{E}}(\mathrm{e}^{i\lambda(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}.\tag{8.2.10}$$

为此利用(8.2.9)直接计算得

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{E}}(\mathrm{e}^{i\lambda X_t}|\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\lambda X_t}Z_t|\mathcal{F}_s)Z_s^{-1}\\&\quad=\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\int_0^t(i\lambda+\beta(u))\mathrm{d}B_u-\int_0^t[i\lambda\beta(u)+\frac{1}{2}\beta^2(u)]\mathrm{d}u\Big\}\Big|\mathcal{F}_s\Big)Z_s^{-1}\\&\quad=\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\int_0^t(i\lambda+\beta(u))\mathrm{d}B_u-\frac{1}{2}\int_0^t(i\lambda+\beta(u))^2\mathrm{d}u-\frac{\lambda^2}{2}t\Big\}\Big|\mathcal{F}_s\Big)Z_s^{-1}\\&\quad=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\mathbb{E}\Big(\exp\Big\{\int_0^t(i\lambda+\beta(u))\mathrm{d}B_u-\frac{1}{2}\int_0^t(i\lambda+\beta(u))^2\mathrm{d}u\Big\}\Big|\mathcal{F}_s\Big)Z_s^{-1}.\end{aligned}$$

将$i\lambda+\beta(u)$理解为命题27.4中的$\beta(u)$, 那么

$$\exp\Big\{\int_0^t(i\lambda+\beta_u)\mathrm{d}B_u-\frac{1}{2}\int_0^t(i\lambda+\beta(u))^2\mathrm{d}u\Big\}$$

关于$\mathcal{F}_t$为鞅, 从而

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}(\mathrm{e}^{i\lambda X_t}|\mathcal{F}_s) &= \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\exp\Big\{\int_0^s(i\lambda+\beta(u))\mathrm{d}B_u-\frac{1}{2}\int_0^s(i\lambda+\beta(u))^2\mathrm{d}u\Big\}Z_s^{-1}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}s}\mathrm{e}^{i\lambda X_s}Z_sZ_s^{-1}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}\mathrm{e}^{i\lambda X_s}.\end{aligned}$$

由此易得(8.2.10), 从而定理证毕. □

8.3 随机微分方程与扩散过程初步

(A) 随机微分方程

定义28.1 称形如

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t \tag{8.3.1}$$

的方程为(Ito)随机微分方程. 称$\{X_t\}$为该微分方程的解, 若$\{X_t\}$满足该方程且关于$\{\mathcal{F}_t\}$循序可测. 随机微分方程的解又称为扩散过程.

按此前对随机微分的解释, 方程(1)的实质是如下的积分方程

$$X_t = X_s + \int_s^t b(u, X_u)\mathrm{d}u + \int_s^t \sigma(u, X_u)\mathrm{d}B_u. \tag{8.3.2}$$

定理28.1 设$0 \le S < T < \infty$. $b(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$为$[S,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$可测函数满足

(1) 线性增长条件: 存在常数$C > 0$使得对任意$(t,x)\in[S,T]\times\mathbb{R}$,

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le C(1+|x|);$$

(2) Lipschitz条件: 存在常数$D > 0$使得对任意$t\in[S,T]$, $x, y\in\mathbb{R}$

$$|b(t,x)-b(t,y)| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le D|x-y|.$$

若$Z\in\mathcal{F}_S$且与$\mathcal{G}_\infty$独立, $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$. 那么随机微分方程

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t, t\in(S,T), X_S = Z \tag{8.3.3}$$

存在唯一解X_t使得对几乎处处的轨道ω, $X_t(\omega)$关于t连续, 而且作为(t,ω)的二元函数, $X\in\mathfrak{A}(S,T)$.

引理28.2 (Gronwall 不等式) 设$g(s)\ge 0$, h, g可积且存在常数$c\ge 0$使得对任意$t\in[S,T]$,

$$g(t) \le c + \int_S^t h(u)g(u)\mathrm{d}u,$$

那么

$$g(t) \le c\mathrm{e}^{\int_S^t h(u)\ du}.$$

证明 先不妨设$c > 0$. 此时由条件可得

$$\frac{h(t)g(t)}{c + \int_S^t h(u)g(u)\mathrm{d}u} \le h(t)$$

因此

$$\ln(c + \int_S^t h(u)g(u)\mathrm{d}u) - \ln c \le \int_S^t h(u)\mathrm{d}u.$$

由此可得

$$g(t) \le c + \int_S^t h(u)g(u)\mathrm{d}u \le c\mathrm{e}^{\int_S^t h(u)\ du}.$$

若$c=0$, 则取$c_n\downarrow 0$,

$$g(t)\leq c_n\mathrm{e}^{\int_S^t h(u)\ du}\to 0.$$

引理证毕. □

在证明定理28.1之前,我们不加证明地指出, 若$X\in\mathfrak{A}(S,T)$, 二元可测函数b和σ满足线性增长条件, 那么$b(t,X_t)$, $\sigma(t,X_t)$ 也都属于$\mathfrak{A}(S,T)$, 从而Ito积分式(8.3.2)有意义.

证明 第一步, 证明若方程(8.3.3)满足定理条件的解存在, 则必唯一.

为此设$X,\tilde{X}$都是方程(8.3.1)的解, 且初值为$X_S=Z,X_S=\tilde{Z}$. 令

$$\alpha(u,\omega)=b(u,X_u)-b(u,\tilde{X}_u),\qquad \sigma(u,\omega)=\sigma(u,X_u)-\sigma(u,\tilde{X}_u).$$

那么对任意$t\in[S,T]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t-\tilde{X}_t)^2&=\mathbb{E}\Big(Z-\tilde{Z}+\int_S^t\alpha\mathrm{d}u+\int_S^t\beta\mathrm{d}B_u\Big)^2\\&\leq 3\mathbb{E}(Z-\tilde{Z})^2+3(T-S)\mathbb{E}\int_S^t\alpha^2\mathrm{d}u+3\mathbb{E}\int_S^t\beta^2\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由Lipschitz条件,

$$\mathbb{E}(X_t-\tilde{X}_t)^2\leq 3\mathbb{E}(Z-\tilde{Z})^2+3(T-S+1)D^2\int_S^t\mathbb{E}(X_u-\tilde{X}_u)^2\mathrm{d}.$$

记$A_1=3(T-S+1)D^2$, 由Gronwall不等式得

$$\mathbb{E}(X_t-\tilde{X}_t)^2\leq 3\mathbb{E}(Z-\tilde{Z})^2\mathrm{e}^{A_1(t-S)}.\tag{8.3.4}$$

若X, $\tilde{X}$均是(8.3.3)的满足定理要求的解, 那么$Z=\tilde{Z}$, 从而对任意$t\in[S,T]$

$$\mathbb{E}(X_t-\tilde{X}_t)^2=0.$$

由此可得$\mathbb{P}(X_t=\tilde{X}_t,t$为$[S,T]$中有理数$)=1$. 再由$X_t-\tilde{X}_t$的轨道连续性

$$\mathbb{P}(X_t=\tilde{X}_t,t\in[S,T])=1.$$

由此便得解的唯一性.

第二步, 证明方程8.3.3)满足定理条件的解存在. 为此, 对任意$t\in[S,T]$, 令

$$\begin{aligned}Y_t^{(0)}&=Z\\Y_t^{(k+1)}&=Z+\int_S^t b(u,Y_u^{(k)})\mathrm{d}u+\int_S^t\sigma(u,Y_u^{(k)})\mathrm{d}B_u,\quad k\geq 0.\end{aligned}$$

容易看出$Y^{(k)}\in\mathfrak{A}(S,T)$而且对几乎处处的$\omega$, $Y_t^{(k)}(\omega)$关于t连续.

对任意$t\in[S,T]$直接计算可知,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t^{(1)}-Y_t^{(0)})^2&=\mathbb{E}\Big(\int_S^t b(u,Z)\mathrm{d}u+\int_S^t\sigma(u,Z)\mathrm{d}B_u\Big)^2\\&\leq 2(T-S)\mathbb{E}\int_S^t b^2(u,Z)\mathrm{d}u+2\mathbb{E}\int_S^t\sigma^2(u,Z)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由线性增长条件

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t^{(1)}-Y_t^{(0)})^2 &\le 4(T-S)C^2\mathbb{E}\int_S^t(1+Z^2)\mathrm{d}u+4C^2\mathbb{E}\int_S^t 1+Z^2\mathrm{d}u\\ &=4C^2[(T-S)+1](1+\mathbb{E}(Z^2))(t-S). \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

记$A_2=4C^2[(T-S)+1](1+\mathbb{E}(Z^2))$. 此外, 与唯一性中讨论类似, 对任意$k\ge 1$,

$$\mathbb{E}(Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)})^2\le A_1\int_S^t \mathbb{E}(Y_u^{(k)}-Y_u^{(k-1)})^2\mathrm{d}u.$$

由此进一步递归计算可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)})^2 &\le A_1^2\int_S^t \mathbb{E}(Y_{u_2}^{(k-1)}-Y_{u_2}^{(k-2)})^2\mathrm{d}u_2\int_{u_2}^t \mathrm{d}u_1\\ &\le A_1^3\int_S^t \mathbb{E}(Y_{u_3}^{(k-2)}-Y_{u_3}^{(k-3)})^2\mathrm{d}u_3\int_{u_3}^t\mathrm{d}u_2\int_{u_2}^t\mathrm{d}u_1\\ &\le \cdots\\ &\le A_1^k\int_S^t \mathbb{E}(Y_{u_k}^{(1)}-Y_{u_k}^{(0)})^2\mathrm{d}u_k\int_{u_k}^t\mathrm{d}u_{k-1}\cdots\int_{u_2}^t\mathrm{d}u_1.\end{aligned}$$

因此将(8.3.5)代入得, 对任意$t\in[S,T]$,

$$\mathbb{E}(Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)})^2\le A_1^kA_2\frac{(t-S)^{k+1}}{(k+1)!}\le\frac{A_3^{k+1}(t-S)^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{8.3.6}$$

其中$A_3=A_1\vee A_2$. 注意到

$$\sup_{S\le t\le T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|\le\int_S^T|\alpha_{k-1}(u)|\mathrm{d}u+\sup_{S\le t\le T}\Big|\int_S^t\beta_{k-1}(u)\mathrm{d}B_u\Big|,$$

其中$\alpha_k(u)=b(u,Y_u^{(k+1)})-b(u,Y_u^{(k)})$, $\beta_k(u)=\sigma(u,Y_u^{(k+1)})-\sigma(u,Y_u^{(k)})$. 由Ito积分的鞅性及鞅的极大不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{S\le t\le T}\Big|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\Big|>2^{-k}\Big) &\le \mathbb{P}\Big(\int_S^T|\alpha_{k-1}(u)|\mathrm{d}u>2^{-k-1}\Big)\\ &\quad+\mathbb{P}(\sup_{S\le t\le T}\Big|\int_S^t\beta_{k-1}(u)\mathrm{d}B_u\Big|>2^{-k-1}\Big)\\ \le 4^{k+1}(T-S)\mathbb{E}\int_S^T|\alpha_{k-1}(u)|^2\mathrm{d}u&+4^{k+1}\mathbb{E}\int_S^T|\beta_{k-1}(u)|^2\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由Lipschitz条件以及(8.3.6)可知，存在只依赖于常数$T-S,C,D$的常数A_4 使得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\sup_{S\le t\le T}\Big|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\Big|>2^{-k}\Big)\\ &\le 4^{k+1}(1+T-S)D^2\mathbb{E}\int_S^T|Y_u^{(k)}-Y_u^{(k-1)}|^2\mathrm{d}u\\ &\le 4^{k+1}(T-S+1)D^2\int_S^T\frac{A_3^k(u-S)^k}{k!}\mathrm{d}u\le\frac{M^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

由Borel-Cantelli引理,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{S\le t\le T}\Big|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}\Big|>2^{-k},i.o.\Big)=0.$$

从而对几乎处处的ω, 存在$K(\omega)$, 当$k > K(\omega)$时

$$\sup_{S\le t\le T}\left|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\right| < 2^{-k}$$

这表明对a.s. ω,

$$Y_t^{(n)}(\omega) = Y_t^{(0)}(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(Y_t^{(k+1)}(\omega) - Y_t^{(k)}(\omega)\Big)$$

在$[S,T]$上一致收敛于某个极限, 记作$X_t(\omega)$, $t\in[S,T]$.

由$Y_t^{(n)}$的循序可测与轨道连续性可知X_t也是循序可测与轨道连续.

注意到对任意$m>n$, 由(8.3.6)可知, 当$n\to\infty$时

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{E}(Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)})^2\big)^{1/2} &\le \sum_{k=n}^{m-1}\big(\mathbb{E}(Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)})^2\big)^{1/2}\\ &\le \sum_{k=n}^{m-1}\Big(\frac{A_3^{k+1}(t-S)^{k+1}}{(k+1)!}\Big)^{1/2}\to 0.\end{aligned}$$

因此对任意$t\in[S,T]$, $\{Y_t^{(n)}\}$在L^2意义下为Cauchy列从而在L^2意义下收敛. 这表明$Y_t^{(n)} \stackrel{L^2,a.s.}{\to} X_t$, 从而$\mathbb{E}(X_t^2)<\infty$. 因此

$$\mathbb{E}\Big[\int_S^T X_t^2\mathrm{d}t\Big] < \infty,$$

即$X\in\mathfrak{A}(S,T)$, 并且

$$\mathbb{E}\Big[\int_S^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2\mathrm{d}u\Big]\to 0.$$

所以对任意$t\in[S,T]$, 由Lipschitz条件,

$$\mathbb{E}\Big(\int_S^t[b(u,Y_u^{(n)}) - b(u,X_u)]\mathrm{d}u\Big)^2 \le D^2(T-S)\mathbb{E}\Big[\int_S^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2\mathrm{d}u\Big]\to 0,$$

$$\mathbb{E}\Big(\int_S^t[\sigma(u,Y_u^{(n)}) - \sigma(u,X_u)]\mathrm{d}B_u\Big)^2 \le D^2\mathbb{E}\Big[\int_S^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2\mathrm{d}u\Big]\to 0.$$

这意味着

$$\begin{aligned}Y_t^{(n+1)} &= Z + Z + \int_S^t b(u,Y_u^{(n)})\mathrm{d}u + \int_S^t \sigma(u,Y_u^{(n)})\mathrm{d}B_u\\ &\stackrel{L^2}{\to} Z + \int_S^t b(u,X_u)\mathrm{d}u + \int_S^t\sigma(u,X_u)\mathrm{d}B_u = X_t.\end{aligned}$$

综上所述X_t确为满足定理要求的微分方程(8.3.2)的解. 定理证毕. □

注 利用分段拼接方法，我们可以证明定理在$T=\infty$时, 结论也成立.

(B) 时齐扩散过程性质

定义28.2 称扩散过程$\{X_t\}$是时齐的, 若X_t是如下形式微分方程的解

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t \tag{8.3.7}$$

其中$b(\cdot),\sigma(\cdot)$是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的可测函数, 满足Lipschitz条件, 即存在常数$D>0$使得

$$|b(x)-b(y)|+|\sigma(x)-\sigma(y)|\le D|x-y|.$$

由定理28.1可知, 一旦给定初始时间和初始位置, 比如$X_s=x$, 那么方程(8.3.7)存在轨道连续的唯一解, 为了更明确, 我们将其记作$\{X_t^{s,x}\}_{t\ge s}$, 即

$$X_t^{s,x}=x+\int_s^t b(X_u^{s,x})\mathrm{d}u+\int_s^t\sigma(X_u^{s,x})\mathrm{d}B_u.$$

因此对任意$h>0$,

$$\begin{aligned}X_{s+h}^{s,x}&=x+\int_s^{t+h} b(X_u^{s,x})\mathrm{d}u+\int_s^{s+h}\sigma(X_u^{s,x})\mathrm{d}B_u\\&=x+\int_0^h b(X_{s+u}^{s,x})\mathrm{d}u+\int_0^h\sigma(X_{s+u}^{s,x})\mathrm{d}\tilde{B}_u\end{aligned}$$

其中$\tilde{B}_u=B_{s+u}-B_s$仍是标准布朗运动. 再由

$$X_h^{0,x}=x+\int_0^h b(X_u^{0,x})\mathrm{d}u+\int_0^h\sigma(X_u^{0,x})\mathrm{d}B_u$$

以及解的唯一性可知, 随机过程$\{X_{s+h}^{s,x}\}_{\{}h\ge 0\}$与$\{X_h^{0,x}\}$有相同分布. 这表明满足方程(8.3.7)的时齐扩散过程的统计分布确实具有时齐性，这也是我们称其为时齐扩散过程的原因.

以$\mathbb{Q}^x$表示$X_0=x$条件下时齐扩散过程$\{X_t\}$诱导的概率测度, 即对任意$n\ge 1$, $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$以及$A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{B}(R)$,

$$\mathbb{Q}^x(X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n)=\mathbb{P}(X_{t_1}^{0,x}\in A_1,\cdots,X_{t_n}^{0,x}\in A_n).$$

记概率测度$\mathbb{Q}^x$下的数学期望为$\mathbb{E}^x$.

以下为讨论方便, 总设X_t是满足方程(8.3.7)的时齐扩散方程.

引理28.3 令$u(x)=\mathbb{E}^x[g(X_t)]$, 若$g$有界连续, 那么$u(x)$ 也有界连续.

证明 由(8.3.4)可知存在$C(t)>0$使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}|X_t^{0,x}-X_t^{0,y}|^2\le 3C(t)|x-y|^2 \tag{8.3.8}$$

这表明$y\to x$时, $X_t^{0,y}\xrightarrow{\mathbb{P}}X_t^{0,x}$, 从而$g(X_t^{0,y})\xrightarrow{\mathbb{P}}g(X_t^{0,x})$. 又由于$g$为有界函数, 由控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}u(x)&=\mathbb{E}(g(X_t^{0,x}))=\mathbb{E}(\lim_{y_n\to x}g(X_t^{0,y_n}))\\&=\lim_{y_n\to x}\mathbb{E}(g(X_t^{0,y_n}))=\lim_{y_n\to x}\mathbb{E}^{y_n}(g(X_t))=\lim_{y_n\to x}u(y_n).\end{aligned}$$

由此可知u在x连续, 从而u为连续函数.

引理28.4 对R上任意有界可测函数f，$h(x,\omega):=f(X_t^{0,x}(\omega))$是$\mathbb{R}\times\Omega$上二元可测函数.

证明 由测度论知识可知, 实数上任意有界可测函数都可由有界连续函数逼近, 因此不妨设f连续. 此时由控制收敛定理易得, $y \to x$ 时

$$\mathbb{E}|h(x,\cdot) - h(y,\cdot)|^2 \to 0.$$

即$h(y,\cdot) \xrightarrow{L^2} h(x,\cdot)$. 令

$$h_m(x,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(\frac{k}{2^m},\omega)\mathbf{1}_{[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m})}(x).$$

显然h_m为二元可测函数, 且对任意$x \in \mathbb{R}$

$$h_m(x,\cdot) \xrightarrow{L^2} h(x,\cdot),$$

因此对任意$T > 0$, $m \to \infty$时

$$\mathbb{E}\int_{-T}^{T} |h_m(x,\cdot) - h(x,\cdot)|^2 \mathrm{d}x \to 0.$$

这表明在$[-T,T]\times\Omega$上$h(x,\omega)$是二元可测函数. 由T的任意性, 容易知道$h(x,\omega)$在$\mathbb{R}\times\Omega$上为可测函数.

定理28.5时齐扩散过程X_t是时齐马氏过程, 即对任意R上有界可测函数f

$$\mathbb{E}^x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^x[f(X_{t+s})|X_t] = \mathbb{E}^{X_t^{0,x}}[f(X_s)].$$

证明 注意到

$$X_{t+s}^{0,x} = X_t^{0,x} + \int_t^{t+s} b(X_u^{0,x})\mathrm{d}u + \int_t^{t+s} \sigma X_u^{0,x}\mathrm{d}B_u.$$

由解的存在唯一性

$$X_{t+s}^{0,x} = X_{t+s}^{t,X_t^{0,x}}.$$

记$F(x,\omega) = X_{t+s}^{t,x}(\omega)$. 由于布朗运动在$t$之后的增量与$\mathcal{F}_t$独立, 利用定理28.1提供的扩散过程逼近序列可以证明, 在固定x 之后, $F(t,\cdot)$与$\mathcal{F}_t$独立. 由引理28.4及条件数学期望性质可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[f(X_{t+s}^{0,x})|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_{t+s}^{t,X_t^{0,x}})|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}[f(F(X_t^{0,x},\omega))|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(F(y,\omega))|\mathcal{F}_t]|_{y=X_t^{0,x}} \\
&= \mathbb{E}[f(F(y,\omega))]|_{y=X_t^{0,x}} = \mathbb{E}[f(X_{t+s}^{t,y})]|_{y=X_t^{0,x}} \\
&= \mathbb{E}[f(X_s^{0,y})]|_{y=X_t^{0,x}} = \mathbb{E}^{X_t^{0,x}}[f(X_s)].
\end{aligned}$$

由此可知定理结论成立. □

显然马氏过程X_t的转移概率函数簇为

$$\{P(t,x,B), t \geq 0, x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(R)\}$$

其中$P(t,x,B) = \mathbb{Q}^x(X_t \in B) = \mathbb{P}(X_t^{0,x} \in B)$.

最后我们指出，由引理28.3可知时齐扩散过程是Feller过程，因此由定理25.1直接可得

推论28.6 时齐扩散过程是强马氏过程.

参考文献

[1] William, Feller. An introduction to probability theory and its applications (II). New York: John Wiley & Sons, 1971.

[2] Ross, Sheldom M. Introduction to Probability Models, Tenth Edition. Singapore: Elsevier, 2010.

[3] Karlin, Samuel and Tailor, Howard M. A First Course in Stochastic Processes. New York: Academic Press, 1975.

[4] Karatzas, Ioannis and Shreve, Steven E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer-Verlag, 1988.

[5] Durrett, Rick. Probability: Theory and Examples. New York: Springer-Verlag, 2010.

[6] Durrett, Rick. Essentials of Stochastic Processes. New York: Springer-Verlag, 2012.

[7] 钱敏平, 龚光鲁. 随机过程论(第二版). 北京: 北京大学出版社, 1997.

[8] 方兆本, 廖柏其. 随机过程(第二版). 北京: 科学出版社，2004.

[9] 何声武. 随机过程引论. 北京: 高等教育出版社, 1999.

[10] 严士健, 刘秀芳. 测度与概率. 北京: 北京师范大学出版社, 2003.