第10讲 线性空间与线性相关性

1 线性空间定义与性质

2 元素组的线性相关性

3 元素组间的线性表示

1 线性空间及其基本性质

定义10.1 设V是一个非空集合,K是一个数域,若

(1)存在V中任意两个元素到V中某个元素的对应,即对V中任意两元素α,β 在V中都有唯一的元素γ与它们对应．一般称该对应为加法(运算),γ称为α与β的和, 记做$\gamma=\alpha+\beta$. 要求此加法满足

(1.1)$\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (1.2)$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(1.3)V中存在一个元素θ,使得对任意$\alpha\in V$

$$\theta+\alpha=\alpha$$

(1.4)对V中任意元素α,存在一个元素$\beta\in V$,使得

$$\beta+\alpha=\theta.$$

(2)存在V中任一元素与K中任一元素到V中某个元素的对应,即对V中任一元素α与K中任一数k都有

V中唯一元素δ与它们对应.一般称此对应为数乘(运算), δ称为k与α的数量乘积,记做$\delta = k\alpha$. 要求数乘运算满足

(2.1)$1\alpha = \alpha$　　　　(2.2)$(kl)\alpha = k(l\alpha)$

(3)加法与数乘混合运算满足

(3.1)$(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$　(3.2)$k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$

此时,称V是数域K上的线性空间.若K为实(复)数域,简称V为实(复)线性空间.

注记 (1)通常称(1.3)中的元素θ为零(元素).

(2)通常称(1.4)中的元素β为α的负元素.

(3)加法与数乘的定义蕴含了加法与数乘的封闭性.

(4)在线性空间定义中并没有明确加法与数乘的运算法则.因此线性空间的形式多样.在具体检验时要先确定这两运算的法则.

例10.1数域K上所有n维向量构成的集合,记做K^n,按向量的加法与数乘为数域K上的线性空间.

例10.2 数域K上所有$m \times n$型矩阵的集合$K^{m\times n}$按通常的矩阵加法与数乘构成线性空间.

例10.3 数域K上多项式全体 $K[x]$或次数小于n的多项式全体与0构成的集合$K_n[x]$, 按多项式的加法与数乘都构成线性空间.

例10.4 区间$[a,b]$上全体实值连续函数构成的集合,按函数的加法与数乘构成实线性空间,通常记做$C[a,b]$.

以上例子中的加法与数乘都是所熟知的,具体的验证也比较简单,请同学自行完成.

例10.5 全体正实数的集合记做R^+,在其上定义加法及数乘运算分别如下

$$a \oplus b = ab, \quad k \circ a = a^k \quad (k \in R, a, b \in R^+)$$

则在给定加法与数乘运 算下R^+为实线性空间.

证明 显然对任意$a, b \in R^+$及$k \in R$,

$$a \oplus b \in R^+ \quad 以及 \quad k \circ a \in R^+.$$

因此只需要验证定义中相关运算性质成立.

(1.1)$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$

(1.2)$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus bc = abc = ab \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$

(1.3)取$\theta = 1$,则对$\forall a \in R^+, \theta \oplus a = 1 \oplus a = a$

(1.4)对$\forall a \in R^+, a^{-1} \oplus a = a^{-1}a = 1$, a^{-1}为a的负元素.

(2.1)$1 \circ a = a$

(2.2)$(kl) \circ a = a^{kl} = (a^l)^k = k \circ a^l = k \circ (l \circ a)$

(3.1)$(k + l) \circ a = a^{k+l} = a^k a^l = (k \circ a) \oplus (l \circ a)$

(3.2)$k \circ (a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = (k \circ a) \oplus (k \circ b)$

所以R^+对于所定义的运算是实 线性空间.

性质10.1 设V是数域K上的线性空间,$\alpha \in V$,那么

(1)V中零元素θ唯一; (2)α的负元素唯一,记做$-\alpha$;

(3)$0\alpha = \theta, k\theta = \theta, (-1)\alpha = -\alpha$;

(4)$k\alpha = \theta$则$k = 0$或$\alpha = \theta$.

证明 (1)设θ_1, θ_2是V的两个零元素,则

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$$

(2)设β, γ是α的两个负元素,则

$$\beta = \theta + \beta = (\gamma + \alpha) + \beta = \gamma + (\alpha + \beta) = \gamma + \theta = \gamma.$$

(3) $\quad 0\alpha = \theta + 0\alpha = -\alpha + (1 + 0)\alpha = -\alpha + \alpha = \theta$

$$(-1)\alpha = \theta + (-1)\alpha = -\alpha + (\alpha + (-1)\alpha) = -\alpha.$$

$$k\theta = k(-\alpha + \alpha) = k((-1)\alpha) + k\alpha = -k\alpha + k\alpha = (-k + k)\alpha = 0\alpha = \theta$$

(4)若$k \neq 0$,则$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}\theta = \theta$.

例10.6 数域K上n维向量的集合,按通常向量的加法以及如下定义的数乘:

$$k\circ(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

不构成线性空间. 因为

$$0\circ(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\neq\theta.$$

注记与说明 通常人们也称线性空间 的元素为向量. 自然地,线性空间有时也称为向量空间. 显然此向量/向量空间与此前所学向量/向量空间无论形式与内涵都有较大的扩展与延伸,为免初学时混淆,本课程不用这些术语. 此后,若线性空间未明确,以小写希腊字母α,β等表示其元素,其中θ表示零元素. 对数域中的数常以小写字母a,b等表示. 简称由有限个元素构成的集合为元素组.

2 线性相关性

定义10.2 设V是数域K上的线性空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为$V$中一组元素,若$K$中存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得元素$\alpha$满足

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称α能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出(线性表示), 或称α为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的一个线性组合,$k_1,k_2,\cdots,k_m$称为该线性组合的系数. 若K中存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_m$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta.$$

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关, 否则称线性无关.

注记 (1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$中任一元素α_j都可用该元素组线性表示.

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow k_1=\cdots=k_m=0$时才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta.$$

(3) 任一元素组,要不线性无关要不线性相关,且线性相关与否与元素组中 元素次序无关.

(4)零元素θ可表示成任意元素组的线性组合; 任何含零元素的元素组线性相关;单个元素 α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=\theta$.

例10.7 在线性空间$K^{2\times 2}$中,元素组

$$I_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ I_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},I_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},I_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

线性无关. $K^{2\times 2}$中元素都可由该元素组 线性表示.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

但元素组$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\1&1\end{pmatrix}$线性相关.

例10.8 $K_n[x]$中元素组$1,x,\cdots,x^{n-1}$线性无关,因为

$$k_0+k_1x+\cdots+k_{n-1}x^{n-1}=0\Leftrightarrow k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0.$$

例10.9验证例10.5线性空间R^{+}中任意两元素必线性相关. 事实上对任意$\alpha,\beta\in R^{+},k_1,k_2\in R$ 由

$$\alpha^{k_1}\beta^{k_2}=(k_1\circ\alpha)\oplus(k_2\circ\beta)=\theta=1$$

可得 若$\alpha=1$,可取$k_1=1,k_2=0$,

若$\alpha\neq 1$,可取$k_1=-\ln\beta/\ln\alpha,k_2=1$

使上式成立.从而α,β线性相关性得到验证.

需要提醒的是线性相关性与数域有关. 比如在实数域R和复数域C下都容易验证复数集 C按通常数的加法与乘法是线性空间.但元素$1,i$在实数域下线性无关,而在复数域下线性相关 .

无特别说明,此后 我们总约定在数域 K下讨论.

定理10.1 元素组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,(m\geq 2)$,线性相关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中至少有一个元素可由其它$m-1$个元素线性表示 .

由一个元素组中的一部分元素构成的元素组称为原元素组的部分组.

命题10.1 若元素组存在线性相关的部分组,那么元素组本身线性相关.反之若元素组线性无关,则其任意部分组也线性无关.

定理10.2 若元素组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,而元素组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关,则元素 β必能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示且表示式是唯一 的.

证明 由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关可知,存在不全为零常数$k_1,\cdots,k_m$以及l,使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+l\beta=\theta$.

若$l=0$,则$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\theta$且$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为0.与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关矛盾.因此$l\neq 0$. 此时

$$-\tfrac{k_1}{l}\alpha_1-\tfrac{k_2}{l}\alpha_2-\cdots-\tfrac{k_m}{l}\alpha_m=\beta.$$

因此β能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.下证表示的唯一性 .

若β可表示成

$$\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m$$

以及

$$\beta=d_1\alpha_1+d_2\alpha_2+\cdots+d_m\alpha_m$$

那么

$$\theta=(c_1-d_1)\alpha_1+(c_2-d_2)\alpha_2+\cdots+(c_m-d_m)\alpha_m$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关可知

$$c_1=d_1,c_2=d_2,\cdots,c_m=d_m.$$

因此β由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示的方法唯一.

3 元素组间的线性表示

定义10.3 设有两个元素组

$$(I):\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \text{及} (II):\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s.$$

若(II)中的每个元素都能由元素组(I)线性表示,则称元素组(II)能被元素组(I)线性表示.若元素组$(I),(II)$能相互线性表示,则称这两个元素组等价.

例10.10 在线性空间$K_4[x]$中,元素组(I):

$$1+x^2, x^2+x, 1-x, x^3$$

能被元素组(II):$1,x,x^2,x^3$线性表示.反之不真.?

例10.11 在线性空间$K^{2\times 2}$中,以下两组元素等价

$$I_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, I_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, I_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, I_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$G_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, G_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, G_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, G_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

为了便于表示元素的线性组合与元素组之间的线性表示, 我们先引入一些形式记法.

若元素β可表示 $\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m$ 那么我们可以形式地记成

$$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$$

注记 这种记法只是形式的 ,因为对线性空间的元素组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$,一般而言,符号$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$未必是矩阵, 但记法上把它看作(分块)行矩阵,并借用矩阵乘法表示.

类似,对多个元素

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{m1}\alpha_m\\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{m2}\alpha_m\\ \cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_m\end{cases}$$

我们可以形式地记成

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)(a_{ij})_{m\times n}$$

此时称矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$为此线性表示的系数矩阵.

性质10.2 对此形式记法,下面的运算规律成立.
(其中A,B为矩阵且满足相应运算条件)

(1)$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)B$
$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)(A+B)$.

(2)$[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A]B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)(AB)$.

(3)$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$
$=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m)A$.

(4)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,那么
$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)B\Rightarrow A=B$.

性质的检验留作练习请 同学自己完成 .

推论 若A可逆则由$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$
可得$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A^{-1}$.从而若元素组
$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$能被元素组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示且该表示的系数矩阵可逆,那么这两组元素等价.

进一步由性质10.2可得元素组之间的等价 满足

(1)反身性 (2)对称性 (3)传递性

定理10.3 若元素组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关, A为方阵且

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$$

那么若A可逆当且仅当$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关.

证明 记$x=(x_1,\cdots,x_m)^T$.由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关可知

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)Ax=\theta\Leftrightarrow Ax=0.$$

再由 $x_1\beta_1+\cdots+x_m\beta_m=(\beta_1,\cdots,\beta_m)x=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)Ax$
可得 $\theta=x_1\beta_1+\cdots+x_m\beta_m\Leftrightarrow Ax=0$. 因此
$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关$\Leftrightarrow Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow A$可逆.

课后练习

1.对所给运算以下集合是 否为相应数域上线性空 间?

a)数域K上n阶对称(反对称)矩阵的集合,对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法;

b)数域K上二维向量的集合,加法与数乘运算定义为

$$(a,b)^T \oplus (c,d)^T = (a+c, b+d+ac)^T$$

$$k \circ (a,b)^T = (ka, kb+\tfrac{k(k-1)}{2}a^2)^T$$

2.证明在1.b)线性空间中,向量$(1,1)^T,(2,2)^T$线性无关.

3.判断线性空间$K_4[x]$中多项式

$$f_1(x)=x^3+6x+1,\ f_2(x)=2x^3-x^2+1,$$
$$f_3(x)=2x^2-x+1,\ f_4(x)=2x^2+1$$

的线性相关性.

4.证明性质10.2.

第11讲 极大无关组与线性空间的基

1 极大无关组与秩

2 线性空间的基与维数

3 线性空间元素坐标

1 极大无关组与秩

定义11.1 非零元素组的一个部分组称为该元素组的极大无关组，如果此部分组线性无关 且从原元素组的剩余元素(如果还有)中任取一个添进去后所得部分组总线性相关．

显然线性无关元素组的 极大无关组就是其本身．

由定理10.2及定义11.1容易证明

定理11.1 假定元素组(I): $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$是元素组$(II)$: $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关部分组．那么元素组(I)是元素组(II)极大无关组的充要条件是元素组(II)中每个元素都能被元素组(I)线性表出.

注记 定理表明元素组与其极大无关组等价.

同一元素组的任意两个极大无关组必等价.

例11.1 在$K[x]$中,取元素组

$$\alpha_1=1,\alpha_2=x^2,\alpha_3=1+x^2,\alpha_4=2x^2-3$$

则部分组α_1,α_2线性无关 且

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2 \qquad \alpha_4=2\alpha_2-3\alpha_1$$

因此α_1,α_2是元素组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组.

同样可验证元素组α_1,α_3,元素组α_2,α_3等也是极大无关组.

定理11.2 非零元素组的任一线性无关部分组都可扩充为该元素组的极大 无关组.

证明 设线性无关部分组为$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$.重排该非零元素组元素次序后 记其为$\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\cdots,\alpha_s$,其中$t\le s$.

令$n_1=1$,对$k>1$可依次如下定义n_k

$$n_k=\min\{i: s\ge i>n_{k-1}\text{且}\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_{k-1}},\alpha_i\text{线性无关}\}$$

直至某个r使得

$$\{i: s\ge i>n_r\text{且}\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r},\alpha_i\text{线性无关}\}=\varnothing. \quad (1)$$

注意到$n_k<n_{k+1}$以及s有限, r必然存在且$r\le s$.

由n_k定义表达式以及$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$线性无关性可知

$$n_1=1,n_2=2,\cdots,n_t=t.$$

因此$r\ge t$,且$\alpha_{n_1},\alpha_{n_2},\cdots,\alpha_{n_r}$确由$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$扩充所得.

再由n_r定义表达式可知$\alpha_{n_1},\alpha_{n_2},\cdots,\alpha_{n_r}$线性无关

此时在$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$除去$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r}$后剩下的元素中任取一个$\alpha_k$,则存在$t\le i\le r$使得

$$n_i<k<n_{i+1} \quad (\text{其中}n_{r+1}\text{规定为}s)$$

由n_{i+1}的定义或(1)式可知$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_i},\alpha_k$线性相关,进而$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r},\alpha_k$线性相关. 即$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r}$为极大无关组.

注记 定理11.2表明任意非零元素组一定有极大无关组,且可按证明方法找到一组极大无关组.

定义11.2 称非零元素组的任一极 大无关组中元素个数为该元素组的秩．零元素组的秩规定为 0.

定理11.3 设元素组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关且能由元素组$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示,即存在$k_{ij},i=1,\cdots,t,j=1,\cdots,s$

$$\alpha_j = k_{1j}\beta_1 + k_{2j}\beta_2 + \cdots + k_{tj}\beta_t. \qquad (2)$$

记$A=(k_{ij})_{t\times s}$,那么$r(A)=s\le t$.

证明 由(2)得$\sum_{j=1}^{s} x_j\alpha_j = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{t} x_j k_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{t}(\sum_{j=1}^{s} k_{ij}x_j)\beta_i$

因此若方程组 $\sum_{j=1}^{s} k_{ij}x_j = 0, i=1,2,\cdots t$, 即$Ax=0$有非零解$(x_1,\cdots,x_s)^T$,那么

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \theta.$$

这与$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关矛盾.因此$A_{t\times s}x=0$只有零解.所以$s=r(A)\le t$.

由定理11.3及极大无关组间的等价 性可知任意元素组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的秩唯一,记做$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$.

推论1 设元素组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$能由元素组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示,则 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_m)$.

推论2 等价的元素组有相同的秩.

推论3 元素组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)<n$.

推论4 设元素组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$能由元素组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$线性表示,且$m<n$, 那么$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关.

推论5 若两个元素组的秩相同且其中一个元素组能被另一个元素组线性表 示,则此两元素组等价.

2 线性空间的基与维数

定义11.3 设V是数域K上的线性空间,如果V中存在n个线性无关元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$,且$V$中任一元素都可由这$n$个元素线性表示,那么称$V$为$n$维线性空间,$n$称为$V$的维数.$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$称为空间$V$的一组基.

如果对任意正整数N,V中都能找到N个线性无关元素,则称V为无穷维线性空间.

如果V中无线性无关元素,则称V为0维线性空间.

注记 (1)0维线性空间V没有基且$V=\{\theta\}$.

(2)统称维数有限的线性空 间为有限维线性空间.

由定义11.3可知,有限维空间V的基必线性无关且相相互等价.因此由定理11.3,V的任一组基中所含元素个数相同,从而V的维数唯一,记其为$\dim V$.

例11.2 数域K上的n维向量空间K^n为n维线性空间.

例11.3 由例10.7,元素组

$$I_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},I_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},I_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},I_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

为$K^{2\times2}$的一个线性无关组,且$K^{2\times2}$中任意元素都可由这4个元素线性表示,因此$\dim K^{2\times2}=4$,且元素组$I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}$为$K^{2\times2}$一组基.

一般地,可验证$K^{m\times n}$为mn维线性空间,元素组

$$I_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$$

为$K^{m\times n}$的一组基,其中I_{ij}表示(i,j)位置元素为1其它元素为0的$m\times n$矩阵.

例11.4 由例10.8元素组$1,x,\cdots,x^{n-1}$为$K_n[x]$的线性无关组而且$K_n[x]$中任意多项式$f(x)$总可表示成

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}.$$

因此$\dim K_n[x]=n$且$1,x,\cdots,x^{n-1}$为$K_n[x]$一组基.

例11.5 对任意给定的正整数N,在线性空间$K[x]$中能找到N个线性无关元素:$1,x,x^2,\cdots,x^{N-1}$. 因此$K[x]$是无穷维线性空间.

例11.6 $C[a,b]$为无穷维线性空间,因为$R[x]\subset C[a,b]$.

注记 (1)存在无穷维线性空间是线性空间较以前向量量空间复杂的一个体现.由于对无穷维线性空间研究涉及更深的分析知识, 本课程主要研究有限维 情形.

(2)线性空间维数与数域有关. 如复数集C看作实数R下的线性空间是 2维空间,但看作复数 C下的线性空间是1维空间.

按此前约定,无特别说明,讨论在数域 K下进行.

性质11.1 n维线性空间中任意$n+1$个元素必线性相关.

证明 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为空间一组基,$\beta_1,\cdots,\beta_{n+1}$为任取的$n+1$个元素 则元素组$\beta_1,\cdots,\beta_{n+1}$能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表示 由定理11.3的推论3可知$r(\beta_1,\cdots,\beta_{n+1})\le n$. 因此元素组$\beta_1,\cdots,\beta_{n+1}$线性相关.

定义11.4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为线性空间$V$中的一组元素

$$S=\{x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in K\}$$

容易验证S为K上线性空间. 称其为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$张成的线性空间,记做$L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$.

性质11.2 (1)$\dim L\{\alpha_1,\cdots\alpha_m\}=r(\alpha_1,\cdots\alpha_m)$.

(2)若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$能被$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示,则

$$L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\subset L\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

证明留作练习请大家自行完成.

命题11.1 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为线性空间$V$的一组基,那么对任意$\alpha\in V$存在唯一线性表示

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,\quad k_1,k_2,\cdots,k_n\in K$$

进而$V=L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$.

证明 已知$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为空间V的一组基,因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关,但对任意$\alpha\in V$,元素$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha$线性相关.由定理10.2知,$\alpha$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表示唯一.即存在唯一一组数$k_1,k_2,\cdots,k_n\in K$使得

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n.$$

由此可得

$$V\subset\{k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\mid k_1,\cdots,k_n\in K\}$$

显然,反向包含由加法与数乘运算封闭性可得.所以

$$V=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_n\mid k_1,\cdots,k_n\in K\}=L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}.$$

定理11.4 n维线性空间V的任一线性无关组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$都能扩充为空间一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

证明 当$m=n$时任取$\alpha\in V$,由性质11.1,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha$线性相关.由定理10.2,$\alpha$总能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表示.此时$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$就是$V$的一组基.

当$m<n$时,若$V=L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$,那么$\dim V=m<n$,矛盾!于是存在$\alpha_{m+1}\in V\setminus L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$.此时$\alpha_{m+1}$不能被$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.但$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关,由定理10.2 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$必线性无关.如此继续,可得$\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关.由$m=n$时的论证可知此即为空间$V$的一组基.

推论 n维线性空间中任意n个线性无关元素都是该空间的一组基.

例11.7 取$K_4[x]$中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$及$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$如下：

$$\begin{cases}\alpha_1=x^3+2x^2-x\\ \alpha_2=x^3-x^2+x+1\\ \alpha_3=-x^3+2x^2+x+1\\ \alpha_4=-x^3-x^2+1\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_1=2x^3+x^2+1\\ \beta_2=x^2+2x+2\\ \beta_3=-2x^3+x^2+x+2\\ \beta_4=x^3+3x^2+x+2\end{cases}$$

证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$均为$K_4[x]$的基.

证明 选$K_4[x]$中一组基$1,x,x^2,x^3$.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&1&1&0\\2&-1&2&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$$

直接验证可知$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&1&1&0\\2&-1&2&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$可逆，由定理10.3可知

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，从而为$K_4[x]$的一组基.

同样可验证$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$K_4[x]$的一组基.

3 线性空间元素坐标

定义11.4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为线性空间$V$的一组基，对对任意$\alpha\in V$都可唯一地表示为

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,\quad k_1,k_2,\cdots,k_m\in K$$

称数组$k_1,k_2,\cdots,k_m$为元素α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$下的坐标，记做$(k_1,k_2,\cdots,k_m)^T$.

例11.7 由例11.3, $1,x,\cdots,x^{n-1}$为线性空间$K_n[x]$的一组基，在该组基下，$K_n[x]$中多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

的坐标为$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^T$.

特别$K_4[x]$中多项式

$$f(x)=4+3x+2x^2+x^3$$

在基$1,x,x^2,x^3$下的坐标为$(4,3,2,1)^T$.

例11.8在$K^{2\times 2}$中,矩阵$A=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$在基$I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}$下的坐标为$(4,3,2,1)^T$.同时容易验证

$$G_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ G_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},G_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ G_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

也是$K^{2\times 2}$的一组基,在该组基下仍有

$$A=k_1G_1+k_2G_2+k_3G_3+k_4G_4$$

即
$$\begin{aligned}k_1+k_2+k_3+k_4&=4\\k_2+k_3+k_4&=3\\k_3+k_4&=2\\k_4&=1\end{aligned}$$

解得$k_1=k_2=k_3=k_4=1.$

即A在基G_1,G_2,G_3,G_4下的坐标为$(1,1,1,1)^T$.

课后练习

1.设V为数域K上线性空间,$\alpha_i,\beta_j\in V,i,j=1,2,\cdots,n$

且
$$\begin{aligned}\beta_1&=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}-\alpha_n\\\beta_2&=\alpha_1+\alpha_2+\cdots-\alpha_{n-1}+\alpha_n\\&\cdots\cdots\cdots\\\beta_{n-1}&=\alpha_1-\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n\\\beta_n&=-\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n\end{aligned}$$

证明$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\cdots,\beta_n)$.

2.求数域K上三阶反对称矩阵按通常矩阵加法与数乘所构成线性空间的基与维数.

3.证明$1,x-1,(x-1)(x-2)$为$K_3[x]$的一组基并求多项式在该组基下的坐标.

4.证明性质11.2.

第12讲 坐标变换与空间同构

1 线性空间坐标变换

2 线性空间与向量空间

3 线性空间同构

1 坐标变换公式

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$为线性空间$V$的两组基,因而等价.存在数$c_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$使得

$$\begin{cases}\beta_1=c_{11}\alpha_1+c_{21}\alpha_2+\cdots+c_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=c_{12}\alpha_1+c_{22}\alpha_2+\cdots+c_{n2}\alpha_n\\ \cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=c_{1n}\alpha_1+c_{2n}\alpha_2+\cdots+c_{nn}\alpha_n\end{cases}\quad(1)$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\ c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\quad(2)$$

定义12.1 称矩阵$C=(c_{ij})_{n\times n}$为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵. 称(1)或(2)为基变换公式.

定理12.1 假设n维线性空间V中基$(I):\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到基$(II):\beta_1,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$C=(c_{ij})_{n\times n}$. 设$\alpha\in V$在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下坐标为 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, 在基$\beta_1,\cdots,\beta_n$下坐标为 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 那么C可逆且

$$x=Cy \quad 或 \quad y=C^{-1}x. \qquad (3)$$

式(3)统称为坐标变换公式,其中前一个称为基(II)到基(I)的坐标变换公式,后一个称为基(I)到基(II)的坐标变换公式.

证明 若C不可逆,则齐次方程组$Cx=0$有非零解,即存在$x_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})^T\neq 0$,使得$Cx_0=0$.于是

$$x_{10}\beta_1+x_{20}\beta_2+\cdots+x_{n0}\beta_n=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)x_0$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Cx_0=\theta$$

与$\beta_1,\cdots,\beta_n$为基从而线性无关矛盾.因此C可逆.

又因为 $\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)y$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Cy,$$

而且 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x.$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为基从而线性无关，所以

$$x=Cy或y=C^{-1}x.$$

例12.1求例11.7中基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵.

解由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的表示可知

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(1,x,x^2,x^3)A$$
$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(1,x,x^2,x^3)B$$

其中$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&1&1&0\\2&-1&2&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&2&1&1\\1&1&1&3\\2&0&-2&1\end{pmatrix}$, A,B均可逆.

因此

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&2&1&1\\1&1&1&3\\2&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

例11.9 在$K^{2\times 2}$中取两组基

$$(I)\ G_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},G_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},G_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},G_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$(II)\ B_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},B_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

求(1)基(II)到基(I)的坐标变换

(2)在两个基下坐标都相同的所有矩阵.

解 取$K^{2\times 2}$的基$I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}$. 存在矩阵

$$G=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

使得 $(G_1,G_2,G_3,G_4)=(I_{11},I_{12},I_{21},I_{22})G$

$(B_1,B_2,B_3,B_4)=(I_{11},I_{12},I_{21},I_{22})B$

因此基(I)到基(II)的过渡矩阵为

$$C=G^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&0&0&1\\0&0&1&-1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

从基(II)到基(I)的坐标变换为 $x=Cy$, 即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&0&0&1\\0&0&1&-1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

(2)设$A \in K^{2\times 2}$在基(I),基(II)下的坐标都是

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$$

由基坐标公式 $x=Cx$

即 $(I-C)x=0.$

对矩阵$(I-C)$做初等行变换得

$$I-C=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&-1\\0&0&0&1\\-1&-1&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程通解为 $x_1=x_2=x_4=0, x_3=k\in K$

因此在两组基下有相同坐标的矩阵为

$$A=0G_1+0G_2+kG_3+0G_4=\begin{pmatrix}k&k\\k&0\end{pmatrix}, k\in K.$$

2 线性空间与向量空间

设V是数域K上线性空间 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为空间一组基,利用坐标概念,我们可以把$V$中任一向量$\alpha$与其坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$在如下意义下建立起一对一的对应.

$$\alpha \leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n \leftrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \quad (4)$$

在此对应下容易验证:

若$\alpha \leftrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\beta \leftrightarrow (y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,

则 $\alpha+\beta \leftrightarrow (x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^T$,

$k\alpha \leftrightarrow (kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)^T$.

定理12.2 设n维线性空间V的元素组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标分别为 $b_1=(b_{11},b_{21},\cdots,b_{n1})^T$, $b_2=(b_{12},b_{22},\cdots,b_{n2})^T,\cdots,b_m=(b_{1m},b_{2m},\cdots,b_{nm})^T$ 那么元素组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关当且仅当向量组$b_1,b_2,\cdots,b_m$线性相关.

证明 由假设

$$\beta_i = b_{1i}\alpha_1 + b_{2i}\alpha_2 + \cdots + b_{ni}\alpha_n, \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

因此 $x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m = (\beta_1,\cdots,\beta_m)x = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Bx$, 其中$B = (b_{ij})_{n\times m}$, $x = (x_1,\cdots,x_m)^T$.由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关可知 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)Bx = \theta \Leftrightarrow Bx = 0$.因此

$$\theta = x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m \Leftrightarrow Bx = 0.$$

故而

$$\beta_1,\cdots,\beta_m\text{线性相关} \Leftrightarrow Bx = 0\text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow r(B) < m \Leftrightarrow \text{向量组}b_1,b_2,\cdots,b_m\text{线性相关}.$$

注记 定理表明,以坐标为中介,线性空间元素组与坐标构成的向量组有相同的线性结构. 因此直观地说,在考察有限维线性空间的线性结构时可以用与它相同维的向量空间在“坐标对应”意义下“代替”.

例12.3 求$K^{2\times2}$中矩阵组$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$的秩和一组极大无关组,并将非极大无关组元素用极大无关组线性表示.

解 取$K^{2\times2}$中一组基 $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$,矩阵$A_1,A_2,A_3,A_4$在这组基下坐标依次为

$$a_1 = (2,1,-1,3)^T, a_2 = (1,1,-3,3)^T,$$

$$a_3 = (1,0,2,0)^T, a_4 = (3,1,1,3)^T.$$

对矩阵(a_1,a_2,a_3,a_4)做初等行变换得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此该元素组秩为2,部分组A_1,A_2为极大无关组,

$$A_3 = A_1 - A_2; A_4 = 2A_1 - A_2.$$

3 线性空间的同构

先回忆一些映射的基本概念.

定义12.2 设M,M'是两个非空集合,所谓集合M到M'的一个映射是指一个对 应法则,按照这个法则,M中每个元素都有M'中一个确定的元素与它 对应.如果映射T使M中元素α与M'中元素β相对应, 则称β是α在映射T下的象,α称为β的原象,记做$\beta=T(\alpha)$.称T所有象构成的集合为T的值域,记做$R(T)$,即

$$R(T)=\{\beta\mid\beta=T(\alpha),\alpha\in M\}.$$

M称为T的原象集(定义域).若T,S都是M到M'的映射且对任意$\alpha\in M,T(\alpha)=S(\alpha)$,称$T$和$S$相等,记做$T=S$.

注记对任意从M到M'映射,M中每个元素α都有且只有一个象$\beta\in M'$;但M'中元素未必都有原象,即使有,原象也未必唯一.此外,从M到M的映射也称为变换.

定义12.3 设T是M到M'的映射.

(1)如果M'中每个元素β都有原象,即存在$\alpha\in M$使得$T(\alpha)=\beta$,则称T为满射.

(2)若M中不同元素对应不同的象,即 $T(\alpha)=T(\beta)\Leftrightarrow\alpha=\beta$,则称$T$为单射(一一的).

(3)若T既是单射又是满射则称T为一一映射(一一对应,双射).

(4)如果T是从M到M的映射,且将M中任意元素都对应到自身,即对任意$\alpha\in M,T(\alpha)=\alpha$,则称$T$为恒等映射(单位映射),记做$I_M$或简记为$I$.

定义12.4 设T,S分别是M到M',M'到M''的映射,定义M到M''的一个映射使得 $\alpha\in M$的象为$S(T(\alpha))$,称此映射为S与T的乘积(复合),记做ST,即

$$ST(\alpha)=S(T(\alpha)).$$

定义12.5 设T是M到M'的映射,如果存在一个M'到M的映射S使得$TS=I_{M'}$且$ST=I_M$. 则称T是可逆映射并称S是T的逆映射,记做T^{-1}.

T可逆当且仅当T是一一映射. 此时$(T^{-1})^{-1}=T$.

定义12.6设V及V'均为数域K上的线性空间,如果存在V到V'的一一映射T使得 对任意$\alpha,\beta\in V,k\in K$,

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta),\quad T(k\alpha)=kT(\alpha). \qquad (7)$$

则称T为同构映射,而称线性空间V,V'同构.

注记 注意区分(7)中等号两边的加法与数乘运算.

定理12.3 任意n维线性空间V都与向量空间K^n同构.

证明 任意取定V的一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,按对应关系(4)建立V到K^n的映射T. 显然T是双射,由对应式(5)与(6)得T为同构映射,因此V与K^n同构.

性质12.1设T是从线性空间V到V'的同构映射,那么

(1)$T(\alpha)=\theta'\Leftrightarrow\alpha=\theta$; ($\theta'$为$V'$中零元素)

$T(\beta)+T(\alpha)=\theta'\Leftrightarrow\beta=-\alpha$;

(2)$T(\beta)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_mT(\alpha_m)\Leftrightarrow\beta=k_1\alpha+\cdots+k_m\alpha_m$.

(3)$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_m)$线性相关.

证明 注意T为单射,$T(\alpha)=T(\beta)\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

(1)$\theta'=0T(\alpha)=T(0\alpha)=T(\theta)$可知$T(\alpha)=\theta'\Leftrightarrow\alpha=\theta$;

$\theta'=T(\beta)+T(\alpha)=T(\beta+\alpha)\Leftrightarrow\beta+\alpha=\theta\Leftrightarrow\beta=-\alpha$

(2)$T(\beta)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_mT(\alpha_m)=T(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)$

$\Leftrightarrow\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$.

(3)$\theta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\Leftrightarrow T(\theta)=T(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)$

$\Leftrightarrow\theta'=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_mT(\alpha_m)$.

因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_m)$线性相关.

注记 (1)同构线性空间中的元素有相同的线性关系.
(2)同构的有限维线性空间有相同的维数,因为维数只是线性空间中线性无关元素的最大个数.

性质12.2 同构映射的逆映射还是 同构映射.

证明 显然同构映射T的逆映射T^{-1}是V'到V的双射.
对任意$\alpha',\beta'\in V',k\in K$,由

$$T(T^{-1}(\alpha'+\beta'))=\alpha'+\beta'=T(T^{-1}(\alpha')+T^{-1}(\beta'))$$

可知 $T^{-1}(\alpha'+\beta')=T^{-1}(\alpha')+T^{-1}(\beta')$

再由 $T(kT^{-1}(\alpha'))=kT(T^{-1}(\alpha'))=k\alpha'=T(T^{-1}(k\alpha'))$可知
$kT^{-1}(\alpha')=T^{-1}(k\alpha')$. 因此$T^{-1}$为同构映射.

此外容易证明(请同学自己完成)

性质12.3 若T,S分别是V到V',V'到V''的同构映射,那么乘积ST是V到V''的同构映射.

推论 线性空间的同构满足反身性, 对称性与传递性.

结合定理12.3可得

定理12.4 数域K上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

注记 直观而言,同构空间有相同线性结构, 定理12.4说明, 空间线性结构的本质特征是空间维数; 同维线性空间, 尽管构造不同,若仅考虑线性结构,本质相同.

例12.4 R按数的加法和乘法为实 线性空间,令$V=R$, $V'=R^+$为例10.5中实线性空间, 验证V与V'同构.

解: 建立$R\to R^+$的映射 $T:a\to e^a$, 即$T(a)=e^a,a\in R$.
T为双射: 若$a\neq b,T(a)=e^a\neq e^b=T(b)$,
若$c\in R^+$,令$d=\ln c\in R$,则$T(d)=e^d=c$.

此外, $T(a+b)=e^{a+b}=e^ae^b=T(a)\oplus T(b)$;
$T(ka)=e^{ka}=(e^a)^k=k\circ T(a)$.

因此V与V'同构.

课后练习

1.若T,S分别是集合M到M',M'到M''的一一映射.
证明ST是M到M''的一一映射.

2.已知$K_4[x]$上的一组基(I):$1,x,x^2,x^3$,证明元素组
(II):$1,1+x,(1+x)^2,(1+x)^3$也是$K_4[x]$的一组基,
并求出基(II)到基(I)的过渡矩阵以及

$$f(x)=1+3x+5x^2+7x^3$$

在基(II)下的坐标.

3.求矩阵组 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\4&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&-3\\9&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\6&-5\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&-5\\7&5\end{pmatrix}$
的秩以及一个极大无关组,并将非极大无关组的元素用该极大无关组线性表 示.

4.设V_1,V_2是数域K上两个n维线性空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$为V_1线性无关组,$\beta_1,\cdots,\beta_s$为V_2线性无关组.证明存在V_1到V_2同构映射σ使得$\sigma(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,\cdots,s$.

第13讲 子空间及其交与和

1 线性子空间

2 子空间的交

3 子空间的和

4 子空间的直和

1 线性子空间

定义13.1 设V是数域K上的线性空间,W是V的一个非空子集合,若W按照V中定义的加法与数乘运算封闭,即对任意$\alpha,\beta\in W$及$k\in K$,$\alpha+\beta\in W$且$k\alpha\in W$,则称W为V的线性子空间,简称为子空间.

注记 直接验证可知W上按V定义的加法与数乘满足满足线性空间定义中的8条运算规律,因而W按这些运算规律构成线性空间.

例13.1 对任意线性空间V,其自身以及集合$\{\theta\}$及都是V的子空间.称这两个子空间为V的平凡子空间, 其他可能的子空间称为非平凡子空间或真子空间.

例13.2 任取V中非零元素$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$为$V$的子空间,若$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$不是$V$的一组基,则$L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$为$V$的真子空间.

例13.3 设$A\in K^{m\times n}$,方程$Ax=0$的解空间$\{x\,|\,Ax=0\}$为K^m的子空间,通常记作$N(A)$,称为A的核或零空间. A的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$所张成的空间$L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$为是$K^n$的子空间,称为$A$的列空间或值域,记作$R(A)$.

$$R(A)=\{\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_m\in R\}$$
$$=\{\beta=Ax\,|\,x\in R^m\}.$$

由A^T的列向量,即A行向量(转置)所张成的空间为K^m的子空间,称为A的行空间,记作$R(A^T)$.方程$A^Tx=0$的解空间$\{y\,|\,A^Ty=0\}=\{y\,|\,y^TA=0\}$为$K^n$的子空间称为$A$的左零空间,记做$N(A^T)$.

由性质11.2可知 $\dim(R(A))=r(A)$,
$$\dim(R(A^T))=r(A^T)=r(A)$$
因此由齐次线性方程组的维数定理可得
$$\dim(N(A))+\dim(R(A))=m$$
$$=\dim(N(A))+\dim(R(A^T)).$$

例13.4 线性空间$K_n[x]$是线性空间$K[x]$的子空间.

例13.5 线性空间$K^{n\times n}$的子集
$$SK^{n\times n}=\{A\,|\,A^T=A,A\in K^{n\times n}\}$$
为$K^{n\times n}$的子空间. 容易验证矩阵组
$$F_{ij}=I_{ij}+I_{ji},\ i<j\le n,\quad F_{ii}=I_{ii},\ \ i=j$$
为$SK^{n\times n}$的一组基,从而
$$\dim SK^{n\times n}=n(n+1)/2.$$

由定理11.4易得

定理13.1 有限维线性空间任何非零子空间的一组基都可扩充为该线性空间的一组基.即若V为有限维线性空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$为其子空间V_1的一组基,那么一定能在V中找在另外的元素$\beta_1,\cdots,\beta_r$使得
$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$$
为V的一组基.

2 子空间的交

定义13.2 若V_1,V_2为线性空间V的子空间,那么称集合$V_1\cap V_2$为子空间V_1,V_2的交.

性质13.1 若V_1,V_2为V的向量子空间,那么$V_1\cap V_2$仍为V的线性子空间.

证明 由$\theta\in V_1,\theta\in V_2$可知$\theta\in V_1\cap V_2$,从而$V_1\cap V_2$非空.
任取$\alpha,\beta\in V_1\cap V_2$以及$k\in K$,由$V_1,V_2$均为子空间可知

$$\alpha+\beta\in V_1,k\alpha\in V_1\text{以及}\alpha+\beta\in V_2,k\alpha\in V_2$$

从而 $$\alpha+\beta\in V_1\cap V_2,k\alpha\in V_1\cap V_2.$$

即$V_1\cap V_2$关于加法与数乘封闭 ,为线性子空间.

例13.6 设$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$
令$V_1=L\{\alpha_1,\alpha_2\},V_2=L\{\alpha_1,\alpha_3\}$, 则$V_1\cap V_2=L\{\alpha_1\}$.
V_1,V_2以及$V_1\cap V_2$均是K^3的子空间.

例13.7 取$K^{2\times2}$中矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&1\\-3&3\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$$

令$V_1=L(A_1,A_2),V_2=L(A_3,A_4)$,求$V_1\cap V_2$.

解 对任意矩阵$A\in V_1\cap V_2$必存在常数x_1,x_2,x_3,x_4

$$A=x_1A_1+x_2A_2=x_3A_3+x_4A_4.$$

解方程 $x_1A_1+x_2A_2=x_3A_3+x_4A_4$ 即

$$\begin{cases}2x_1+x_2=x_3+3x_4\\ x_1+x_2=x_4\\ -x_1-3x_2=2x_3+x_4\\ 3x_1+3x_2=3x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-3x_4=0\\ x_1+x_2-x_4=0\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\ 3x_1+3x_2-3x_4=0\end{cases}$$

得,对任意$k_1,k_2\in K$.

$$x_1=k_1+2k_2,x=-k_1-k_2,x_3=k_1,x_4=k_2$$

因此 $V_1\cap V_2=\{A=k_1A_3+k_2A_4\,|\,k_1,k_2\in K\}=V_2$

性质13.2 设V_1,V_2为V的子空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\cdots,\beta_r$分别为$V_1,V_2$的一组基. 若元素组
$$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$$
线性无关,则$V_1\cap V_2=\{\theta\}$.

证明 设$\alpha\in V_1\cap V_2$,由$\alpha\in V_1$知,存在$k_1,\cdots,k_s\in K$使得
$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s,$$
再由$\alpha\in V_2$知存在$l_1,\cdots,l_r\in K$使得
$$\alpha=l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r.$$
因此
$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s-l_1\beta_1-\cdots-l_r\beta_r=\theta.$$
由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$线性无关可知
$$k_1=\cdots=k_s=l_1=\cdots=l_r=0$$
因此$\alpha=\theta$. 从而$V_1\cap V_2=\{\theta\}$.

定理13.2 若V_1,V_2为有限维线性空间V的线性子空间,
$$V_1\cap V_2\neq\{\theta\}且\ V_1\cap V_2\neq V_1, V_1\cap V_2\neq V_2.$$
那么对$V_1\cap V_2$的任意一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$,存在$\beta_1,\cdots,\beta_r$, $\gamma_1,\cdots\gamma_l$,使得 $(I)\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$为$V_1$的一组基;

$(II)\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_l$为$V_2$的一组基;

$(III)\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_l$线性无关.

证明 $(I)(II)$是定理13.1的直接应用.

(III)设存在常数 $c_1,\cdots,c_s,d_1,\cdots,d_r,k_1,\cdots,k_l$使得
$$\theta=c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s+d_1\beta_1+\cdots+d_r\beta_r+k_1\gamma_1+\cdots+k_l\gamma_l.$$
令$\alpha=c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s+d_1\beta_1+\cdots+d_r\beta_r$, 则
$$\alpha=-(k_1\gamma_1+\cdots+k_l\gamma_l).$$
由$(I)(II)$可知$\alpha\in V_1$且$\alpha\in V_2$,即$\alpha\in V_1\cap V_2$. 因此有常数$k_1,\cdots,k_s$使得 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s,$

这进一步表明

$$\theta=(c_1-m_1)\alpha_1+\cdots+(c_s-m_s)\alpha_s+d_1\beta_1+\cdots+d_r\beta_r,$$

由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$为一组基可知

$$c_1=m_1,\cdots,c_s=m_s,d_1=d_2=\cdots=d_r=0.$$

因此 $\alpha=c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s=-(k_1\gamma_1+\cdots+k_l\gamma_l).$

由此可得 $c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s+k_1\gamma_1+\cdots+k_l\gamma_l=0$

又由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_l$也为一组基

$$c_1=c_2=\cdots=c_s=k_1=k_2=\cdots=k_l=0.$$

所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_l$线性无关.

注记 (1)若$V_1\cap V_2=V_1$(或V_2)则找不到元素$\beta_1,\cdots,\beta_r$(相应地$\gamma_1,\cdots,\gamma_l$),即此时$r=0(l=0)$.

(2)若$V_1\cap V_2=\{\theta\}$,则由(III)证明可知V_1的任一组基$\beta_1,\cdots,\beta_r$与V_2的任意一组基$\gamma_1,\cdots,\gamma_l$构成的元素组线性无关.即在有限维前提下性质13.2逆命题成立.

3 子空间的和

定义13.3 若V_1,V_2为线性空间V的子空间,那么称集合

$$V_1+V_2=\{\alpha+\beta:\alpha\in V_1,\beta\in V_2\}$$

为子空间V_1,V_2的和,记作V_1+V_2.

性质13.3 若V_1,V_2为V的线性子空间,那么V_1+V_2仍为V的线性子空间.

命题13.1 设V_1,V_2都是V的子空间且$V_1=L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$, $V_2=L\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$,则$V_1+V_2=L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$.

证明 对$\gamma\in V_1+V_2$总有$\alpha\in V_1,\beta\in V_2$使得 $\gamma=\alpha+\beta$.

而对$\alpha\in V_1$,存在$k_1,\cdots,k_s$使得 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$.

对$\beta\in V_2$,存在$l_1,\cdots,l_t$使得 $\beta=l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t$.

因此 $\gamma\in L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$. 于是

$$V_1+V_2\subset L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}.$$

反向包含显然成立. 命题得证.

例13.8 求例13.7中子空间V_1与V_2的和V_1+V_2.

解 $$V_1+V_2=L\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$$

由例12.3知矩阵组A_1,A_2为A_1,A_2,A_3,A_4的极大无关组. 因此

$$V_1+V_2=L\{A_1,A_2\}=V_1.$$

性质13.4 若V_1,V_2为有限维线性空间V的子空间,

$$V_1\cap V_2\neq\{\theta\}\text{且}V_1\cap V_2\neq V_1,\ V_1\cap V_2\neq V_2.$$

那么 $$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_l$$

为V_1+V_2的基,其中$\alpha_i,\beta_j,\gamma_k$为定理13.2中元素组.

注记 (1)若$V_1\cap V_2=V_1$(或V_2),则$V_1+V_2=V_2$(或V_1).

(2)若$V_1\cap V_2=\{\theta\}$,则 $V_1+V_2=L\{\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_l\}$,其中$\beta_1,\cdots,\beta_r$为$V_1$一组基,$\gamma_1,\cdots,\gamma_l$是$V_2$的一组基.

定理13.3 若V_1,V_2为有限维线性空间V的子空间,则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim V_1\cap V_2. \quad (*)$$

证明 若$V_1\cap V_2=V_1(V_2)$,由上述注记(1)可得.

若$V_1\cap V_2=\{\theta\}$,由定理13.2后的注记(2)以及上述注记(2)可知结论成立

对其他情形,由性质13.4及定理13.2可得

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2)&=s+r+l=(s+r)+(s+l)-s\\&=\dim V_1+\dim V_2-\dim V_1\cap V_2.\end{aligned}$$

注记 (*)式常被称为维数公式.该式表明子空间和的维数一般地小于空间维数的和

需要指出的是和空间 V_1+V_2中元素α总能分解成

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \qquad (\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$$

但分解方式一般不唯一.

4 子空间的直和

定义13.4 设V_1,V_2为线性空间V的子空间,若V_1与V_2的公共元素为零,即$V_1\cap V_2=\{\theta\}$,则称其和空间V_1+V_2为V_1,V_2的直和,记作$V_1\oplus V_2$.

定理13.4 (直和判定定理)设U和W是线性空间V的两个子空间,则下列命题等价:

(1)$\dim(U+W)=\dim U+\dim W$;

(2)$U+W$是直和;

(3)任取$\alpha\in U+W$,存在唯一 $u\in U,w\in W$使得

$$\alpha=u+w;$$

(4)零向量分解式唯一,即若$\theta=u+w$,其中$u\in U$, $w\in W$,则$u=w=\theta$.

(5)存在U中一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$,W中一组基$\beta_1,\cdots,\beta_t$,使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 由维数公式可知 $\dim(U\cap W)=0$.因此$U\cap W=\{\theta\}$. 即$U+W$是直和;

(2)$\Rightarrow$(3) 设$\alpha\in U+W$可分解成 $\alpha=u_1+w_1=u_2+w_2$

其中$u_1,u_2\in U,w_1,w_2\in W$. 由$U,W$均为线性空间,得

$$u_1-u_2=w_2-w_1\in W\cap U$$

因$U+W$为直和,$W\cap U=\{\theta\}$.因此$u_1=u_2,w_1=w_2$.

(3)$\Rightarrow$(4) 显然成立

(4)$\Rightarrow$(5)取$\alpha_1,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\cdots,\beta_t$分别为$U,V$中的一组基

令 $$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+r_1\beta_1+\cdots+r_t\beta_t=\theta.$$

由$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\in U,r_1\beta_1+\cdots+r_t\beta_t\in V$及$\theta$分解唯一

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=\theta,\quad r_1\beta_1+\cdots+r_t\beta_t=\theta.$$

由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\beta_1,\cdots,\beta_t$也线性无关

$$k_1=\cdots=k_s=r_1=\cdots=r_t=0$$

所以$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$线性无关.

$(5)\Rightarrow(1)$ 由(5)可知 $\dim(U+V)\ge s+t=\dim U+\dim V$.
但由维数定理 $\dim(U+V)\le\dim U+\dim V$.因此(1)成立.

例13.9 设$V=R^3$, $W=\{(x,y,y)^T\in R^3\mid x,y\in R\}$,
$U=\{(0,0,z)^T\in R^3\mid z\in R\}$, 证明$V=W\oplus U$

证明 容易验证$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T$为$W$的一组基, $\alpha_3=(0,0,1)^T$为U的一组基.显然$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.因此$W+U$为直和. 此时由性质13.4可得

$$W\oplus U=L\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=R^3=V.$$

性质13.5 设U为有限维线性空间V的子空间,则一定存在子空间W使得$V=U\oplus W$.

证明 若$U=V$,则令$W=\{\theta\}$.显然此时,$V=U\oplus W$.
若$U\neq V$,则由定理13.1可知,U的任意一组基

$$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r,$$

可以扩充为V的一组基 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r,\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_n$.此时,
令$W=L\{\zeta_{r+1},\cdots,\zeta_n\}$. 由性质13.2可知$U\cap W=\{\theta\}$.
以及由命题13.1得$V=U+W$.因此$V=U\oplus W$.

定义13.5 设U为线性空间V的子空间,称W为U(关于V)的补空间,若$V=U\oplus W$. (U,W)又称为空间V的一对直和分解.

注记 补空间可以不唯一 . 例如:
取$V=R^3$, $U=L\{(1,0,0)^T,(0,1,0)^T\}$,令$W_1=L\{(0,0,1)^T\}$,
$W_2=L\{(0,1,1)^T\}$, 则W_1,W_2均为U的补空间.

线性子空间的交与和 ,直和等概念可以推广到多个子空间情形.(参见习题6).

需要指出的是将空间做 恰当直和分解是一种简 化问题常用方法与技巧.

课后练习

1 $K^{2\times2}$的下列子集是否构成子空间?说明理由

(1)$W_1=\left\{\begin{pmatrix}-1 & b\\ c & 0\end{pmatrix}\middle| b,c\in K\right\}$ (2)$W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\middle| a+b=0\right\}$

2 设U,V_1,V_2均是线性空间V的子空间 证明

$$U\cap V_1+U\cap V_2\subset U\cap(V_1+V_2),$$

并举例说明 $U\cap V_1+U\cap V_2\neq U\cap(V_1+V_2)$.

3 证明性质13.3, 13.4.

4.求K^4的子空间 $W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$ 以及 $W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$的交与和的基与维数.

5.证明$K^{n\times n}$可分解为n阶对称矩阵集合构成的 子空间与n阶反对称矩阵集合构成 的子空间的直和.

6*.设$V_1,V_2,\cdots,V_n$为线性空间V的子空间,试验证

$$W=\{x\in V\,|\,x=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为线性空间.称为$V_1,\cdots,V_n$的和空间,记做$V_1+\cdots+V_n$.
若在和空间$V_1+\cdots+V_n$中零元素只能有唯一分 解,即

$$\theta=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\ \alpha_i\in V_i\Leftrightarrow \alpha_i=\theta$$

则称$V_1+\cdots+V_n$为直和空间,记做$V_1\oplus\cdots\oplus V_n$. 试证明$V_1+\cdots+V_n$为直和空间$\Leftrightarrow$下列条件中一条成立.

(1)$V_1+\cdots+V_n$中任意元素都只有唯一分解;

(2)任取$V_i,i=1,\cdots,n$,中一个元素α_i,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中非零元素部分组必线性无关.

(3)若$\varepsilon_{i1},\cdots,\varepsilon_{ik_i}$为$V_i$的任一组基,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1k_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2k_2},\cdots,\varepsilon_{n1},\cdots,\varepsilon_{nk_n}$$

为$V_1+\cdots+V_n$的一组基.