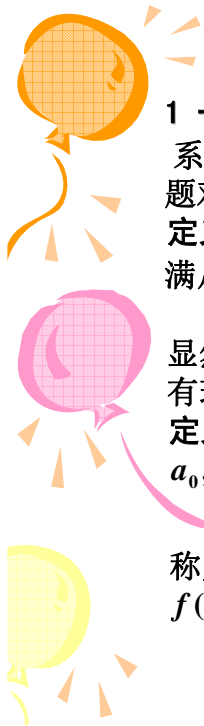


第1讲 一元多项式及其运算

- 1 一元多项式的概念
- 2 多项式的加法与乘法
- 3 多项式的带余除法
- 4 余数定理及其应用



1 一元多项式的概念

系数为实数的多项式大家早已熟悉,然而有些问题对系数有额外要求,为了统一,我们先定义

定义1.1 称至少含一个非零数的数集 K 为数域,若满足 (1)若 $a, b \in K$,则 $a+b, a-b, ab \in K$

(2)若 $a \in K$ 且 $a \neq 0$,则 $1/a \in K$

显然实数集合 R 以及复数集合 C 都是数域,此外有理数全体 Q 也是数域,但整数全体 Z 不是数域.

定义1.2 设 n 是一个非负整数, x 是一个文字(符号), a_0, a_1, \dots, a_n 为数域 K 上的一组数,表达式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

称为(系数在)数域 K 上的一元多项式.一般记其为 $f(x), g(x), \dots$ 或简记为 f, g, \dots .



对多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

(1) a_0, a_1, \dots, a_n 全为0时称其为零多项式, 记为0.

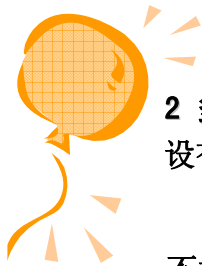
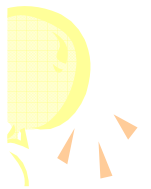
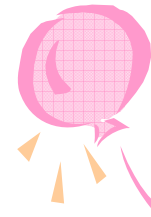
(2) 称 a_kx^k 为多项式 f 的 k 次项, a_k 为 k 次项系数.
若 $a_k = 0$, 则 k 次项 a_kx^k 可以不写出.

(3) 若 $a_m \neq 0$, 但 $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$, 则称 a_mx^m 为多项式 f 的首项, a_m 为首项系数, m 称为多项式 f 的次数, 记作 $\deg(f)$, 即 $\deg(f) = m$. 此时

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m.$$

(4) 称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相等(同)的, 若它们同次项系数相等, 此时记作 $f(x) = g(x)$.

注: $\deg(f)$ 只对非零多项式有定义; 零多项式与零次多项式是不一样的. 称数域 K 上全体多项式集合为数域 K 上的多项式环, 记作 $K[x]$.



2 多项式的加法与乘法

设有数域 K 上多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

不妨设 $m \leq n$, 为方便, 令 $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$.

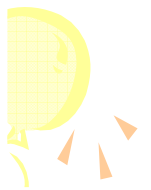
定义 f, g 的和, 差为

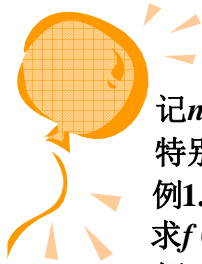
$$f \pm g = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0) = \sum_{i=0}^n (a_i \pm b_i)x^i$$

定义 f, g 的积为

$$f(x)g(x) = a_mb_nx^{n+m} + (a_mb_{n-1} + a_{m-1}b_n)x^{n+m-1} + \cdots + C_kx^k + \cdots + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$$

$$C_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j \quad \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_ib_j \right) x^k.$$



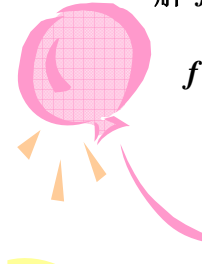


记 n 个 $f(x)$ 的乘积 $f(x) \cdots f(x)$ 为 $f(x)^n, n \geq 1$.

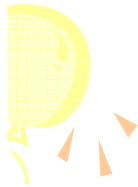
特别约定, 对任意非 0 多项式 $f(x), f(x)^0 \equiv 1$.

例 1.1 $f(x) = 2x^2 + 5x + 1, g(x) = 2x^4 + x^3 - x + 2$,
求 $f(x) + g(x)$ 以及 $f(x)g(x)$.

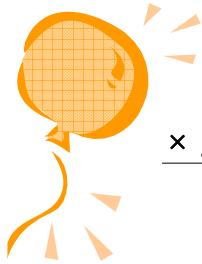
$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) + g(x) &= 2x^2 + 5x + 1 + 2x^4 + x^3 - x + 2 \\ &= 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$



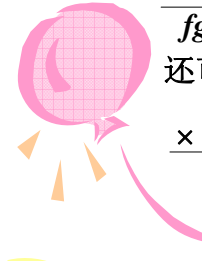
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (2x^2 + 5x + 1)(2x^4 + x^3 - x + 2). \\ &= 2x^6 + 10x^5 + 2x^4 \\ &\quad + 2x^5 + 5x^4 + x^3 \\ &\quad - 2x^3 - 5x^2 - x \\ &\quad + 4x^2 + 10x + 2 \\ &= 2x^6 + 12x^5 + 7x^4 - x^3 - x^2 + 9x + 2 \end{aligned}$$



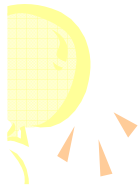
多项式的积虽然比较复杂, 应用竖式书写能方便计算.



$$\begin{array}{r} f = 2x^2 + 5x + 1 \\ \times g = 2x^4 + x^3 - x + 2, \\ \hline 2x^6 + 10x^5 + 2x^4 \\ \quad 2x^5 + 5x^4 + x^3 \\ \qquad - 2x^3 - 5x^2 - x \\ \qquad\qquad + 4x^2 + 10x + 2 \end{array}$$



$fg = 2x^6 + 12x^5 + 7x^4 - x^3 - x^2 + 9x + 2$
还可用分离系数法计算, 此时缺项要补上系数 0.



$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad 2 \ 5 \ 1 \\ \times \quad 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ 2 \\ \hline 2 \ 10 \ 2 \\ \quad 2 \ 5 \ 1 \\ \qquad 0 \ -2 \ -5 \ -1 \\ \qquad\qquad 4 \ 10 \ 2 \\ \hline 2 \ 12 \ 7 \ -1 \ -1 \ 9 \ 2 \end{array}$$

所以 $fg = 2 + 9x - x^2 - x^3 + 7x^4 + 12x^5 + 2x^6$



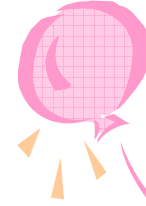
定理1.1(次数定理) 多项式运算与次数之间满足:

(1)若 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ 且 $f(x) \pm g(x) \neq 0$,则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}$$

(2)若 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ 则 $f(x)g(x) \neq 0$,且

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$



性质1.1 多项式的运算满足如下规律

(1)交换律: $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$,

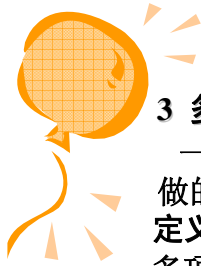
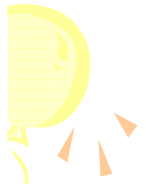
$$f(x)g(x) = g(x)f(x).$$

(2)结合律: $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

(3)分配律: $(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$,

(4)消去律: $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$,那么
 $g(x) = h(x)$.



3 多项式的带余除法

一元多项式可以做加减乘法,但除法不是普遍可做的,我们先介绍带余除法.

定义1.3 设多项式 $f(x), g(x) \in K[x]$,且 $g(x) \neq 0$,若有多项式 $q(x), r(x) \in K[x]$ 使得

(1) $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$;

(2) $r(x) = 0$ 或 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$,

则称 $q(x)$ 是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商,

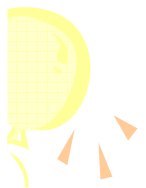
$r(x)$ 是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式,

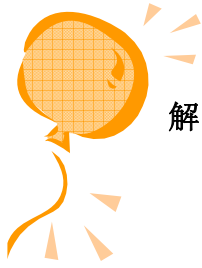
$f(x), g(x)$ 分别为被除式与除式.

已知 $f(x), g(x)$ 求 $q(x)$ 和 $r(x)$ 的过程称为带余除法.

带余除法可以通过长除法求得.

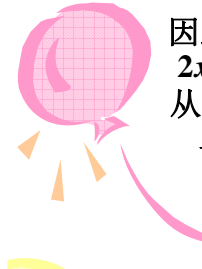
例1.2 $f(x) = 2x^2 + 2x + 1, g(x) = 2x^4 + x^3 - x + 2$,
求 $f(x)$ 除 $g(x)$ 所得商及余式.





解 由长除法得

$$\begin{array}{r}
 x^2 - \frac{1}{2}x \\
 2x^2 + 2x + 1 \overline{) 2x^4 + x^3 - x + 2} \\
 \underline{2x^4 + 2x^3 + x^2} \\
 -x^3 - x^2 - x \\
 \underline{-x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x} \\
 -\frac{1}{2}x + 2
 \end{array}$$



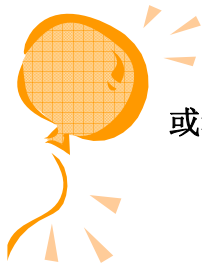
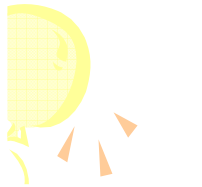
因此

$$2x^4 + x^3 - x + 2 = (x^2 - \frac{1}{2}x)(2x^2 + 2x + 1) + (-\frac{1}{2}x + 2)$$

从而 $q(x) = x^2 - \frac{1}{2}x, r(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

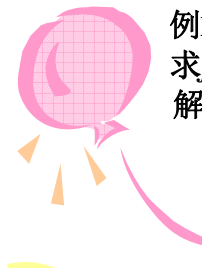
长除法还常如下书写

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 + 2x + 1 & 2x^4 + x^3 - x + 2 \\
 \hline
 & 2x^4 + 2x^3 + x^2 \\
 \hline
 & -x^3 - x^2 - x \\
 & \underline{-x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x} \\
 & -\frac{1}{2}x + 2
 \end{array} \quad x^2 - \frac{1}{2}x$$



或者用系数分离法简单表示

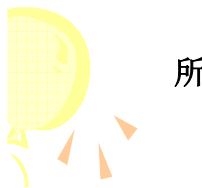
$$\begin{array}{r|l}
 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\
 \hline
 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
 \hline
 & & -1 & -1 & -1 & \\
 & & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & \\
 \hline
 & & & & -\frac{1}{2} & 2
 \end{array}$$



例1.3 $f(x) = x^2 - x - 1, g(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6$, 求 $f(x)$ 除 $g(x)$ 所得商及余式.

解

$$\begin{array}{r|l}
 f(x) & g(x) \\
 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & 5 & 0 & -6 & 2 & -1 & 6 \\
 \hline
 & 2 & -3 & 5 & 0 & -6 & & & & & \\
 \hline
 & & -1 & 7 & 0 & & & & & & \\
 & & -1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 \hline
 & & & 6 & -1 & -6 & & & & & \\
 & & & 6 & -6 & -6 & & & & & \\
 \hline
 & & & & 5 & 0 & & & & &
 \end{array}$$



所以 $q(x) = 2x^2 - x + 6, r(x) = 5x$.



定理1.2 多项式 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 存在且唯一.

证明: 先证存在性.

若 $f(x) = 0$, 取 $q(x) = 0, r(x) = 0$ 即可. 以下设 $f(x) \neq 0$ 设 $\deg(f(x)) = n, \deg(g(x)) = m$.

若 $n < m$, 取 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$ 即可.

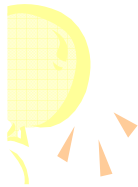
若 $n \geq m$, 对 n 用数学归纳法证明.

当 $n = 0$ 时, $m = 0$, 此时 $f(x), g(x)$ 为常数, 取 $r(x) = 0, q(x) = f(x)/g(x)$ 即可.

假设 $n < k$ 时成立, 那么 $n = k$ 时, 令 ax^k, bx^m 分别为 $f(x), g(x)$ 的首项, 则多项式

$$f_1(x) = f(x) - b^{-1}ax^{k-m}g(x)$$

满足 $\deg(f_1(x)) < k$. 由归纳假设, 存在 $q_1(x), r_1(x)$ 使得 $r_1(x) = 0$ 或 $\deg(r_1(x)) < \deg(g(x))$, 且



$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x).$$

容易验证, 此时取 $q(x) = b^{-1}ax^{k-m} + q_1(x), r(x) = r_1(x)$ 即有带余除法表示

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

由归纳原理, 存在性获证.

再证唯一性: 设另有多项式 $\bar{q}(x), \bar{r}(x)$ 使得

$$f(x) = \bar{q}(x)g(x) + \bar{r}(x),$$

且 $\deg(\bar{r}(x)) < \deg(g(x))$ 或 $\bar{r}(x) = 0$. 那么

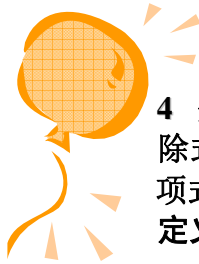
$$r(x) - \bar{r}(x) = (q(x) - \bar{q}(x))g(x)$$

若 $q(x) \neq \bar{q}(x)$, 那么由 $g(x) \neq 0$ 可知 $r(x) - \bar{r}(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \deg(g(x)) &\leq \deg(q(x) - \bar{q}(x)) + \deg(g(x)) \\ &= \deg(r(x) - \bar{r}(x)) < \deg(g(x)) \end{aligned}$$

矛盾表明 $q(x) = \bar{q}(x), r(x) = \bar{r}(x)$. 唯一性得证.

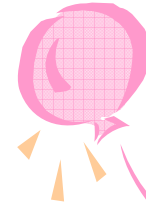




4 余数定理及其应用

除式 $g(x) = x - c$ 时,带余除法中的余式为0或零次多项式,即余式为一个数,称为余数.

定义1.4 设多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$
 $c \in K$,将 $f(x)$ 中 x 替换成 c 并计算所得的值称为多项式 $f(x)$ 在 $x = c$ 的值,记作 $f(c)$.若 $f(c) = 0$,则称 c 为 $f(x)$ 的根或方程 $f(x) = 0$ 的解.



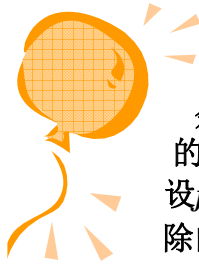
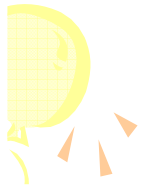
定理1.3(余数定理) 多项式 $f(x)$ 被 $x - c$ 除所得余数就是 $f(c)$.

证明:由带余除法可知存在 $q(x)$ 及余数 r 使得

$$f(x) = q(x)(x - c) + r.$$

两边用 $x = c$ 代入得

$$f(c) = q(c)(c - c) + r = r.$$



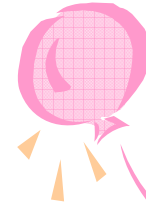
余数定理为我们提供了一种用余数计算多项式值的方法.下面我们分析如何用带余除法求余数.

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 由次数定理 $f(x)$ 被 $x - c$ 除的商是 $n - 1$ 次多项式,设为

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}.$$

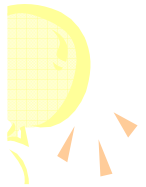
记余数为 r ,则 $f(x) = q(x)(x - c) + r$.

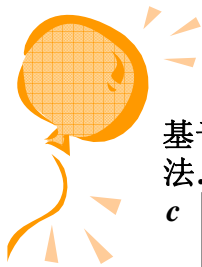
展开并比较系数可得



$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} - cb_{n-1} = a_{n-1} \\ \dots \\ b_0 - cb_1 = a_1 \\ r - cb_0 = a_0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1} \\ \dots \\ b_0 = a_1 + cb_1 \\ r = a_0 + cb_0 \end{cases}$$

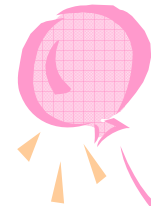
这表明只要知道 $f(x)$ 的系数及数 c 仅用一次乘法与加法就可依次得到 b_{n-1}, \dots, b_0, r .





基于上述观察求商 $q(x)$ 及余数 r 的方法称为综合除法. 该方法可如下表示

$$\begin{array}{r}
 c \left| \begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \cdots & cb_1 & cb_0 \\
 \hline
 a_n & a_{n-1} + cb_{n-1} & a_{n-2} + cb_{n-2} & \cdots & a_1 + cb_1 & a_0 + cb_0 \\
 \hline
 b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r
 \end{array}
 \end{array}$$

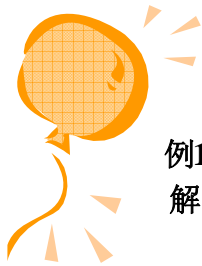
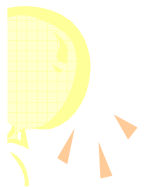


例1.4 求 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6$ 被 $x - 3$ 除的商及余数.

解 由综合除法

$$\begin{array}{r}
 3 \left| \begin{array}{cccccc}
 2 & -3 & 5 & 0 & -6 \\
 & 6 & 9 & 42 & 126 \\
 \hline
 2 & 3 & 14 & 42 & 120
 \end{array}
 \end{array}$$

所以商 $q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 14x + 42$, 余数 $r = 120$.

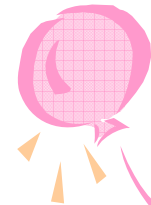


例1.5 求 k 使 $f(x) = x^4 - 5x^3 - 35x^2 - kx + 9$ 以 9 为根.

解 由综合除法

$$\begin{array}{r}
 9 \left| \begin{array}{cccccc}
 1 & -5 & -35 & -k & 9 \\
 & 9 & 36 & 9 & 81 - 9k \\
 \hline
 1 & 4 & 1 & 9 - k & 90 - 9k
 \end{array}
 \end{array}$$

所以 $f(9) = 90 - 9k$. $k = 10$ 时 $f(x)$ 以 9 为根.

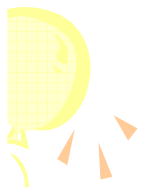


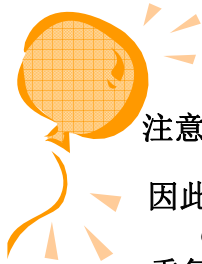
例1.6 将 $f(x) = x^4 + 3x^2 + 3$ 展成 $x - 1$ 的方幂和.

[分析] 对任一多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 要将其展成 $(x - c)$ 的方幂和, 就是要写成

$$f(x) = b_n(x - c)^n + \cdots + b_1(x - c) + b_0$$

的形式. 因此我们只要能确定系数 b_n, \cdots, b_0 就可以.





注意到 $f(x) = b_n(x-c)^n + \dots + b_1(x-c) + b_0$
 $= [b_n(x-c)^{n-1} + \dots + b_1](x-c) + b_0$

因此 b_0 是 $x-c$ 除 $f(x)$ 的余数

$q_1(x) = b_n(x-c)^{n-1} + \dots + b_1$ 是 $x-c$ 除 $f(x)$ 的商

重复这个观察, 我们发现

b_1 是 $x-c$ 除 $q_1(x)$ 的余数

$q_2(x) = b_n(x-c)^{n-2} + \dots + b_2$ 是 $x-c$ 除 $q_1(x)$ 的商

... ..

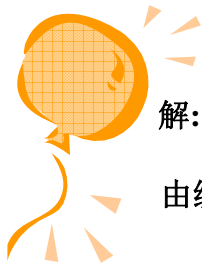
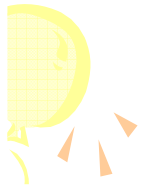
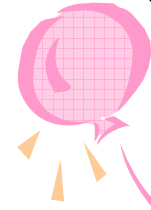
b_{n-1} 是 $x-c$ 除 $q_{n-1}(x)$ 的余数

$q_n(x) = b_n$ 是 $x-c$ 除 $q_{n-1}(x)$ 的商

这个观察告诉我们, 可以对 $f(x)$ 及商一直做综合除法, 直至商为常数. 所得余数按先后次序依次为

$b_0, b_1, \dots, b_{n-1},$

最后的商为 b_n .



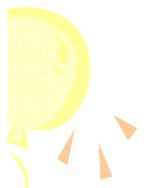
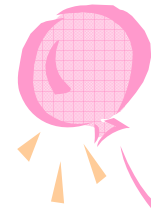
解: 设 $f(x) = x^4 + 3x^2 + 3$
 $= b_4(x-1)^4 + b_3(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + b_1(x-1) + b_0.$

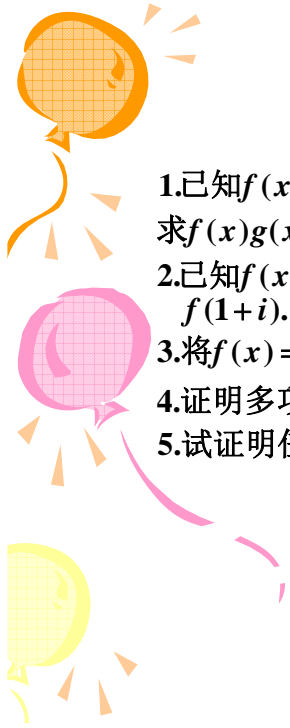
由综合除法

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|
| 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 |
| | 1 | 1 | 4 | 4 | 7 |
| | 1 | 2 | 6 | 6 | |
| | 1 | 2 | 6 | 10 | |
| | 1 | 3 | 9 | | |
| | 1 | 3 | 9 | | |
| | 1 | 4 | | | |
| | 1 | 4 | | | |

可知 $b_0 = 7, b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 4, b_4 = 1.$

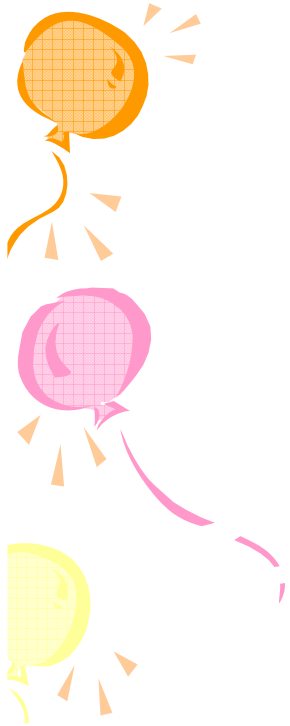
即 $f(x) = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 10(x-1) + 7.$





课后习题

1. 已知 $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ 求 $f(x)g(x)$ 以及 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商及余式.
2. 已知 $f(x) = x^4 + (1+i)x^3 + (2-3i)x^2 + x - 1 + i$, 求 $f(1+i)$.
3. 将 $f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 1$ 表示成 $(x+2)$ 的方幂和.
4. 证明多项式乘法满足消去律.
5. 试证明任何数域都包含有理数域.



第2讲 整除与最大公因式

1. 整除的概念与性质
2. 最大公因式
3. 互素



1 整除

定义2.1 设多项式 $f(x), g(x) \in K[x]$, 若存在 $h(x) \in K[x]$, 使得 $f(x) = h(x)g(x)$, 则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \mid f(x)$, 此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式, $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式.

若 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \nmid f(x)$.

注记: 整除概念没有要求 $g(x) \neq 0$, 但0只能整除0. 由定义容易验证

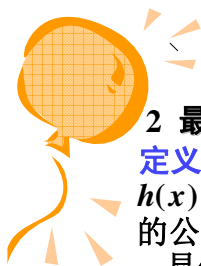
(1) $f(x) \mid f(x)$; (2) $f(x) \mid 0$; (3) $c \mid f(x)$ ($c \neq 0$)

(4) 若 $g(x) \mid f(x)$ 则 $g(x) \mid cf(x)$, ($c \in K$).

由带余除法可得如下整除判别

定理2.1 若 $g(x) \neq 0$, 则 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为0.

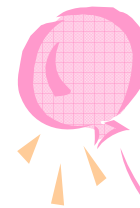
推论 c 为 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x-c)$ 为 $f(x)$ 的因式.



2 最大公因式

定义2.2 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 若 $h(x) \in K[x]$ 满足 $h(x) \mid f(x)$ 以及 $h(x) \mid g(x)$, 则称 $h(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因子.

显然任意两个多项式都有非0公因子(比如任意0次多项式).



定义2.3 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 若 $d(x) \in K[x]$ 满足

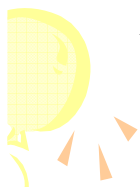
(1) $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都是 $d(x)$ 的因子, 则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

注记 (1)若 $f(x) = g(x) = 0$, 则最大公因式只能是0.

(2) $f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow f(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

(3)若 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因子且存在多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, 则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.



引理2.1 若 $f(x), g(x) \in K[x]$ 不全为0, 且

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式必是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式, 反之也成立.

证明: 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 由

$$d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$$

及 $f(x) - q(x)g(x) = r(x)$ 可知, $d(x) \mid r(x)$. 因此 $d(x)$ 是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的公因式.

设 $d_1(x)$ 为 $g(x), r(x)$ 的公因式, 由条件可知

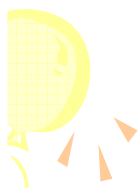
$$d_1(x) \mid f(x).$$

$d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式, 因此 $d_1(x) \mid d(x)$.

所以 $d(x)$ 是 $g(x), r(x)$ 的最大公因式.

反之部分同样证明可得. 此略.

注记 引理2.1中并没有要求 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$, 这为我们使用该结论提供了便利.





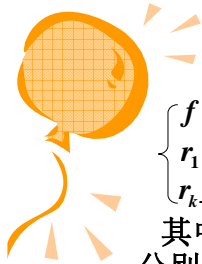
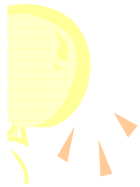
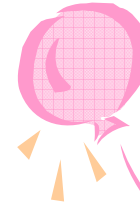
下面利用引理2.1讨论最大公因式的存在性与求法.

定理2.2 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则在 $K[x]$ 中存在一个 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$, 且 $d(x)$ 可表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合, 即存在 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

证明: 若 $f(x) = g(x) = 0$ 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是 0 . 此时有 $0 = 0f(x) + 0g(x)$.

若 $f(x), g(x)$ 不全为 0 , 不妨设 $g(x) \neq 0$, $g(x)$ 除 $f(x)$ 得商与余式 $q_1(x)$ 与 $r_1(x)$; 若 $r_1(x) \neq 0$, 再以 $r_1(x)$ 除 $g(x)$ 得商与余式 $q_2(x)$ 与 $r_2(x)$; 若 $r_2(x) \neq 0$ 再以 $r_2(x)$ 除 $r_1(x)$; 得商与余式 $q_3(x)$ 与 $r_3(x)$; …………… 如此辗转相除, 因余式次数不断降低, 若干步($k \geq 0$)后余式必然为 0 , 因此我们得到如下一组等式



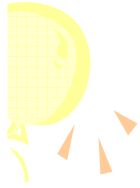
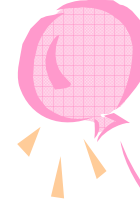
$$\begin{cases} f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) & g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x) & \dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x) & r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)r_k(x) \end{cases}$$

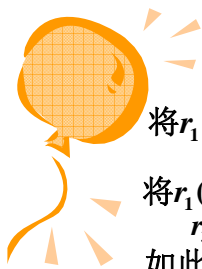
其中为使表示式对一切 $k \geq 0$ 成立, 可将 $f(x), g(x)$ 分别看作 $r_{-1}(x), r_0(x)$.

显然 $r_k(x) \neq 0$ 为 $r_{k-1}(x)$ 与 $r_k(x)$ 的一个最大公因式. 由引理2.1得 $r_k(x)$ 也是 $r_{k-2}(x), r_{k-1}(x)$ 的最大公因式. 如此连续 k 次使用引理2.1可得 $r_k(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式. 即 $d(x) = r_k(x)$. 存在性获证.

当 $k = 0$ 时, $d(x) = g(x)$ 可表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合. 当 $k \geq 1$ 时, 上述等式组可推出

$$\begin{cases} f(x) - q_1(x)g(x) = r_1(x) & g(x) - q_2(x)r_1(x) = r_2(x) \\ r_1(x) - q_3(x)r_2(x) = r_3(x) & \dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x) - q_k(x)r_{k-1}(x) = r_k(x) \end{cases}$$





将 $r_1(x)$ 代入 $r_2(x)$ 的表达式并整理得

$$r_2(x) = (1 + q_1(x)q_2(x))g(x) - q_2(x)f(x)$$

将 $r_1(x), r_2(x)$ 代入 $r_3(x)$ 的表达式并整理得

$$r_3(x) = (1 + q_3q_2)f(x) - (q_1 + q_3 + q_1q_2q_3)g(x)$$

如此依次代入并整理,由归纳法易得存在多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $d(x) = r_k(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

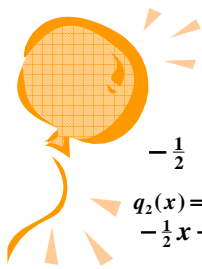
注记 定理2.2不但证明了任意两个多项式都有最大公因式,其证明过程给出了求最大公因式的一种方法,称为辗转相除法.

例2.3 设 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$,
 $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式 $d(x)$,并求 u, v 使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

解: 由辗转相除法得



| | $g(x)$ | $f(x)$ | |
|--|---|---|--|
| $-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$ | $\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & 1 & 1 & -1 & -1 & \end{array}$ | $\begin{array}{ccc ccc} 1 & 1 & -3 & -4 & -1 & 1 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & \end{array}$ | $\begin{array}{c} 1 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{array}$ |
| $q_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ | $\begin{array}{ccc ccc} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & & r_1(x) & -2 & -3 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & & & -2 & -2 & \\ r_2(x) & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}$ | $\begin{array}{ccc ccc} -2 & -3 & -1 & & & & & \\ -2 & -2 & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}$ | |

最大公因式 $d(x) = r_2(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

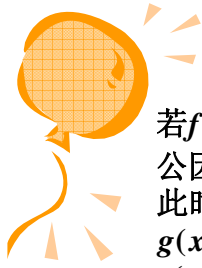
此时 $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = f(x) - xg(x)$

$$\begin{aligned} r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) \\ &= g(x) - (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})[f(x) - xg(x)] \\ &= (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x)g(x) + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})f(x) \end{aligned}$$

即 $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, v(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$ 时

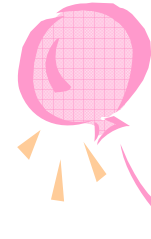
$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$





若 $f(x), g(x) \in K[x]$ 不全为0, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式不唯一, 不同最大公因式间差一个非0常数. 此时用**符号** $(f(x), g(x))$ 表示首项系数为1的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 由定理2.2知存在多项式 $u(x), v(x)$ 使得

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

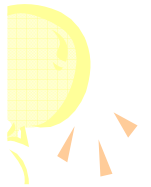


例2.4 设 $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3, g(x) = x^3 - 2x - 3$ 求 $(f(x), g(x))$.

解 注意到 $f(x) = -g(x) + x^4$
由引理2.1易知 $(f(x), g(x)) = (g(x), x^4)$

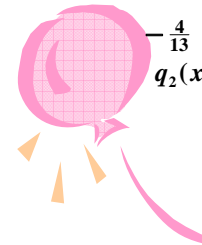
由于 x^4 的非常数因式必为 $cx^k (c \neq 0, k = 1, 2, 3)$, 而 $cx^k \nmid g(x)$.

所以 $(g(x), x^4) = 1$, 从而 $(f(x), g(x)) = 1$.

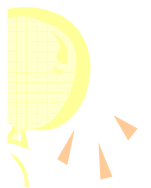


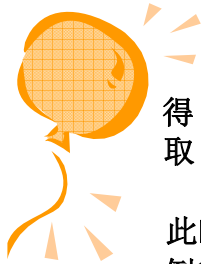
例2.5 设 $f(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 8x - 2,$
 $g(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$
求 $(f(x), g(x))$ 以及多项式 $u(x), v(x)$ 使得
 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

解: 由辗转相除法

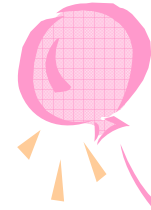


| | | |
|------------------------------------|---|--|
| $-\frac{4}{13} \quad \frac{8}{13}$ | $\begin{array}{cccc c} & & g(x) & & \\ 2 & -2 & 5 & -2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline -4 & 3 & -4 & 3 & \\ -4 & -4 & -4 & -4 & \\ \hline r_2(x) & 7 & 0 & 7 & \end{array}$ | $\begin{array}{cccc cccc} & & & f(x) & & & & \\ 1 & 2 & -7 & 0 & -8 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 1 & -1 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{3}{2} & & & \\ \hline & & 3 & -\frac{19}{2} & 1 & -\frac{19}{2} & -2 & \\ & & 3 & -3 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} & \\ \hline r_1(x) & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{14} & -\frac{13}{14} \\ \hline & & -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{13}{2} & & & \\ \hline & & & -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{13}{2} & & \\ & & & -\frac{13}{2} & 0 & -\frac{13}{2} & & \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$ |
|------------------------------------|---|--|

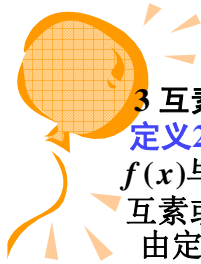
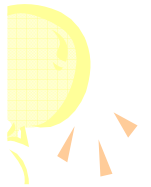




得 $(f(x), g(x)) = \frac{1}{7}r_2(x) = x^2 + 1$.
 取 $u(x) = -\frac{1}{7}q_2(x) = \frac{1}{91}(4x - 8)$
 $v(x) = \frac{1}{7}(1 + q_1(x)q_2(x)) = \frac{1}{182}(50 - 4x^2 - 4x)$
 此时有 $x^2 + 1 = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.



例2.6 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 证明
 $(f(x), g(x)) = (f(x) + g(x), g(x))$
 证明: 由定理2.2存在 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得
 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$
 $= u(x)(f(x) + g(x)) + (v(x) - u(x))g(x)$,
 因为 $(f(x), g(x)) \mid f(x) + g(x)$
 所以 $(f(x), g(x))$ 是 $f(x) + g(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.
 进而 $(f(x), g(x))$ 是 $f(x) + g(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公
 因式且首项系数为 1. 因此
 $(f(x), g(x)) = (f(x) + g(x), g(x))$



3 互素

定义2.4 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是非 0 常数, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素或互质.

由定义直接可得: $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow f(x)$ 的任意非常数因式都不整除 $g(x)$.



定理2.3 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

定理2.4 若 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)h(x)$ 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 则 $d(x) \mid h(x)$.

证明 由 $(f(x), g(x)) = 1$ 可知存在 $u(x), v(x)$ 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

因此 $u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x) = h(x)$.

因为 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)h(x)$, 因此 $d(x) \mid h(x)$

推论 若 $(f(x), g(x)) = 1$ 且 $f(x) \mid g(x)h(x)$, 则 $f(x) \mid h(x)$.





定理2.5 $f(x) | h(x), g(x) | h(x)$ 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 则

$$f(x)g(x) | h(x).$$

证明: 由 $f(x) | h(x)$ 可知存在 $q(x)$ 使得

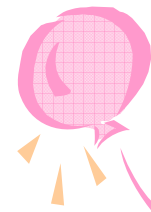
$$h(x) = f(x)q(x)$$

再由 $g(x) | h(x)$ 以及 $(f(x), g(x)) = 1$ 可知 $g(x) | q(x)$,

即存在 $p(x)$ 使得 $q(x) = g(x)p(x)$. 这表明

$$h(x) = f(x)g(x)p(x).$$

因此 $f(x)g(x) | h(x)$.



例2.7 设 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $h(x)$ 是任意多项式, 证明

$$(f(x), h(x)) = (f(x), h(x)g(x))$$

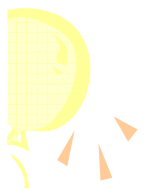
证明 由 $(f(x), g(x)) = 1$ 及定理2.4可知

$$(f(x), h(x)g(x)) | h(x)$$

从而 $(f(x), h(x)g(x)) | (f(x), h(x))$

另一方面显然有 $(f(x), h(x)) | (f(x), h(x)g(x))$

因此 $(f(x), h(x)) = (f(x), h(x)g(x))$



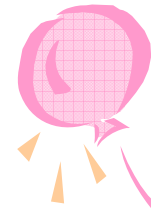
最大公因式与互素可推广到有限个多项式的情形. 设有多项式 $f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, 如果多项式 $d(x)$ 满足

$$(1) d(x) | f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) \text{对任意 } \varphi(x) | f_i(x), i = 1, 2, \dots, n \text{ 有 } \varphi(x) | d(x),$$

则称 $d(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 的最大公因式.

若 $f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ 不全为0, 以 $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ 表示首项系数为1的最大公因式.



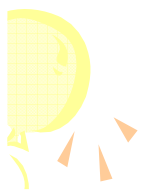
定理2.6 $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = ((f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)), f_n(x))$

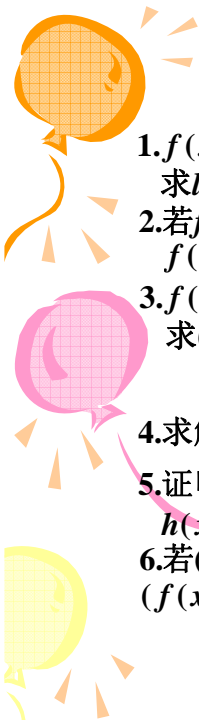
从而存在 $u_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ 使得

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = \sum_{i=1}^n u_i(x) f_i(x).$$

自然若 $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 1$ 称 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 互素. 类似地, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 互素 \Leftrightarrow

存在 $u_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ 使得 $\sum_{i=1}^n u_i(x) f_i(x) = 1$.





课后习题

1. $f(x) = x^3 + lx^2 + 5x + 2$ 能被 $g(x) = x^2 + mx + 1$ 整除
求 l, m .

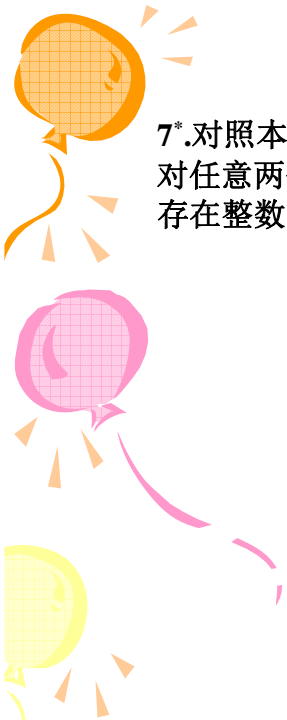
2. 若 $f(x) \mid g(x) + 2h(x)$, $f(x) \mid 3g(x) + 4h(x)$, 证明
 $f(x) \mid (g(x), h(x))$.

3. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x + 2$, $g(x) = x^3 - 2x$,
求 $(f(x), g(x))$ 以及 $u(x), v(x)$ 使得
 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

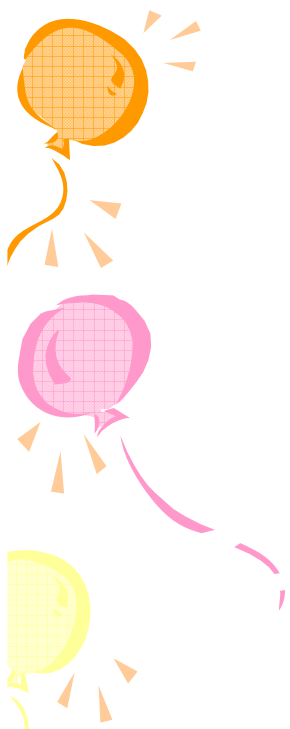
4. 求解多项式方程组 $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 0 \\ x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$

5. 证明 $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$, 其中
 $h(x)$ 首项系数为 1.

6. 若 $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$, 证明
 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 以及 $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$.



7*. 对照本节关于多项式最大公因式的讨论, 证明
对任意两个整数 m, n , 记其最大公因子为 (m, n) , 则
存在整数 u, v 使得 $(m, n) = um + vn$.



第3讲 因式分解与重因式

1 不可约多项式

2 因式分解定理

3 重因式



1 不可约多项式

定义3.1 设多项式 $p(x) \in K[x]$, $\deg(p(x)) \geq 1$, 如果它不能表示成为数域 K 上两个次数比 $p(x)$ 低的多项式的乘积, 则称 $p(x)$ 为数域 K 上的不可约多项式, 否则称为可约多项式.

注记 1. 一次多项式总是不可约的.

2. 一个多项式是否可约与数域有关. 比如 $x^2 + 1$ 在实数域内不可约, 在复数域内可约.

定理3.1 设 $f(x), g(x), p(x) \in K[x]$ 且 $p(x)$ 不可约, 则

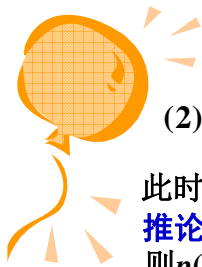
(1) $p(x) \mid f(x)$ 或 $(p(x), f(x)) = 1$;

(2) 若 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 则 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$.

证明 (1) 设 $(p(x), f(x)) = d(x)$, 则

$$d(x) = cp(x) \quad (c \neq 0) \quad \text{或} \quad d(x) = 1.$$

若 $d(x) = 1$, 则 $(p(x), f(x)) = 1$. 否则 $p(x) \mid f(x)$.



(2)若 $p(x) \mid f(x)$ 则结论成立,否则由(1)有
 $(p(x), f(x)) = 1$.

此时由定理2.4可知 $p(x) \mid g(x)$.

推论 (1)若 $p(x)$ 不可约且 $p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$,
 则 $p(x)$ 必整除 $f_i(x), i = 1, 2, \dots, n$,中一个.

(2)若 $p(x), q(x)$ 均不可约,那么 $p(x)$ 与 $q(x)$ 或者互素
 或相差一个非零常数.

例3.1设 $p(x)$ 是 $n(\geq 1)$ 次多项式,若对任意多项式 $f(x),$
 $g(x)$,由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 可得 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$,
 那么 $p(x)$ 必是不可约多项式.

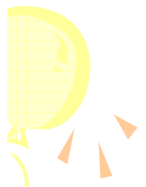
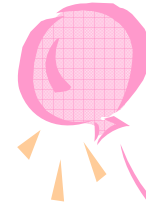
证明 若 $p(x)$ 可约,那么存在 $p_1(x), p_2(x)$ 使得

$$\deg(p_1(x)) < \deg(p(x)), \deg(p_2(x)) < \deg(p(x))$$

且 $p(x) = p_1(x)p_2(x)$. 此时令

$$f(x) = p_1(x), g(x) = p_2(x)$$

则与题设矛盾,因此 $p(x)$ 不可约.



2 因式分解定理

定理3.1(因式分解唯一性定理) $K[x]$ 中每个次数大
 于零的多项式 $f(x)$ 都能唯一地分解成数域 K 上
 一些不可约多项式的乘积,所谓唯一性是指若 $f(x)$ 有
 两个不可约分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么 $s = t$,且在适当排列因式的次序后有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), i = 1, 2, \dots, s$$

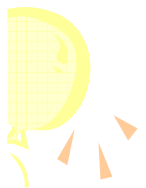
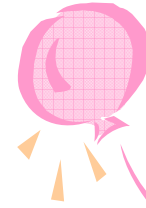
其中 c_i 为非零常数.

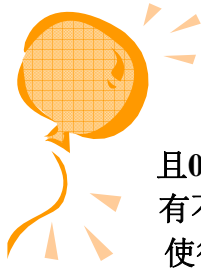
证明 先证分解的存在性.对多项式次数 n 用归纳法.

当 $n = 1$ 时,显然成立.因为1次多项式都是不可约的.

下设 $n < k$ 时成立.

当 $n = k$ 时,若 $f(x)$ 不可约,则结论显然成立.若 $f(x)$
 可约,则存在 $f_1(x), f_2(x)$ 使得





$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

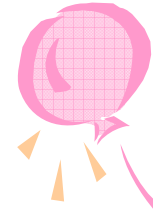
且 $0 < \deg(f_1(x)) < k, 0 < \deg(f_2(x)) < k$. 由归纳假设
有不可约多项式 $p_1(x), \dots, p_r(x)$ 及 $p_{r+1}(x), \dots, p_s(x)$

使得

$$f_1(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$$

$$f_2(x) = p_{r+1}(x)p_{r+2}(x)\cdots p_s(x)$$

从而 $f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$. 即 $n = k$ 时成立.
由归纳原理, 存在性获证.



下证唯一性. 设 $f(x)$ 有两个分解式

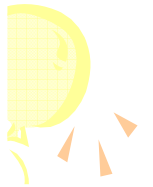
$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

其中 $p_i(x), q_j(x)$ 均是不可约多项式.

对不可约因式个数 s 用归纳法证明.

当 $s = 1$ 时, $f(x)$ 不可约, 因此显然有

$$s = t = 1, p_1(x) = q_1(x) = f(x).$$



下设 $s < k$ 时唯一性成立.

当 $s = k$ 时, 由

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

可知 $p_1(x) \mid q_1(x)\cdots q_t(x)$, 由于 $p_1(x)$ 不可约, 因此 $p_1(x)$
必整除某个 $q_j(x)$. 将 $q_1(x), \dots, q_t(x)$ 适当重排后不妨
设 $p_1(x) \mid q_1(x)$. 由于 $q_1(x)$ 也不可约, 存在 $c \neq 0$ 使得

$$p_1(x) = cq_1(x)$$

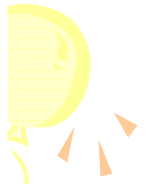
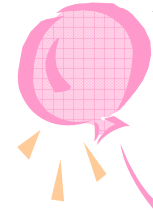
因此 $p_2(x)\cdots p_s(x) = (c^{-1}q_2(x))\cdots q_t(x)$

由归纳假设有 $s - 1 = t - 1$ 并且适当重排后

$$p_2(x) = c_2q_2(x), \dots, p_s(x) = c_sq_s(x)$$

c_2, \dots, c_s 均不为 0. 因此 $s = k$ 时唯一性成立.

由归纳原理, 唯一性获证.





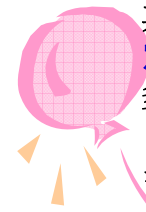
推论 若 $f(x) \in K[x]$ 且 $\deg(f(x)) > 0$, 则存在多项式 $g(x) \in K[x]$ 以及不可约多项式 $p(x) \in K[x]$ 使得

$$f(x) = p(x)g(x).$$

由定理 3.1 可知 $f(x)$ 存在如下的因式分解

$$f(x) = ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) \quad (1)$$

其中 $p_i(x)$ 不可约且首项系数为 1, a 为 $f(x)$ 首项系数.

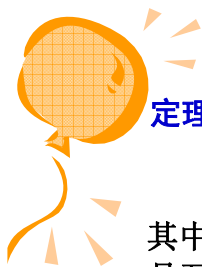
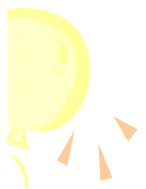


定义 3.2 将 $f(x)$ 形如 (1) 的分解式重排使得相同不可约多项式连在一起并将它的连乘写成幂的形式, 即

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_l^{r_l}(x)$$

其中 $p_1(x), \dots, p_l(x)$ 为首项系数为 1 且互不相等的不可约多项式, r_i 为非负整数, 称其为 $f(x)$ 的不可约分解式. 特别若 r_i 恒正, 则称其为 $f(x)$ 的标准分解式.

注记 标准分解式除次序外唯一.



定理 3.2 设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 拥有分解式

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x) \quad r_i \geq 0.$$

$$g(x) = bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x) \quad t_i \geq 0.$$

其中 $p_i(x), i = 1, 2, \dots, s$ 首项系数为 1 的不可约多项式且互不相同. 则

$$(f(x), g(x)) = p_1^{\min\{r_1, t_1\}}(x)p_2^{\min\{r_2, t_2\}}(x)\cdots p_s^{\min\{r_s, t_s\}}(x)$$

证明 容易验证 $p_1^{\min\{r_1, t_1\}}(x)p_2^{\min\{r_2, t_2\}}(x)\cdots p_s^{\min\{r_s, t_s\}}(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因子, 且首项系数为 1.

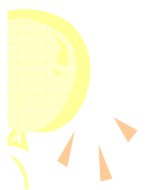
设 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因子, 标准分解式为

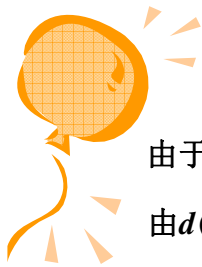
$$d(x) = cq_1^{h_1}(x)q_2^{h_2}(x)\cdots q_t^{h_t}(x).$$

对任意 $i = 1, 2, \dots, t$ 因为 $q_i(x)$ 不可约而且 $q_i(x) | f(x)$

从而存在 $p_j(x)$ 使得

$$q_i(x) | p_j(x).$$





由于 $p_j(x)$ 也不可约且首项系数也为1,因此

$$q_i(x) = p_j(x).$$

由 $d(x) \mid f(x)$ 知 $h_i \leq r_j$,再由 $d(x) \mid g(x)$ 知 $h_i \leq t_j$. 故

$$q_i^{h_i}(x) \mid p_j^{\min\{r_j, t_j\}}(x).$$

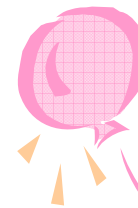
从而 $d(x) \mid p_1^{\min\{r_1, t_1\}}(x)p_2^{\min\{r_2, t_2\}}(x)\cdots p_s^{\min\{r_s, t_s\}}(x)$

因此 $(f(x), g(x)) = p_1^{\min\{r_1, t_1\}}(x)p_2^{\min\{r_2, t_2\}}(x)\cdots p_s^{\min\{r_s, t_s\}}(x)$.

注记 由于多项式因式分解没有确定的方法, 定理3.2 定理3.3作为理论结果更多用在理论推导中.

例3.2 设 $f(x) \in K[x]$ 且 $\deg(f(x)) > 0$. 证明存在 $m \geq 1$ 以及不可约多项式 $p(x)$ 使得 $f(x) = cp^m(x) \Leftrightarrow$ 对任意 $g(x) \in K[x], (f(x), g(x)) = 1$ 或有 $k > 0, f(x) \mid g^k(x)$.

证明: " \Rightarrow " 已知 $f(x) = cp^m(x)$, 对任意 $g(x) \in K[x]$ 若 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$, 那么由 $d(x) \mid p^m(x)$ 知



存在 $1 \leq r \leq m$ 以及非零常数 c_1 使得

$$d(x) = c_1 p^r(x),$$

因此 $f(x) = cp^m(x) \mid d^m(x)$.

又由 $d(x) \mid g(x)$ 得 $d^m(x) \mid g^m(x)$,

故 $f(x) \mid g^m(x)$.

" \Leftarrow " 存在不可约多项式 $p(x)$ 以及 $h(x) \in K[x]$ 使得

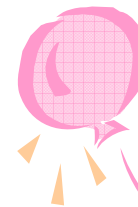
$$f(x) = p(x)h(x).$$

由于 $(f(x), p(x)) \neq 1$ 由条件假设必有 $f(x) \mid p^k(x)$.

因此存在 $0 < m < k$ 使得 $f(x) = cp^m(x)$.

由标准分解式以及次数定理可知, n 次多项式最多只有 n 个不同的一次因式. 我们有如下定理

定理3.3 n 次多项式最多只有 n 个根. 进而, 若对 n 次多项式 $f(x), g(x)$ 存在 $n+1$ 个不同数 c_1, c_2, \dots, c_{n+1} 使得 $f(c_1) = g(c_1), \dots, f(c_{n+1}) = g(c_{n+1})$, 那么 $f(x) = g(x)$.





设 $f(x)$ 为 n 次多项式, c_1, c_2, \dots, c_n 是任给的 n 个数
由归纳法可以证明 $f(x)$ 总可表示成为

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c_1) + a_2(x - c_1)(x - c_2) + \dots + a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n) \quad (2)$$

的形式, 其中 a_0, a_1, \dots, a_n 为待定系数.

一般地我们称(2)为 n 次多项式的逐次逼近公式.

例3.3 求一个3次多项式 $f(x)$ 使得 $f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = 5, f(4) = 22$.

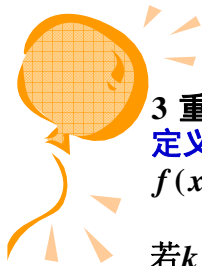
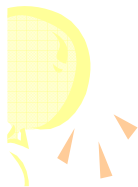
解 设 $f(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 2) + a_3(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

将 $x = 1, 2, 3, 4$ 分别代入得 $a_0 = 1, a_0 + a_1 = 0,$

$$a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 5 \text{ 以及 } a_0 + 3a_1 + 6a_2 + 6a_3 = 22$$

由此可得 $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = 1.$

因此整理后 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2.$



3 重因式

定义3.3 不可约多项式 $p(x) \in K[x]$ 称为是多项式 $f(x) \in K[x]$ 的 k 重因式, 若

$$p^k(x) \mid f(x) \text{ 但 } p^{k+1}(x) \nmid f(x).$$

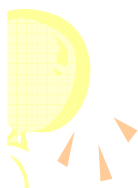
若 $k = 0$ 则 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式; 若 $k = 1$, 那么称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式; 若 $k > 1$, 称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式.

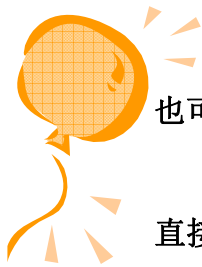
若 $x - c$ 为 $f(x)$ 的 $k (k > 0)$ 重因式, 称 c 是 $f(x)$ 的 k 重根. 特别 $k = 1$ 称 c 为单根, $k > 1$ 称 c 为重根.

定义3.4 对任意 n 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 称 $n - 1$ 次多项式 $a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$

为 $f(x)$ 的(一阶)导数, 记作 $f'(x)$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

注记 显然这里多项式导数与数学分析中多项式函数的导数表示一致. 因此有与数学分析一致的求导法则. 本课程不予重述.



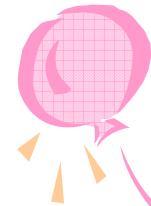


也可与数学分析一样,替归地定义多项式高阶导数

$$f^{(m)}(x) = [f^{(m-1)}(x)]'.$$

直接验算可得

$$\begin{cases} f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^n \frac{k!a_k}{(k-m)!} x^{k-m}, & 1 \leq m \leq n, \\ f^{(m)}(x) = 0, & n < m. \end{cases}$$



命题3.1 设多项式 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则

(1) 若 $\deg(f(x)) > 0$, $\deg(f'(x)) = \deg(f(x)) - 1$.

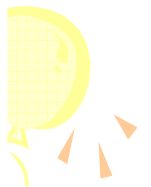
(2) 若 $f(x)$ 不可约, 则 $(f(x), f'(x)) = 1$.

证明 (只证(2)) 若 $(f(x), f'(x)) \neq 1$, 由 $f(x)$ 不可约知

$$(f(x), f'(x)) = cf(x), \quad c \neq 0,$$

从而 $f(x) \mid f'(x)$

这与 $f'(x) \neq 0$ 且 $\deg(f'(x)) < \deg(f(x))$ 矛盾. 因此 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.



定理3.4 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 $k (k \geq 1)$ 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

证明 由 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式可知 $f(x) = p^k(x)g(x)$

其中 $p(x) \nmid g(x)$. 求 $f(x)$ 的导数得

$$f'(x) = p^{k-1}(x)(kp'(x)g(x) + p(x)g'(x))$$

由于 $p(x) \nmid p'(x)$, $p(x) \nmid g(x)$ 且 $p(x)$ 不可约

$$p(x) \nmid p'(x)g(x)$$

又由于 $p(x) \mid p(x)g'(x)$ 所以

$$p(x) \mid (kp'(x)g(x) + p(x)g'(x))$$

这表明 $p^{k-1}(x) \mid f'(x)$ 但 $p^k(x) \nmid f'(x)$.

推论1 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 $k (k \geq 1)$ 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f'(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$ 的 $k-1, k-2, \dots, 1$ 重因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式. 特别地 $f(x)$ 的单因式不再是 $f'(x)$ 的因式.





推论2 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

推论3 $f(x)$ 无重因式的充要条件是 $(f(x), f'(x)) = 1$.

由推论2和3知,要判断 $f(x)$ 有无(或得到)重因式,只需要用辗转相除法求 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式.

例3.4 求 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ 的重因式

解 $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ 由辗转相除法可求得

$$(f(x), f'(x)) = (x+1)^2$$

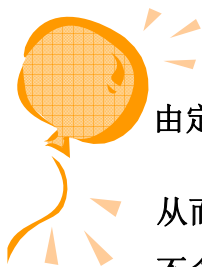
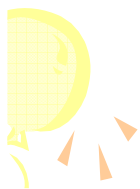
因此 $f(x)$ 的重因式为 $x+1$,且 $f(x) = (x+1)^3(x-2)$.

最后我们讨论如何去除重因式的问题

对任意多项式 $f(x) \in K[x]$,设其标准分解式为

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x) \quad r_i \geq 1$$

其中 $p_i(x), i = 1, 2, \dots, s$ 首项系数为1的不可约多项式



由定理3.2,3.4可知

$$(f(x), f'(x)) = p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x).$$

从而 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_2(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$

不含重因式.

例3.5 设 $f(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$,求一个多项式与 $f(x)$ 有相同的因式但无重因式.

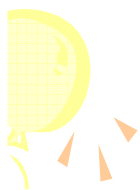
解 $f'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 48x + 20$

由辗转相除法得

$$(f(x), f'(x)) = x^2 - 2x + 2$$

所求多项式可取为

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = x^3 - 4x^2 + 6x - 4.$$





课后练习

1. 求一个3次多项式使得

$$f(-1) = -5, f(2) = -5, f(3) = -1, f(4) = 15.$$


2. 若 $g(x) \neq 0$, 证明 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow$ 存在自然数 $m > 0$ 使得 $g^m(x) \mid f^m(x)$.

3. 证明多项式 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 无重因式

4. a, b 满足什么条件时 $f(x) = x^4 + 4ax + b$ 有重因式?

5. 设 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, 求一个与 $f(x)$ 有相同因式但无重因式 的多项式并写出 $f(x)$ 的标准分解式.

6. 举例说明 $K[x]$ 中存在不可约多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式但不是 $f(x)$ 的 k 重因式.



7* 设 $f(x)$ 为 n 次多项式, c_1, c_2, \dots, c_{n+1} 为任意 $n+1$ 个不同的数, 证明

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(c_i)F(x)}{(x-c_i)F'(c_i)} \quad (3)$$

其中 $F(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x-c_i)$.

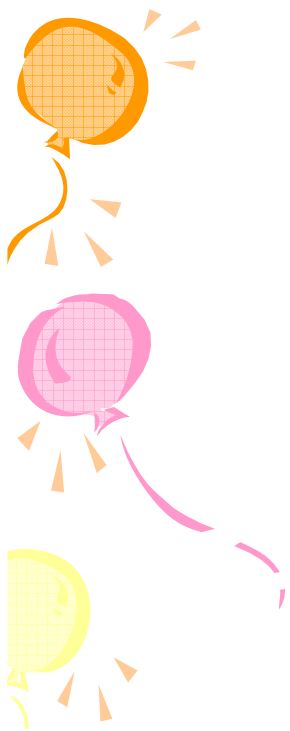
((3) 称为多项式的拉格朗日插值公式, 在近似计算中被大量使用.)

8* 如果 α 是 $f^{(3)}(x)$ 的 k 重根, 证明 α 是

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)(f'(x) + f'(\alpha)) - f(x) + f(\alpha)$$

的 $k+3$ 重根.

9* $K \subset S$ 为两数域, 多项式 $f(x) \in K[x], c \in K$. 证明 c 为 $f(x)$ 在数域 K 上 r 重根当且仅当 c 为 $f(x)$ 在数域 S 上 r 重根.



第4讲 有理系数多项式

- 1 本原多项式
- 2 整系数多项式的有理根
- 3 有理多项式的因式分解



1 本原多项式

对有理多项式而言,判断其是否可约并不简单,对该问题的研究可转为对整系数多项式的讨论.

记所有整系数多项式集合为 $Z[x]$.

定义4.1 设非零多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in Z[x]$,若其系

a_0, a_1, \dots, a_n 互素,即除去 ± 1 外没有其他公因数,则称 $f(x)$ 为本原多项式.

注记 本原多项式概念只对整系数多项式有效.

例如多项式

$$f_1(x) = 7x^7 + 2x^4 + 6 \quad \text{本原多项式}$$

$$f_2(x) = 4x^4 + 20x^3 + 8x + 2 \quad \text{非本原多项式}$$

若整系数多项式有一个系数为1则必为本原多项式.



定理4.1 两个本原多项式的乘积 仍是本原多项式.

证明 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

是两本原多项式. 又设

$$h(x) = f(x)g(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \dots + c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0$$

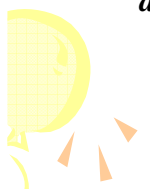
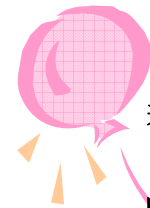
其中 $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, k = 0, 1, \dots, m+n$. 显然 $h(x) \in Z[x]$.

若 $h(x)$ 不是本原多项式, 则存在素数 p 满足

$$p \mid c_k \quad k = 0, 1, \dots, m+n.$$

因为 $f(x)$ 为本原多项式, p 不能整除其所有系数. 设 a_k 是 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 中第一个不能被 p 整除的系数. 即

$$p \mid a_n, \dots, p \mid a_{k+1}, p \nmid a_k$$



同样设 b_l 是 b_m, \dots, b_0 中首个不能被 p 整除的系数, 即

$$p \mid b_m, \dots, p \mid b_{l+1}, p \nmid b_l$$

注意到 $c_{k+l} = \sum_{i+j=k+l} a_i b_j,$
 $= a_k b_l + a_{k+1} b_{l-1} + \dots + a_{k+l} b_0$
 $+ a_{k-1} b_{l+1} + \dots + a_0 b_{k+l}$

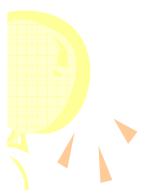
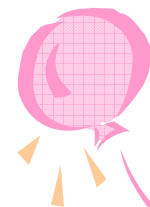
由 $p \mid c_{k+l}$ 以及

$$p \mid a_{k+1} b_{l-1} + \dots + a_{k+l} b_0, \quad p \mid a_{k-1} b_{l+1} + \dots + a_0 b_{k+l}$$

可知

$$p \mid a_k b_l$$

因 p 为素数, 这意味着 $p \mid a_k$ 或 $p \mid b_l$ 与前述推断矛盾. 因此 $h(x)$ 为本原多项式.



注记 由归纳法可知任意多个本原多项式的乘积 仍是本原多项式.



定理4.2 设非零多项式 $f(x) \in Q[x]$, 则存在 $r \in Q$ 及本原多项式 $g(x)$, 使得 $f(x) = rg(x)$, 且 r 与 $g(x)$ 除差正负号外唯一.

证明 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in Q$.

令 c 为所有系数分母的最小公倍数, 那么 c 为整数, 且

$$ca_n, \cdots, ca_1, ca_0 \in \mathbb{Z}.$$

令 p 表示 ca_n, \cdots, ca_1, ca_0 的最大公因数, 那么

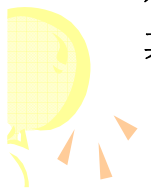
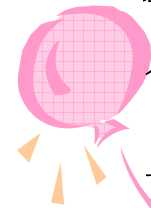
$$\frac{ca_n}{p}, \cdots, \frac{ca_1}{p}, \frac{ca_0}{p} \in \mathbb{Z}.$$

且互素. 这意味着 $g(x) = \frac{c}{p} f(x)$ 为本原多项式. 此时

$$f(x) = \frac{p}{c} g(x).$$

存在性获证. 下证唯一性. 设 $f(x) = rg(x) = r_1 g_1(x)$

其中 $g(x), g_1(x)$ 都是本原多项式, $r, r_1 \neq 0$.



于是 $\frac{r}{r_1} g(x) = g_1(x)$. 由于 $\frac{r}{r_1} \in Q$, 存在互素整数 p, q 使得 $\frac{r}{r_1} = \frac{p}{q}$. 若 $\frac{r}{r_1} \neq \pm 1$, 则 p, q 至少一个不为 ± 1 . 不妨设

$q \neq \pm 1$. 那么 $g(x)$ 中各系数 $b_i, i = 0, 1, \cdots, n$ 满足:

$$pb_i / q$$

仍为整数. 因此由 $(p, q) = 1$ 可知

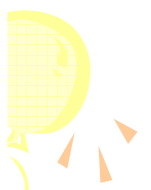
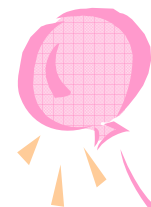
$$q \mid b_i \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

这与 $g(x)$ 为本原多项式矛盾. 因此

$$r = \pm r_1, g(x) = \pm g_1(x).$$

唯一性获证.

注记 本结论把有理多项式和整系数多项式联系在一起, 因而寻找有理多项式的解本质就是求整系数多项式的有理根.





2 整系数多项式的有理根

定理4.3 如果一个非零整系数多项式能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式乘积.

证明 设 $f(x)$ 为 n 次整系数多项式且

$$f(x) = g_1(x)g_2(x),$$

其中 $g_1(x), g_2(x) \in Q[x]$ 且次数不大于 n .

由定理4.2,存在整数 r 及有理数 r_1, r_2 使得



$$f(x) = rf_1(x), g_1(x) = r_1h_1(x), g_2(x) = r_2h_2(x)$$

其中 $f_1(x), h_1(x), h_2(x)$ 为本原多项式. 因此

$$f(x) = rf_1(x) = r_1r_2h_1(x)h_2(x)$$

定理4.1表明 $h_1(x)h_2(x)$ 为本原多项式,故由定理4.2

$r_1r_2 = \pm r$ 为整数,进而 $f(x) = (r_1r_2h_1(x))h_2(x)$ 能表示两个次数较低整系数多项式的乘积.




推论 设 $f(x), g(x) \in Z[x]$ 且 $g(x)$ 为本原多项式.若 $f(x) = g(x)h(x)$,其中 $h(x) \in Q[x]$,则 $h(x) \in Z[x]$.

证明: 由定理4.2,存在本原多项式 $p(x)$ 使得

$$h(x) = rp(x).$$

从而 $f(x) = rg(x)p(x)$.由于 $g(x)p(x)$ 仍为本原多项式,故 r 为整数.从而 $h(x) \in Z[x]$.

由该推论可得一个求整系数多项式全部有理根的方法.

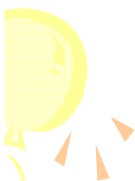


定理4.4 设 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in Z[x]$.如果它有一个有理根 r/s ,其中 r, s 是互素的整数,那么 $s | a_n, r | a_0$.特别,若 $a_n = 1$,则其所有有理根都是整数.

证明: 由假设 $x - \frac{r}{s} | f(x)$ 得 $sx - r | f(x)$.即有 $g(x) \in Q[x]$

$$f(x) = (sx - r)g(x)$$

因为 $sx - r$ 为本原多项式,由上述推论, $g(x) \in Z[x]$.





故 $a_n = sb_{n-1}, a_0 = -rb_0$
 其中 b_{n-1} 为 $g(x)$ 首项系数, b_0 为其常数项. 所以
 $s | a_n, r | a_0$.

例4.1 求方程 $2x^4 - x^3 + 2x - 3 = 0$ 的有理根.

解 由定理4.4, 该方程的有理根只可能是
 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}$

依次做综合除法知, 只有 $x = 1$ 为方程的根.

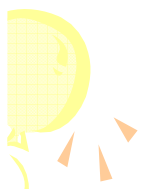
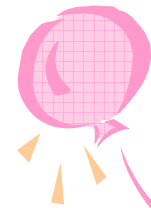
例4.2 求 $f(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + 4x - \frac{3}{2}$ 的有理根.

解 $f(x) = \frac{1}{2}g(x)$

其中 $g(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的根. 因此由定理4.4 $f(x)$ 的有理根只可能是
 $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}$

由综合除法知, -3 及 $1/2$ 都是 $f(x)$ 的根.



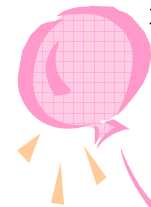
例4.3 证明 $f(x) = x^3 - 5x + 1$ 在有理域上不可约.

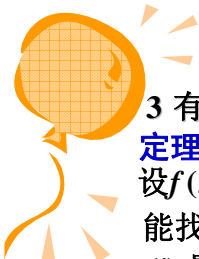
证明 若 $f(x)$ 可约, 则必存在一个一次因式, 即存在一个有理根. 但 $f(x)$ 的有理根只可能是 ± 1 经验算这都不是 $f(x)$ 的根, 即 $f(x)$ 没有有理根. 所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

例4.4 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 若 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数, 试证明 $f(x)$ 没有整数根.

证明 若 $f(x)$ 有整数根 α , 那么
 $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

由于 $x - \alpha$ 是本原多项式, 由定理4.3推论, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. 因此 $g(0), g(1) \in \mathbb{Z}$, 进而由 $-\alpha$ 与 $1 - \alpha$ 必有一偶数知 $f(0)$ 与 $f(1)$ 至少一个为偶数. 与题设矛盾, 因此 $f(x)$ 没有整数根.





3 有理多项式的因式分解

定理4.5(艾森斯坦(Eisenstein)判别法)

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 是一个整系数多项式,若能找到一个素数 p ,使得

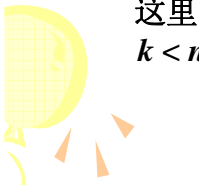
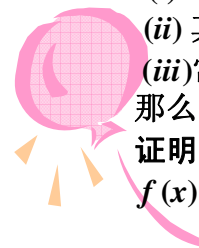
- (i) 最高次项系数 a_n 不能被 p 整除,
- (ii) 其余各项的系数都能被 p 整除,
- (iii) 常数项 a_0 不能被 p^2 整除.

那么多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明 如果多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约,由定理4.3, $f(x)$ 可分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积

$$f(x) = g(x)h(x)$$

这里 $g(x) = b_0 + \cdots + b_kx^k, h(x) = c_0 + \cdots + c_lx^l$, 并且 $k < n, l < n, k + l = n$.



由此得到 $a_0 = b_0c_0$.

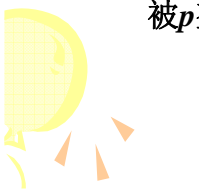
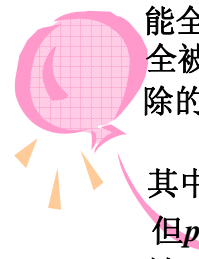
因为 a_0 被 p 整除,而 p 是一个素数,所以 b_0 或 c_0 被 p 整除.但 a_0 不被 p^2 整除,所以 b_0, c_0 不能同时被 p 整除.

不妨设 b_0 被 p 整除而 c_0 不被 p 整除.但 $g(x)$ 的系数不能全被 p 整除,否则由 $f(x) = g(x)h(x)$ 可知 $f(x)$ 的系数全被 p 整除,这与假定矛盾.令 $g(x)$ 中首个不能被 p 整除的系数是 b_s .考察等式

$$a_s = b_sc_0 + b_{s-1}c_1 + \cdots + b_0c_s.$$

其中 a_s, b_{s-1}, \dots, b_0 都被 p 整除,所以 b_sc_0 也能被 p 整除.

但 p 是一个素数,这意味着 b_s 与 c_0 中至少有一个能被 p 整除.这个矛盾表明 $f(x)$ 在有理数域不可约.





例4.5 判断 $f(x) = x^6 + x^3 + 1$ 在有理数域上是否可约.

解 对 $f(x)$,找不到满足Eisenstein判别法的素数 p .

但若令 $x = y + 1$,考虑多项式

$$g(y) = f(y+1) \\ = y^6 + 6y^5 + 15y^3 + 21y^3 + 18y^2 + 9y + 3.$$

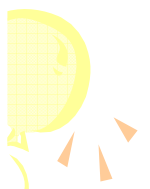
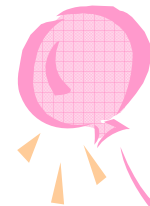
则存在素数 $p = 3$ 满足Eisenstein判别法条件. 即 $g(y)$ 在有理数域上不可约. 由于 $g(y)$ 与 $f(x)$ 具有相同的可约性. 因此, $f(x)$ 在有理数域上不可约.

注记 例4.5表明Eisenstein判别法只是为我们判别多项式在有理数域的不可约性提供了一个充分条件.

此外由Eisenstein判别法容易看出对任意 n

$$x^n + 2$$

在有理数域不可约. 因此在有理数域存在任意次不可约多项式.



例4.6 判别下列多项式在有理数域上是否可约.

(1) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 4$

(2) $g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 8$

解 (1)对 $f(x)$ 找不到满足Eisenstein判别法的素数 p .

但其有理根只可能是

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4.$$

直接检验不难得到 $f(2) = 0$. 因此 $f(x)$ 可约.

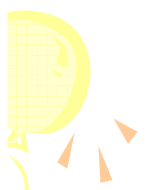
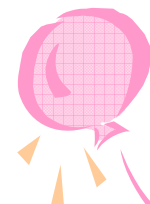
(2)存在素数 $p = 2$ 使得Eisenstein条件不成立.

但是对多项式

$$h(y) = g(y-1) = y^4 + 7$$

显然Eisenstein条件成立. 从而 $h(y)$ 不可约.

由于 $g(x)$ 与 $h(y)$ 由相同可约性, 因此 $g(x)$ 不可约.





例4.7 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个不同的整数, 又设

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1.$$

证明若 n 为奇数则 $f(x)$ 在有理数域不可约.

证明 显然 $f(x)$ 为 n 次整系数多项式, 若 $f(x)$ 可约则可表示成两个次数较低的有理系数多项式乘积, 进而由定理4.3, 存在整系数多项式 $g(x), h(x)$ 使得

$$f(x) = g(x)h(x)$$

其中 $0 < \deg(g(x)) < n, \deg(h(x)) + \deg(g(x)) = n$.

当 n 为奇数时, $\deg(g(x)) \neq \deg(h(x))$, 从而

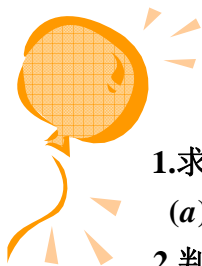
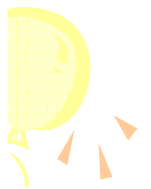
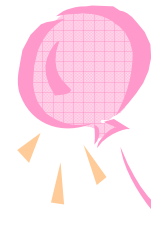
$$g(x) \neq h(x).$$

但由条件, 对任意 $a_k, k = 1, 2, \dots, n$,

$$f(a_k) = g(a_k)h(a_k) = 1.$$

从而 $g(a_k) = h(a_k) = \pm 1$. 这意味着 $g(x) = h(x)$. 矛盾!

所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.



课后练习

1. 求下列多项式的有理根

$$(a) 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 \quad (b) \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{15}{2}x - 7$$

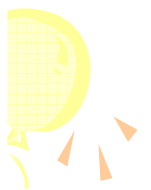
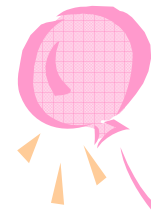
2. 判断下列多项式在有理数域上是否可约

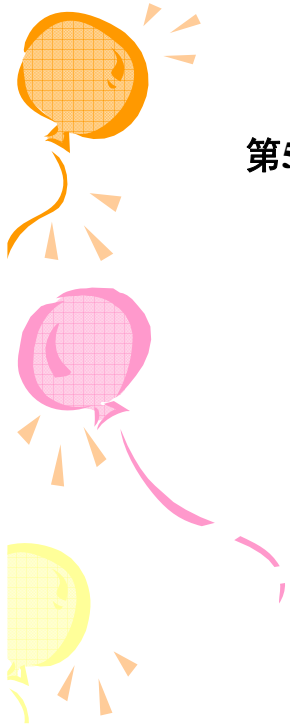
$$(a) x^p + px + 1, (p \text{ 为素数})$$

$$(b) x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 4$$

3. 证明: 一个本原多项式如果在 \mathbb{Z} 上不可约, 那么它在 \mathbb{Q} 上也不可约.

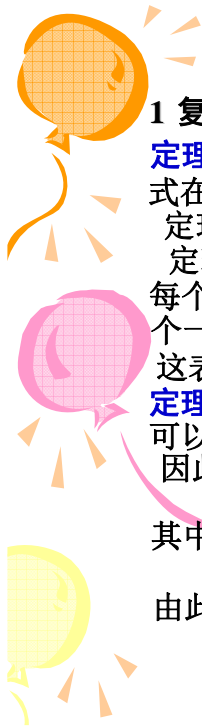
4. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 是整系数多项式, 证明若 $(a+b)c$ 为奇数, 则 $f(x)$ 不可约.





第5讲 复(实)系数多项式与结式

- 1 复系数多项式
- 2 实系数多项式
- 3 结式



1 复系数多项式

定理5.1(代数基本定理) 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域有一个根.

定理证明涉及更进一步的分析知识,此略.

定理可等价叙述为:

每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上一定有一个一次因式.

这表明在复数域 C 上不可约因式一定是一次因式.

定理5.2 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域上可以分解成一次因式的乘积.

因此,复数域上 n 次多项式的标准分解式为

$$f(x) = a(x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\cdots(x-c_l)^{r_l}$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_l 互不相同, r_1, r_2, \dots, r_l 为正整数且

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_l = n$$

由此, n 次复系数多项式恰有 n 个根(重根按重数).



2 实系数多项式

定理5.3 如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根,那么 α 的共轭也是 $f(x)$ 的复根.

证明 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.

由假设 $f(\alpha) = 0$. 注意到

$$\overline{f(\alpha)} = \sum_{i=0}^n a_i \overline{\alpha^i} = f(\overline{\alpha})$$

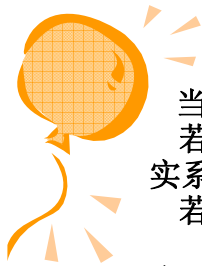
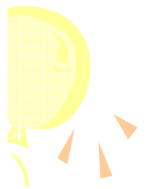
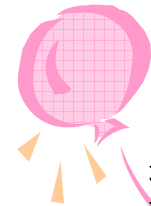
因此 $f(\overline{\alpha}) = 0$. 即 α 的共轭也是 $f(x)$ 的复根.

定理5.4 每个次数大于1的实系数多项式都可在实数域上唯一分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

证明 对多项式次数 n 用数学归纳法证明.

当 $n = 1$ 时,因一次多项式总不可约,故结论成立.

下设 $n < k$ 时成立.即次数 $< k$ 的多项式可分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.



当 $n = k$ 时,由定理5.2, $f(x)$ 在复数域上有一个根 α . 若 α 为实数,那么 $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ 且 $g(x)$ 为 $k - 1$ 次实系数多项式. 此时由归纳假设,结论对 $n = k$ 成立.

若 α 为复数,那么 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根,因此

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})g(x)$$

由于 $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ 为实数域内二次不可约多项式, $g(x)$ 为 $k - 2$ 次实系数多项式. 此时由归纳假设,结论 $n = k$ 式成立.

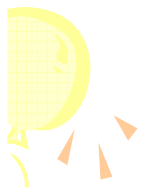
由归纳原理,结论对一切实系数多项式都成立.

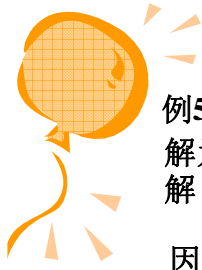
由定理可得, n 次实系数多项式在实数域上的标准分解式为 $f(x) = a(x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_p)^{r_p}$

$$\times (x^2 + a_1 x + b_1)^{l_1} \cdots (x^2 + a_q x + b_q)^{l_q}$$

其中 a_i, b_i, c_j 均为实数, l_i, r_j 均为正整数,满足

$$r_1 + \cdots + r_p + 2(l_1 + \cdots + l_q) = n \text{ 以及 } a_i^2 - 4b_i < 0.$$





例5.1 将 $f(x) = x^n - 1$ 分别在复数域与实数域上分解为不可约多项式的乘积.

解 $f(x) = x^n - 1$ 复数域内所有的根为

$$c_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

因此 $f(x)$ 在复数域上的分解为

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n})$$

为得到在实数域上分解,我们注意到 $c_0 = 1$,

$$\bar{c}_k = \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2(n-k)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-k)\pi}{n} = c_{n-k}$$

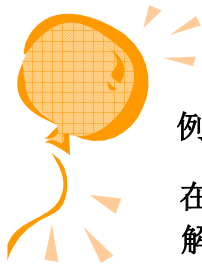
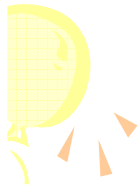
而且只有 $n = 2m$ 时 $c_m = -1$ 也为实数.

所以当 $n = 2m$ 时

$$f(x) = (x-1)(x+1) \prod_{k=1}^{m-1} (x^2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n} x + 1)$$

当 $n = 2m+1$ 时

$$f(x) = (x-1) \prod_{k=1}^m (x^2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n} x + 1)$$



例5.2 将 $f(x) = x^5 + (2-i)x^4 + (3-2i)x^3 + (2-3i)x^2 + (1-2i)x - i$ 在复数域分解成不可约因式的乘积.

$$\text{解 } f'(x) = 5x^4 + (8-4i)x^3 + (9-6i)x^2 + (4-6i)x + (1-2i)$$

由辗转相除法可得

$$(f(x), f'(x)) = x^2 + x + 1$$

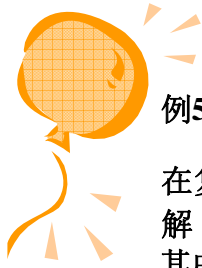
因此 $f(x) = (x^2 + x + 1)^2 g(x)$.

由带余除法可知 $g(x) = x - i$

因此 $f(x)$ 在复数域的分解为

$$f(x) = (x-i)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 (x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$$





例5.3 将 $f(x) = 2ix^6 + x^5 - 6ix^4 + (-3+2i)x^3 + (1+4i)x^2 + (2-2i)x - 1$

在复数域上分解为不可约多项式的乘积.

解 观察得 $f(x) = (2ix+1)g(x)$

其中 $g(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1$.

由整系数多项式有理根判别法可验算

$$g(1) = g(-1) = 0.$$

多次使用综合除法可得

$$g(x) = (x-1)^2(x+1)h(x)$$

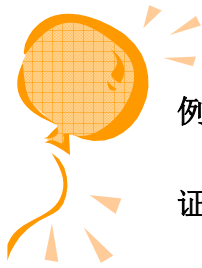
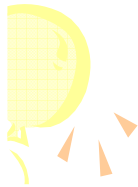
其中

$$h(x) = x^2 + x - 1.$$

$$= (x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

因此

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(2ix+1).$$



例5.4 若 $x^2 + x + 1 \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$, 证明

$$x-1 \mid (f_1(x), f_2(x)).$$

证明 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \bar{\omega} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 则

$$x-\omega \mid x^2+x+1 \text{ 且 } x-\bar{\omega} \mid x^2+x+1$$

由 $x^2+x+1 \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ 可知

$$x-\omega \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$$

$$\text{即 } f_1(1) + \omega f_2(1) = 0$$

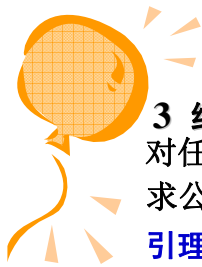
$$x-\bar{\omega} \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$$

$$\text{即 } f_1(1) + \bar{\omega} f_2(1) = 0$$

由此可解得 $f_1(1) = f_2(1) = 0$. 因此

$$x-1 \mid f_1(x) \text{ 且 } x-1 \mid f_2(x).$$





3 结式

对任意多项式 $f(x), g(x) \in K[x]$, 可以用辗转相除法求公因式, 也可仅依靠系数判断公因式的存在性.

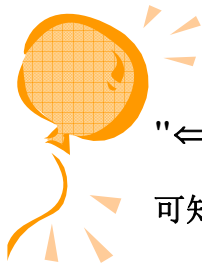
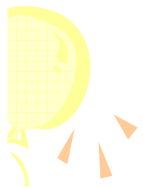
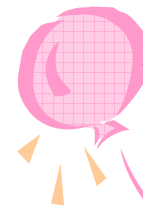
引理5.1 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ 是数域 K 上的两个多项式, a_n, b_m 不全为零. 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有非常数公因子的充要条件是在 $K[x]$ 中存在非零多项式 $u(x), v(x)$ 使得 $\deg(u(x)) < m, \deg(v(x)) < n$ 且

$$u(x)f(x) = v(x)g(x).$$

证明 " \Rightarrow " 由 $(f(x), g(x)) = d(x) \neq 1$, 可得存在 $f_1(x), g_1(x)$ 使得 $f(x) = d(x)f_1(x), g(x) = d(x)g_1(x)$.

那么 $\deg(g_1(x)) < m, \deg(f_1(x)) < n$ 且

$$g_1(x)f(x) = f_1(x)g(x).$$



" \Leftarrow " 不妨设 $a_n \neq 0$, 即 $\deg(f(x)) = n$. 由

$$u(x)f(x) = v(x)g(x).$$

可知 $f(x) | v(x)g(x)$. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 那么

$$f(x) | v(x).$$

这不可能, 因为 $v(x) \neq 0$ 且 $\deg(v(x)) < n$. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有非常数公因式.

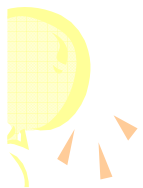
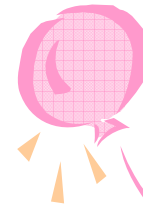
为确定引理中的 $u(x), v(x)$, 我们设

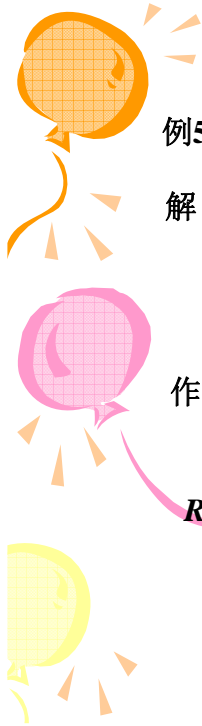
$$u(x) = u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + \cdots + u_1x + u_0$$

$$v(x) = v_{n-1}x^{n-1} + v_{n-2}x^{n-2} + \cdots + v_1x + v_0$$

乘法计算得 $u(x)f(x) = \sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{i+j=k} u_i a_j x^k$

$$v(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m-1} \sum_{i+j=k} v_i b_j x^k$$





例5.5 求 $\begin{cases} f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ g(x) = a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 \end{cases}$ 的结式.

解 由定义

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_n \\ a_n \\ a_n \\ a_n \end{matrix}} \right\} n-1 \text{行} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{matrix}} \right\} n \text{行} \end{matrix}$$

作变换 $r_i - r_{n-1+i}, 1 \leq i \leq n-1$ 得

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & \\ & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} n-1 \text{行} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{matrix}} \right\} n \text{行} \end{matrix} = (-1)^{n(n-1)} a_n^n a_0^{n-1} = a_n^n a_0^{n-1}.$$

例5.6 λ 取何值时多项式 $f(x) = x^3 - \lambda x + 2$ 与 $g(x) = x^2 + \lambda x + 2$ 有非常数公因子.

解 因为

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -4(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$$

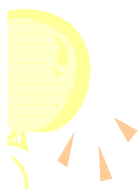
因此 $\lambda = -1$ 以及 $\lambda = 3$ 时有非常数公因子.

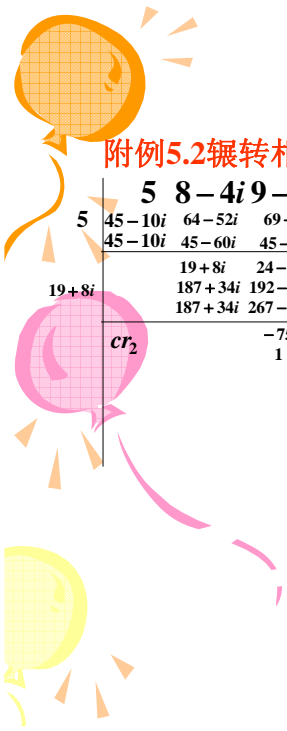
定理5.6 复数域上次数大于1的多项式 $f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow R(f, f') = 0$.

例5.7 多项式 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$ 是否有重根?

解 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$.

直接计算得 $R(f, f') = -3600 \neq 0$. 因此 $f(x)$ 无重根.





附例5.2辗转相除法

| | | | | | | | | | | | | |
|---------|----------|-----------|------------|------------|-----------|--------|---------|----------|----------|----------|--------|--------|
| | 5 | $8-4i$ | $9-6i$ | $4-6i$ | $1-2i$ | 1 | $2-i$ | $3-2i$ | $2-3i$ | $1-2i$ | $-i$ | |
| 5 | $45-10i$ | $64-52i$ | $69-72i$ | $24-62i$ | $5-20i$ | 5 | $10-5i$ | $15-10i$ | $10-15i$ | $5-10i$ | $-5i$ | 1 |
| | $45-10i$ | $45-60i$ | $45-60i$ | $-50i$ | | 5 | $8-4i$ | $9-6i$ | $4-6i$ | $1-2i$ | | |
| | | $19+8i$ | $24-12i$ | $24-12i$ | $5-20i$ | | $2-i$ | $6-4i$ | $6-9i$ | $4-8i$ | $-5i$ | |
| $19+8i$ | | $187+34i$ | $192-156i$ | $192-156i$ | $5-190i$ | | $10-5i$ | $30-20i$ | $30-45i$ | $20-40i$ | $-25i$ | $2-i$ |
| | | $187+34i$ | $267-156i$ | $267-156i$ | $80-190i$ | | $10-5i$ | $12-16i$ | $12-21i$ | $2-16i$ | $-5i$ | |
| cr_2 | | | -75 | -75 | -75 | | $18-4i$ | $18-24i$ | $18-24i$ | $-20i$ | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | cr_1 | $9-2i$ | $9-12i$ | $9-12i$ | $-10i$ | | $9-2i$ |
| | | | | | | | $9-2i$ | $9-2i$ | $9-2i$ | | | |
| | | | | | | | | | | $-10i$ | | $-10i$ |
| | | | | | | | | | | $-10i$ | | $-10i$ |
| | | | | | | | | | | | | 0 |

返回



课后练习

1. 求 $f(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ 分别在实数域与复数域的标准分解式.
2. 求一个次数尽可能低的实系数多项式使得 $1, 0, i, 1-i$ 均为其在复数域的根, 并且 i 是二重根.
3. 证明奇数次的实系数多项式必有实根.
4. λ 取何值时, 多项式 $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ 有重根?