

$(2+1)$ -维破裂孤子方程的群叶状 方法和显式解*

韩 众¹ 陈 勇² 郎艳怀³

提要 利用等变活动标架理论, 研究 $(2+1)$ -维破裂孤子方程的群叶状方法和显式解. 原方程的对称群的无穷维部分被用来产生整个解空间的叶状结构, 于是分解系统就继承了对称群的有限维部分. 求解的过程完全符号化和算法化. 利用群叶状方法, 破裂孤子方程的一些显式精确解被得到, 这些解关于无穷维对称子群封闭.

关键词 群叶状方法, 活动标架, 破裂孤子方程

MR (2000) 主题分类 22E05, 34A05, 34A34

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2018)04-0377-14

1 引 言

非线性偏微分方程的求解具有重要意义, 且许多重要的微分方程具有无穷维的对称群. 在李群理论框架下, 群叶状 (也称群分解) 方法是微分方程求解的有效方法. 该方法最初由 Lie^[1]引入, 随后经 Vessiot^[2]发展, 而它的现代形式则由 Ovsiannikov^[3]确立. 在群叶状方法中, 我们首先将所研究方程的解空间关于其一个对称子群, 通常为对称群的无穷维部分, 分解成一个自守系统和一个分解系统. 自守系统刻画了任一解在群作用下的轨道, 而分解系统则区别各个不同的解, 因此它表示轨道的集合. 自守系统可看作一个不变微分约束, 它的所有解均可通过变换群得到. 当关于对称群的无穷维部分做群叶状方法时, 于是分解系统就继承了对称群的有限维部分. 这就使得我们可以系统地研究分解系统的群不变解. 例如, 可以构造分解系统对称群的优化系统来求解分解系统不等价的群不变解. 最终积分相应的自守系统, 可得原方程的解. 群叶状方法的例子在文 [4–10] 中可见. 遗憾的是群叶状方法, 尤其是分解系统的构造, 通常很复杂且不易操作.

众所周知, 微分不变量在几何、微分方程和数学物理中均有重要应用, 可参见文 [11–15]. 对于一个李群, 确定其微分不变量的代数结构是应用微分不变量的第一步. 在文 [16–17] 中, Fels 和 Olver 引入了一个活动标架 Cartan 方法的新的等变法则, 之后又通过一系列文献 (见 [18–20]) 发展了这个方法. 这个方法已被用来构造偏微分方程的结构方程和微分不变量 (见 [21–22]). 最近, Thompson 和 Valiquette 将等变活动标架理论嵌入到群

本文 2016 年 12 月 6 日收到, 2017 年 12 月 5 日收到修改稿.

¹上海高可信计算重点实验室, 华东师范大学, 上海 200062. E-mail: hanzhong22@qq.com

²通信作者. 上海高可信计算重点实验室 华东师范大学, 上海 200062. E-mail: ychen@sei.ecnu.edu.cn

³上海财经大学数学学院, 上海 200433. E-mail: yhlang@shufe.edu.cn

*本文受到全球变化研究项目 (No. 2015CB953904), 国家自然科学基金 (No. 11675054, No. 11275072) 和上海物联网可信软件协作创新中心 (No. ZF1213) 的资助.

叶状方法中 (见 [23]). 与传统的方法相比, 文 [23] 中发展的方法完全符号化和算法化. 特别地, 分解系统的推导仅依赖于微分不变量之间的递推关系和对合关系, 而不需要微分不变量和不变微分算子.

本文研究 $(2+1)$ -维破裂孤子方程 (见 [24–26]) 的群叶状方法和显式解

$$u_{tx} - 4u_x u_{xy} - 2u_{xx} u_y - u_{xxx} u_y = 0, \quad (1.1)$$

这个方程被用来描述沿 y 轴传播的 Riemann 波和沿 x 轴传播的长波之间的相互作用. 当 $y = x$ 时, 它退化为著名的 KdV 方程. 近些年来, 许多人研究了它的 Painlevé 性质、Dromion-型结构、Lax 对及各种精确解 (见 [27–34]). 利用等变活动标架法, 研究了它的微分不变量 (见 [35]). 然而, 据所知方程 (1.1) 的群叶状方法还没有被研究过. 本文利用等变活动标架理论, 研究方程 (1.1) 关于其无穷维部分对称子群的群叶状方法. 可看到求解过程是完全符号化和算法化的, 一些关于无穷维子群封闭的显式解被得到.

本文结构如下: 第 2 节介绍一些关于等变活动标架和微分不变量的预备知识. 第 3 节给出微分不变量代数的详细构造过程. 在第 4 节中, 将给出破裂孤子方程的群叶状结构, 得到它的一些精确解. 最后一节为总结.

2 预备知识

本节介绍一些关于等变活动标架和微分不变量的基本知识, 更多详细结果可参考文献 [11–12, 16–17, 19, 22].

对于下列含有 p 个自变量 $x = (x^1, \dots, x^p)$ 和 q 个因变量 $u = (u^1, \dots, u^q)$ 的偏微分方程组, 其中包含 n 阶导数 u_J^α ,

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, k, \quad (2.1)$$

这里 $z = (x, u)$ 可看作 $m = p + q$ 维流形空间 M 中的一个局部坐标.

考虑方程组 (2.1) 的李点对称

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (2.2)$$

并记其 n 阶延拓为

$$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\#J=0}^n \widehat{\varphi}_J^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (2.3)$$

其中的系数由下面的延拓法则决定

$$\widehat{\varphi}_J^\alpha = D_J \left(\varphi^\alpha - \sum_{i=1}^p u_i^\alpha \xi^i \right) + \sum_{i=1}^p u_{J,i}^\alpha \xi^i. \quad (2.4)$$

本文我们关心对称群 (2.2) 的无穷维部分, 并记

$$\mathcal{L}(\dots, x^i, \dots, u^\alpha, \dots, \xi_A^i, \dots, \varphi_A^\alpha, \dots) = 0, \quad (2.5)$$

为其无穷小决定方程组.

现在给出活动标架的定义.

定义 2.1 对于一个作用在 p 维子流形 $N \subset M$ 上的李伪群 $\mathcal{G}$, 它的 n 阶活动标架为一个局部 $\mathcal{G}$ 等变截面 $\rho^{(n)}: J^n(M, p) \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}$.

构造活动标架 $\rho^{(n)}$ 的一个实用方法是通过正规化过程, 这个过程依赖于为 $\mathcal{G}$ 轨道选择一个横截面. 活动标架一旦确定, 即可通过不变化 n 阶坐标 $(x, u^{(n)})$ 得到正规化的微分不变量,

$$H_i = \iota(x^i), \quad I_j^\alpha = \iota(u_j^\alpha), \quad (2.6)$$

其中 ι 为诱导的不变化过程.

关于微分不变量代数, 有下列定理.

定理 2.1 若李伪群 G 在一适当的开子集 $J^n(M, p)$ 上, 其中 $n \gg 0$ (充分大的 n), 存在一相容的活动标架族, 则所有 $n \geq 0$ 阶非幻影的正规微分不变量 (2.6) 函数无关且构成微分不变量代数 I_G .

通过不变微分可更有效地获得高阶微分不变量. 不变微分算子的一组基 $D_1, \dots, D_p$ 可通过不变化全微分算子 $D_1, \dots, D_p$ 得到. 此外, 通过不变化水平坐标协标架, 我们可得接触不变水平协标架

$$\omega_i = \iota(dx^i), \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.7)$$

为了建立微分不变量之间的递推关系, 微分同胚伪群的 Maurer-Cartan 形式是必需的, 其可看作在无穷节丛上的右不变接触形式. 它的一组基可用纤维坐标 X_A^i, U_A^α 来标记, 并记

$$\chi_A^i, \mu_A^\alpha, \quad i = 1, \dots, p, \alpha = 1, \dots, q, \#A \geq 0 \quad (2.8)$$

表示对应的基 Maurer-Cartan 形式. 下列关于 Maurer-Cartan 形式的定理和定义是重要的.

定理 2.2 限制的 Maurer-Cartan 形式满足提升决定方程组

$$\mathcal{L}(\dots, X^i, \dots, U^\alpha, \dots, \chi_A^i, \dots, \mu_A^\alpha, \dots) = 0, \quad (2.9)$$

其可从无穷小决定方程组 (2.5) 通过下列替换法则得到

$$x^i \mapsto X^i, \quad u^\alpha \mapsto U^\alpha, \quad \xi_A^i \mapsto \chi_A^i, \quad \varphi_A^\alpha \mapsto \mu_A^\alpha.$$

然而, 在构造递推关系的过程中, 最重要的并不是 Maurer-Cartan 形式自身, 而是它们在活动标架映射下的拉回形式.

定义 2.2 给定一个活动标架 $\rho^{(n)}: J^n(M, p) \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}$, 不变的 Maurer-Cartan 形式定义为其拉回形式的水平分量

$$\beta_A^i = \pi_H[(\rho^{(n)})^* \chi_A^i], \quad \zeta_A^\alpha = \pi_H[(\rho^{(n)})^* \mu_A^\alpha], \quad (2.10)$$

其中

$$\chi_A^i, \mu_A^\alpha, \quad i = 1, \dots, p, \alpha = 1, \dots, q, \#A \geq 0 \quad (2.11)$$

为基 Maurer-Cartan 形式.

定理 2.3 不变的 Maurer-Cartan 形式满足不变的决定方程组

$$\mathcal{L}(\dots, H_i, \dots, I^\alpha, \dots, \beta_A^i, \dots, \zeta_A^\alpha, \dots) = 0, \quad (2.12)$$

其可通过不变化无穷小决定方程组 (2.5) 得到.

拓展不变化过程, 令

$$\iota(\xi_A^i) = \beta_A^i, \quad \iota(\varphi_A^\alpha) = \zeta_A^\alpha \quad (2.13)$$

为相应的不变 Maurer-Cartan 形式 (2.10).

定理 2.4 微分不变量 (2.6) 之间的递推关系为

$$\begin{aligned} d_H H_j &= \sum_{i=1}^p (\mathcal{D}_i H_j) \omega_i = \omega_j + \beta^j, \\ d_H I_J^\alpha &= \sum_{i=1}^p (\mathcal{D}_i I_J^\alpha) \omega_i = \sum_{i=1}^p I_{J,i}^\alpha \omega_i + \hat{\psi}_J^\alpha, \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中修正项 $\hat{\psi}_J^\alpha = \iota(\hat{\varphi}_J^\alpha)$ 为延拓向量场中系数 $\hat{\varphi}_J^\alpha$ 的不变化. 事实上, 只需延拓法则 (2.4) 和决定方程组 (2.5) 即可计算 $\hat{\varphi}_J^\alpha$, 而不需要 φ 的显式表达式.

生成对合关系分成两类, 第一类为如下形式:

$$\mathcal{D}_K I_J^\alpha = c_{JK}^\alpha + M_{J,K}^\alpha, \quad (2.15)$$

其中 I_J^α 为一个生成微分不变量, $I_{JK}^\alpha = c_{JK}^\alpha$ 为一个幻影微分不变量; 而第二类形式为

$$\mathcal{D}_J I_{LK}^\alpha - \mathcal{D}_K I_{LJ}^\alpha = M_{LK,J}^\alpha - M_{LJ,K}^\alpha, \quad (2.16)$$

其中 I_{LK}^α 和 I_{LJ}^α 均为生成微分不变量, 指标集 $K \cap J = \emptyset$ 不相交且非空, L 为一个任意的多指标.

3 微分不变量代数

对于 (2+1)-维破裂孤子方程, 其对称群的向量场 $\mathbf{v}$ 为

$$\mathbf{v} = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_y + \varphi \partial_u, \quad (3.1)$$

其中无穷小 τ, ξ, η 和 φ 均为 t, x, y, u 的函数. 由方程 (1.1) 在向量场 (3.1) 下的不变条件可得一组关于 τ, ξ, η 和 φ 的超定系统, 解得

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t + \lambda_3, \quad \xi = \frac{1}{4} (\lambda_1 t + 2\lambda_2 - 2\lambda_5) x + f, \\ \eta &= \frac{1}{2} (\lambda_1 y + 2\lambda_4) t + \lambda_5 y + \lambda_6, \\ \varphi &= -\frac{1}{4} (\lambda_1 t + 2\lambda_2 - 2\lambda_5) u - \frac{1}{4} \lambda_4 x - \frac{1}{8} \lambda_1 x y - \frac{1}{2} y f' + g, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 为常数, $f \equiv f(t)$ 和 $g \equiv g(t)$ 均为 t 的光滑函数, $'$ 表示求导. 因此对称群的无穷维部分为

$$\mathbf{v}_f = f \partial_x - \frac{1}{2} y f' \partial_u, \quad \mathbf{v}_g = g \partial_u. \quad (3.3)$$

同时, 向量场 (3.3) 的无穷小决定方程组为

$$\tau = \eta = \xi_x = \xi_y = \xi_u = \varphi_x = \varphi_u = 0, \quad \varphi_y = -\frac{1}{2} \xi_t. \quad (3.4)$$

在对递推关系的结构有所了解之后, 我们再选取确定活动标架的横截面. 首先, 令

$$H_1 = \iota(t), \quad H_2 = \iota(x), \quad H_3 = \iota(y), \quad I_{ijk} = \iota(u_{ijk})$$

表示正规化的微分不变量, 用

$$\alpha_{ijkl} = \iota(\tau_{ijkl}), \quad \beta_{ijkl} = \iota(\xi_{ijkl}), \quad \gamma_{ijkl} = \iota(\eta_{ijkl}), \quad \zeta_{ijkl} = \iota(\varphi_{ijkl})$$

表示不变的 Maurer-Cartan 形式. 由不变化决定方程组 (3.4), 可得不变的 Maurer-Cartan 形式之间的完全线性相关系统为

$$\alpha = \gamma = \beta_X = \beta_Y = \beta_U = \zeta_X = \zeta_U = 0, \quad \zeta_Y = -\frac{1}{2}\beta_T, \quad (3.5)$$

且不变的 Maurer-Cartan 形式的一组基可选为

$$\beta_{T^n}, \quad \zeta_{T^n}, \quad n \geq 0,$$

记 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ 为对偶于不变水平协标架的不变微分算子

$$\omega_1 = \iota(dt), \quad \omega_2 = \iota(dx), \quad \omega_3 = \iota(dy). \quad (3.6)$$

同样, 这里并不要求它们的具体形式.

于是, 由定理 2.4 下面的递推关系立即可得

$$\begin{aligned} d_H H_1 &= \omega_1, \quad d_H H_2 = \omega_2 + \beta, \quad d_H H_3 = \omega_3, \\ d_H I_{000} &= I_{100}\omega_1 + I_{010}\omega_2 + I_{001}\omega_3 + \zeta, \\ d_H I_{100} &= I_{200}\omega_1 + I_{110}\omega_2 + I_{101}\omega_3 - I_{010}\beta_T + \zeta_T, \\ d_H I_{010} &= I_{110}\omega_1 + I_{020}\omega_2 + I_{011}\omega_3, \\ d_H I_{001} &= I_{101}\omega_1 + I_{011}\omega_2 + I_{002}\omega_3 - \frac{1}{2}\beta_T, \\ d_H I_{110} &= I_{210}\omega_1 + I_{120}\omega_2 + I_{111}\omega_3 - I_{020}\beta_T, \\ d_H I_{101} &= I_{201}\omega_1 + I_{111}\omega_2 + I_{102}\omega_3 - \frac{1}{2}\beta_{TT} - I_{011}\beta_T, \\ d_H I_{011} &= I_{111}\omega_1 + I_{021}\omega_2 + I_{012}\omega_3, \\ d_H I_{200} &= I_{300}\omega_1 + I_{210}\omega_2 + I_{201}\omega_3 - 2I_{110}\beta_T - I_{010}\beta_{TT} + \zeta_{TT}, \\ d_H I_{020} &= I_{120}\omega_1 + I_{030}\omega_2 + I_{021}\omega_3, \\ d_H I_{002} &= I_{102}\omega_1 + I_{012}\omega_2 + I_{003}\omega_3, \\ d_H I_{300} &= I_{400}\omega_1 + I_{310}\omega_2 + I_{301}\omega_3 - 3I_{210}\beta_T - 3I_{110}\beta_{TT} - I_{010}\beta_{TTT} + \zeta_{TTT}, \\ d_H I_{030} &= I_{130}\omega_1 + I_{040}\omega_2 + I_{031}\omega_3, \\ d_H I_{003} &= I_{103}\omega_1 + I_{013}\omega_2 + I_{004}\omega_3, \\ d_H I_{120} &= I_{220}\omega_1 + I_{130}\omega_2 + I_{121}\omega_3 - I_{030}\beta_T, \\ d_H I_{210} &= I_{310}\omega_1 + I_{220}\omega_2 + I_{211}\omega_3 - 2I_{120}\beta_T - I_{020}\beta_{TT}, \\ d_H I_{102} &= I_{202}\omega_1 + I_{112}\omega_2 + I_{103}\omega_3 - I_{012}\beta_T, \\ d_H I_{201} &= I_{301}\omega_1 + I_{211}\omega_2 + I_{202}\omega_3 - 2I_{111}\beta_T - I_{011}\beta_{TT} - \frac{1}{2}\beta_{TTT}, \\ d_H I_{012} &= I_{112}\omega_1 + I_{022}\omega_2 + I_{013}\omega_3, \\ d_H I_{021} &= I_{121}\omega_1 + I_{031}\omega_2 + I_{022}\omega_3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.7)$$

考虑正规化条件

$$H_2 = 0, \quad I_{000} = 0, \quad I_{i,0,0} = 0, \quad I_{i-1,0,1} = 0, \quad i \geq 1, \quad (3.8)$$

将 (3.8) 代入 (3.7), 可得基本的不变形式:

$$\begin{aligned} \beta &= -\omega_2, \quad \beta_T = 2(I_{011}\omega_2 + I_{002}\omega_3), \\ \beta_{TT} &= 2(I_{111} - 2I_{011}^2)\omega_2 + 2(I_{102} - 2I_{002}I_{011})\omega_3, \quad \cdots, \\ \zeta &= -I_{010}\omega_2, \quad \zeta_T = (2I_{010}I_{011} - I_{110})\omega_2 + 2I_{010}I_{002}\omega_3, \\ \zeta_{TT} &= (2I_{010}I_{111} + 4I_{011}I_{110} - 4I_{010}I_{011}^2 - I_{210})\omega_2 \\ &\quad + 2(I_{010}I_{102} + 4I_{110}I_{002} - 4I_{010}I_{011}I_{002})\omega_3, \quad \cdots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

而更高阶的不变 Maurer-Cartan 形式可递归得到.

将 (3.9) 代入 (3.7) 式中非幻影变量方程, 即得微分不变量之间的递推关系:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 I_{010} &= I_{110}, \quad \mathcal{D}_2 I_{010} = I_{020}, \quad \mathcal{D}_3 I_{010} = I_{011}, \\ \mathcal{D}_1 I_{011} &= I_{111}, \quad \mathcal{D}_2 I_{011} = I_{021}, \quad \mathcal{D}_3 I_{011} = I_{012}, \\ \mathcal{D}_1 I_{110} &= I_{210}, \quad \mathcal{D}_2 I_{110} = I_{120} - 2I_{011}I_{020}, \quad \mathcal{D}_3 I_{110} = I_{111} - 2I_{002}I_{020}, \\ \mathcal{D}_1 I_{020} &= I_{120}, \quad \mathcal{D}_2 I_{020} = I_{030}, \quad \mathcal{D}_3 I_{020} = I_{021}, \\ \mathcal{D}_1 I_{002} &= I_{102}, \quad \mathcal{D}_2 I_{002} = I_{012}, \quad \mathcal{D}_3 I_{002} = I_{003}, \\ \mathcal{D}_1 I_{102} &= I_{202}, \quad \mathcal{D}_2 I_{102} = I_{112} - 2I_{011}I_{012}, \quad \mathcal{D}_3 I_{102} = I_{103} - 2I_{002}I_{012}, \\ \mathcal{D}_1 I_{012} &= I_{112}, \quad \mathcal{D}_2 I_{012} = I_{022}, \quad \mathcal{D}_3 I_{012} = I_{013}, \\ \mathcal{D}_1 I_{021} &= I_{121}, \quad \mathcal{D}_2 I_{021} = I_{031}, \quad \mathcal{D}_3 I_{021} = I_{022}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.10)$$

至此, 我们得到下面的定理.

定理 3.1 $(2+1)$ -维破裂孤子方程无穷维部分对称群的微分不变量代数的基本生成集为 $\{H_1, H_3, I_{010}, I_{002}\}$.

下面, 为了推导活动标架和微分不变量的显式形式, 我们考虑 (3.3) 对应的变换

$$T = t, \quad X = x + f, \quad Y = y, \quad U = u - \frac{1}{2}yf' + g. \quad (3.11)$$

于是, 群变换 (3.11) 的提升水平协标架为

$$d_H T = dt, \quad d_H X = f'dt + dx, \quad d_H Y = dy, \quad (3.12)$$

且对偶的提升全微分算子为

$$D_T = D_t - f'D_x, \quad D_X = D_x, \quad D_Y = D_y. \quad (3.13)$$

反复将微分算子 (3.13) 作用到 (3.11) 中的 U 上, 可得 (3.3) 在子流形节丛上延拓的群作用. 例如,

$$\begin{aligned}\widehat{U}_T &= u_t - f'u_x - \frac{1}{2}yf'' + g', & \widehat{U}_X &= u_x, & \widehat{U}_Y &= u_y - \frac{1}{2}f', \\ \widehat{U}_{TX} &= u_{tx} - f'u_{xx}, \\ \widehat{U}_{TT} &= u_{tt} - f''u_x + f'^2u_{xx} - 2f'u_{tx} - \frac{1}{2}yf''' + g'', \\ \widehat{U}_{TY} &= u_{ty} - f'u_{xy} - \frac{1}{2}f'', \\ \widehat{U}_{XX} &= u_{xx}, & \widehat{U}_{XY} &= u_{xy}, & \widehat{U}_{YY} &= u_{yy}, & \widehat{U}_{XXX} &= u_{xxx}, \\ \widehat{U}_{XXXY} &= u_{xxxx}, & \cdots\end{aligned}\quad (3.14)$$

解正规化方程组 (3.8), 可得群参数

$$\begin{aligned}f &= -x, & f' &= 2u_y, & f'' &= 2u_{ty} - 4u_{xy}u_y, & \cdots, \\ g &= yu_y - u, & g' &= y(u_{ty} - 2u_yu_{xy}) + 2u_xu_y - u_t, & \cdots.\end{aligned}\quad (3.15)$$

再将 (3.15) 代入其他的变换子流形节丛坐标可得正规微分不变量

$$\begin{aligned}H_1 &= \iota(t) = t, & H_3 &= \iota(y) = y, & I_{010} &= \iota(u_x) = u_x, \\ I_{011} &= \iota(u_{xy}) = u_{xy}, & I_{020} &= \iota(u_{xx}) = u_{xx}, & I_{002} &= \iota(u_{yy}) = u_{yy}, \\ I_{110} &= \iota(u_{tx}) = u_{tx} - 2u_{xx}u_y, & I_{031} &= \iota(u_{xxx}) = u_{xxx}, & \cdots.\end{aligned}\quad (3.16)$$

最终, 方程 (1.1) 立即可用所得的微分不变量表示

$$\begin{aligned}\iota(\text{Eq.}(1.1)) &= I_{110} - 4I_{010}I_{011} - I_{031} \\ &= u_{tx} - 2u_{xx}u_y - 4u_xu_{xy} - u_{xxx} = 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

方程 (3.17) 在推导群叶状方法分解系统中有重要作用.

4 群叶状方法和显式解

由定理 3.1, 我们可将 H_1, H_3, I_{010} 看作自守系统中函数无关的参变量, 余下的 I_{002} 看作关于它们的一个实函数. 此外, 需验证相关性条件

$$\begin{aligned}d_H H_1 \wedge d_H H_3 \wedge d_H I_{010} &= \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge (I_{110}\omega_1 + I_{020}\omega_2 + I_{011}\omega_3) \\ &= -I_{020}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3.\end{aligned}\quad (4.1)$$

于是, 需分别考虑 $I_{020} \neq 0$ 和 $I_{020} = 0$ 两种不同的情形.

4.1 情形 1, $I_{020} \neq 0$

首先用不变导数 D_{H_1} , D_{H_3} 和 $D_{I_{010}}$ 来表示不变全导数算子 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ 和 $\mathcal{D}_3$. 由链式法则, 可知

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \mathcal{D}_1 H_1 \cdot D_{H_1} + \mathcal{D}_1 H_3 \cdot D_{H_3} + \mathcal{D}_1 I_{010} \cdot D_{I_{010}} = D_{H_1} + I_{110}D_{I_{010}}, \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{D}_2 H_1 \cdot D_{H_1} + \mathcal{D}_2 H_3 \cdot D_{H_3} + \mathcal{D}_2 I_{010} \cdot D_{I_{010}} = I_{020}D_{I_{010}}, \\ \mathcal{D}_3 &= \mathcal{D}_3 H_1 \cdot D_{H_1} + \mathcal{D}_3 H_3 \cdot D_{H_3} + \mathcal{D}_3 I_{010} \cdot D_{I_{010}} = D_{H_3} + I_{011}D_{I_{010}}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

显然另外 3 个不变量 I_{110} , I_{020} 和 I_{011} 应当作因变量加入到生成集中. 于是, 在这种情形下, 生成集 (不是最小/基本生成集) 变成 $\{H_1, H_3, I_{010}, I_{002}, I_{110}, I_{020}, I_{011}\}$, 且生成集之间的对合关系为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3^2 I_{010} - \mathcal{D}_2 I_{002} &= 0, & \mathcal{D}_2 I_{110} - \mathcal{D}_1 I_{020} + 2I_{011} I_{020} &= 0, \\ \mathcal{D}_3 I_{020} - \mathcal{D}_2 I_{011} &= 0, & \mathcal{D}_3 I_{110} - \mathcal{D}_1 I_{011} + 2I_{002} I_{020} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

同时, 立即可得一个秩为 3 的自守系统:

$$\begin{aligned} I_{002} &= E(H_1, H_3, I_{010}), & I_{110} &= J(H_1, H_3, I_{010}), \\ I_{020} &= K(H_1, H_3, I_{010}), & I_{011} &= L(H_1, H_3, I_{010}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

此外, 已知方程 (1.1) 的不变化为

$$I_{110} - 4I_{010}I_{011} - I_{031} = I_{110} - 4I_{010}I_{011} - \mathcal{D}_2^2 I_{011} = 0, \quad (4.5)$$

它被称作约束对合关系.

将 (4.3) 和 (4.5) 用 (4.2) 和 (4.4) 表示, 立即可得下面的分解系统

$$\begin{aligned} K_{H_3} + LK_{I_{010}} - KL_{I_{010}} &= 0, \\ L_{H_3} + LL_{I_{010}} - KE_{I_{010}} &= 0, \\ KJ_{I_{010}} + 2KL - K_{H_1} - JK_{I_{010}} &= 0, \\ J_{H_3} + LJ_{I_{010}} + 2EK - L_{H_1} - JL_{I_{010}} &= 0, \\ J - 4I_{010}L - (K_{I_{010}}L_{I_{010}} + KL_{I_{010}, I_{010}})K &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

这个方程组刻画了自守系统 (4.4) 的可积条件. 经计算可知 (4.6) 的李对称群由下列 6 个向量场生成:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \partial_{H_1}, & \mathbf{x}_3 &= H_1 \partial_{H_1} + H_3 \partial_{H_3} - 2E \partial_E - J \partial_J - L \partial_L, \\ \mathbf{x}_2 &= \partial_{H_3}, & \mathbf{x}_4 &= H_3 \partial_{H_3} + I_{010} \partial_{I_{010}} - \frac{3}{2} E \partial_E + J \partial_J + \frac{3}{2} K \partial_K, \\ \mathbf{x}_5 &= \frac{1}{2} H_1^2 \partial_{H_1} + \frac{1}{2} H_1 H_3 \partial_{H_3} - \frac{1}{8} (H_3 + 4H_1 I_{010}) \partial_{I_{010}} \\ &\quad - \frac{5}{4} H_1 E \partial_E - \left(\frac{3}{2} H_1 J + \frac{1}{2} (H_3 L + I_{010}) \right) \partial_J - \frac{3}{4} H_1 K \partial_K - \left(H_1 L + \frac{1}{8} \right) \partial_L, \\ \mathbf{x}_6 &= -4H_1 \partial_{H_3} + \partial_{I_{010}} + 4L \partial_J. \end{aligned} \quad (4.7)$$

最近, 文 [36] 和文 [37] 中分别提出了构造李对称群一维和二维优化系统的直接算法. 本文为简化起见, 我们仅考虑方程组 (4.6) 在四维子代数 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ 下的对称约化. 利用文 [37] 中的方法, 略去复杂的计算, 可得上述子代数的一个二维优化系统为

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3\}, & \mathfrak{g}_2 &= \{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3\}, \\ \mathfrak{g}_3 &= \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 + k_1 \mathbf{x}_4\}, & \mathfrak{g}_4 &= \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_4\}, \\ \mathfrak{g}_5 &= \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4\}, & \mathfrak{g}_6 &= \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 + k_2 \mathbf{x}_4\}, & \mathfrak{g}_7 &= \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4\}, \\ \mathfrak{g}_8 &= \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4\}, & \mathfrak{g}_9 &= \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \\ \mathfrak{g}_{10} &= \{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, & & (k_1, k_2 \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

利用 (4.8), (4.6) 可被直接约化成一组常微分方程. 求解相应的常微分方程组, 可得 (4.6) 的精确解, 于是即可得到显式的自守系统.

利用 g_1 , 略去复杂的计算, 得到 (4.6) 的一个精确解

$$E = 0, \quad J = -\frac{I_{010}}{H_1 + 1}, \quad K = c \left(4I_{010} + \frac{H_3 + 1}{H_1 + 1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad L = -\frac{1}{4(H_1 + 1)}. \quad (4.9)$$

于是, 我们得到下面的自守系统:

$$u_{yy} = 0, \quad u_{tx} - 2u_{xx}u_y = -\frac{u_x}{t+1}, \quad u_{xx} = c \left(4u_x + \frac{y+1}{t+1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad u_{xy} = -\frac{1}{4(t+1)}. \quad (4.10)$$

求解 (4.10), 可得破裂孤子方程的一个显式解

$$u = -\frac{1}{16} \left(\frac{4x}{t+1} + \frac{1}{c^2(x+h_1)} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{x+h_1}{t+1} - 2h'_1 \right) y + h_2. \quad (4.11)$$

在 (4.11) 及下面得到的解中, $c \neq 0$ 为常数, $h_1 \equiv h_1(t)$ 和 $h_2 \equiv h_2(t)$ 为任意函数.

考虑 g_2 , 可得 (4.6) 的另一解

$$E = 0, \quad J = -\frac{I_{010}}{H_1 + 1}, \quad K = c \left(4I_{010} + \frac{H_3}{H_1 + 1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad L = -\frac{1}{4(H_1 + 1)}. \quad (4.12)$$

类似地, 得到

$$u = -\frac{1}{16c^2(x+h_1)} - \frac{1}{4} \left(\frac{x+h_1}{t+1} - 2h'_1 \right) y + h_2. \quad (4.13)$$

解 (4.11) 和解 (4.13) 均关于 y 线性而关于 x 非线性. 它们在 $t = -1$ 和 $x = -h_1$ 处均具有奇性, 且当 $x \rightarrow \infty$ 时无界.

利用 g_3 , 得到 (4.6) 下面的解

$$E = -\frac{k_1(k_1+1)}{8c}(H_1)^{-\frac{3}{2}k_1-2}, \quad J = k_1 \frac{I_{010}}{H_1}, \quad K = c(H_1)^{\frac{3}{2}k_1}, \quad L = \frac{k_1}{4H_1}, \quad (4.14)$$

从中可得另一显式解

$$u = \frac{c}{2} t^{\frac{3}{2}k_1} x^2 + \left(\frac{k_1 y}{4t} + h_1 \right) x + \frac{t^{-\frac{3}{2}k_1-2}}{16c} (8t(th'_1 - k_1 h_1)y - k_1(k_1+1)y^2) + h_2. \quad (4.15)$$

这个解关于 x 是二次的且在 $t = 0$ 处有奇性. 当 $k_1 \neq 0$ 且 $k_1 \neq -1$ 时, 它关于 y 也是二次的. 求解方程组

$$\begin{cases} u_x = ct^{\frac{3}{2}k_1}x + \frac{k_1 y}{4t} + h_1 = 0, \\ u_y = \frac{t^{-\frac{3}{2}k_1-2}}{8c}(4t(th'_1 - k_1 h_1) - k_1(k_1+1)y) = 0, \end{cases}$$

得到其驻点为

$$P_0(x, y) = \left(-\frac{2t^{-\frac{3}{2}k_1}}{c(3k_1+2)}(th'_1 + h_1), \frac{4t}{k_1(3k_1+2)}(2th'_1 - 3k_1 h_1) \right).$$

容易验证 $u_{xx}(P_0) = ct^{\frac{3}{2}k_1}$, 且 $(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)(P_0) = -\frac{1}{16} \frac{k_1(3k_1+2)}{t^2}$.

于是, 对于有限时间 $t = t_0 > 0$ 且 $-\frac{2}{3} < k_1 < 0$, 当 $c > 0$ 时, (4.15) 在驻点 P_0 处取得最小值; 当 $c < 0$ 时, 它在 P_0 处取得最大值. 而当 $k_1 < -\frac{2}{3}$ 或 $k_1 > 0$ 时, (4.15) 不能在 P_0 处取得最值.

利用 g_4 , 得到 (4.6) 的一个解

$$E = -\frac{1}{8c} \exp\left(-\frac{3}{2}H_1\right), \quad J = I_{010}, \quad K = c \exp\left(\frac{3}{2}H_1\right), \quad L = \frac{1}{4}, \quad (4.16)$$

于是, 可得相应的解为

$$u = \frac{c}{2}x^2 \exp\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{16c}(8(h'_1 - h_1)y - y^2) \exp\left(-\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{4}xy + xh_1 + h_2. \quad (4.17)$$

这个解关于 x 和 y 都是二次的. 它的驻点为

$$P_0(x, y) = \left(-\frac{2}{3c}h'_1 \exp\left(-\frac{3}{2}t\right), \frac{8}{3}h'_1 - 4h_1\right),$$

由于 $(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)(P_0) = -\frac{3}{16} < 0$, 因此它不能在 P_0 处取得极值.

考虑 g_5 , 我们得到 (4.6) 的另一解

$$E = -\frac{1}{8c} \exp\left(\frac{3}{2}H_1\right), \quad J = -I_{010}, \quad K = c \exp\left(-\frac{3}{2}H_1\right), \quad L = -\frac{1}{4}, \quad (4.18)$$

且对应的精确解为

$$u = \frac{c}{2}x^2 \exp\left(-\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{16c}(8(h'_1 + h_1)y - y^2) \exp\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{1}{4}xy + xh_1 + h_2. \quad (4.19)$$

类似地, 可知这个解同样不能在其驻点处取得极值.

利用 g_6 , 可得 (4.6) 的一个简单解

$$E = J = L = 0, \quad K = c(I_{010})^{\frac{3}{2}}, \quad (4.20)$$

其对应的解为

$$u = -\frac{4}{c^2(x + 2h_1)} + h'_1y + h_2. \quad (4.21)$$

利用优化系统 (4.8) 中的其他元素, 分解系统 (4.6) 的更多精确解可能被发现. 于是, 就可能求得破裂孤子方程更多的显式解, 限于篇幅, 这里不再讨论.

4.2 情形 2, $I_{020} = 0$

在这种情形下, H_1 和 H_3 被看作自守系统中两个函数无关的参变量, 而 I_{010} 和 I_{002} 被当作因变量. 类似地, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \mathcal{D}_1 H_1 \cdot D_{H_1} + \mathcal{D}_1 H_3 \cdot D_{H_3} = D_{H_1}, \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{D}_2 H_1 \cdot D_{H_1} + \mathcal{D}_2 H_3 \cdot D_{H_3} = 0, \\ \mathcal{D}_3 &= \mathcal{D}_3 H_1 \cdot D_{H_1} + \mathcal{D}_3 H_3 \cdot D_{H_3} = D_{H_3}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

同时, 立即可得一个秩为 2 的自守系统

$$I_{010} = M(H_1, H_3), \quad I_{002} = E(H_1, H_3), \quad (4.23)$$

且 I_{010} 和 I_{002} 之间的对合关系为

$$\mathcal{D}_3^2 I_{010} - \mathcal{D}_2 I_{002} = 0. \quad (4.24)$$

另有方程 (1.1) 的不变化为

$$I_{110} - 4I_{010}I_{011} - I_{031} = \mathcal{D}_1 I_{010} - 4I_{010}\mathcal{D}_3 I_{010} - \mathcal{D}_2^2 \mathcal{D}_3 I_{010} = 0. \quad (4.25)$$

于是, 可得

$$M_{H_3, H_3} = 0, \quad M_{H_1} - 4MM_{H_3} = 0, \quad (4.26)$$

且方程组的解为

$$M = \frac{c_1 + H_3}{c_2 - 4H_1}, \quad (4.27)$$

其中 c_1 和 c_2 为常数. 求解

$$u_{xx} = 0, \quad u_x = \frac{c_1 + y}{c_2 - 4t}, \quad (4.28)$$

可得破裂孤子方程的另一解为

$$u = \frac{(c_1 + y)x}{c_2 - 4t} + h(t, y). \quad (4.29)$$

5 结 语

等变活动标架理论为研究无穷维李伪群的微分不变量代数提供了一个强有力的工具. 文中, 仅从无穷小决定方程组和一组正规横截面出发, 我们就完全确定了破裂孤子方程无穷维对称子群的微分不变量递推法则. 利用所得到的微分不变量, 研究了破裂孤子方程的群叶状方法. 可看到分解系统的推导过程是直接的和符号化的, 不依赖于微分不变量或不变微分算子的任何显式形式. 与传统的群叶化方法相比, 本文的求解过程是完全符号化和算法化的. 接着, 利用一个二维优化系统, 分解系统的一些群不变解被得到以获得显式的自守系统. 最终, 通过积分自守系统即可得到原方程的解. 由于自守性, 自守系统的解很容易被得到.

在求解分解系统 (4.6) 的过程中, 我们仅考虑了一个四维的子群. 研究 (4.6) 在整个六维对称群下的对称约化可得到 (4.6) 更多的解, 这是今后需考虑的问题. 此外, 可验证本文所得到的解均为群不变解. 于是这就产生下面的问题: 分解系统的对称约化是否导致原方程的对称约化, 即导致群不变解? 若是, 则当期望得到原方程的非群不变解时, 就不能再对分解系统做对称约化. 因此, 如何通过其他方法或技巧构造分解系统更多的精确解就显得非常重要. 这个问题有趣且重要, 值得我们进一步研究.

参 考 文 献

- [1] Lie S. Zur allgemeinen theorie der partiellen differentialgleichungen beliebiger ordnung [J]. *Leipz Ber*, 1895, 1:53–128.
- [2] Vessiot E. Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations [J]. *Acta Math*, 1904, 28(1):307–349.
- [3] Ovsiannikov L V. Group analysis of differential equations [M]. New York: Academic, 1982.
- [4] Nutku Y, Sheftel M B. Differential invariants and group foliation for the complex Monge-Ampère equation [J]. *J Phys A Math Gen*, 2001, 34(1):137–156.

- [5] Martina L, Sheftel M B, Winternitz P. Group foliation and non-invariant solutions of the heavenly equation [J]. *J Phys A Math Gen*, 2001, 34(43):9243–9263.
- [6] Anco S C, Liu S. Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions [J]. *J Math Anal Appl*, 2004, 297(1):317–342.
- [7] Anco S C, Ali S, Wolf T. Symmetry analysis and exact solutions of semilinear heat flow in multi-dimensions [J]. *J Math Anal Appl*, 2011, 379(2):748–763.
- [8] Qu Changzheng, Zhang Shunli. Group foliation method and functional separation of variables to nonlinear diffusion equations [J]. *Chinese Phys Lett*, 2005, 22(7):1563–1566.
- [9] Qu Changzheng, Zhang Shunli. Extended group foliation method and functional separation of variables to nonlinear wave equations [J]. *Commun Theor Phys*, 2005, 44(4):577–582.
- [10] Hu Jiayi, Qu Changzheng. Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 330(1):289–311.
- [11] Olver P J. Applications of Lie groups to differential equations [M]. New York: Springer, 1993.
- [12] Olver P J. Equivalence, invariants and symmetry [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [13] Olver P J. Geometric foundations of numerical algorithms and symmetry [J]. *Appl Algebra Engrg Comm Comput*, 2001, 11(5):417–436.
- [14] Tsujishita T. On variation bicomplexes associated to differential equations [J]. *Osaka J Math*, 1982, 19:311–363.
- [15] Kogan I A, Olver P J. Invariant Euler-Lagrange equations and the invariant variational bicomplex [J]. *Acta Appl Math*, 2003, 76(2):137–193.
- [16] Fels M, Olver P J. Moving coframes. I. A practical algorithm [J]. *Acta Appl Math*, 1998, 51(2):161–213.
- [17] Fels M, Olver P J. Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations [J]. *Acta Appl Math*, 1999, 55(4):127–208.
- [18] Olver P J, Pohjanpelto J. Maurer-Cartan forms and structure of Lie pseudo-groups [J]. *Selecta Math*, 2005, 11(2):99–126.
- [19] Olver P J, Pohjanpelto J. Moving frames for Lie pseudo-groups [J]. *Canadian J Math*, 2008, 60(6):1336–1386.
- [20] Olver P J, Pohjanpelto J. Differential invariant algebras of Lie pseudogroups [J]. *Adv in Math*, 2009, 222(5):1746–1792.
- [21] Cheh J, Olver P J, Pohjanpelto J. Maurer-Cartan equations for Lie symmetry pseudo-groups of differential equations [J]. *J Math Phys*, 2005, 46(2):023504.

- [22] Cheh J, Olver P J, Pohjanpelto J. Algorithms for differential invariants of symmetry groups of differential equations [J]. *Found Comput Math*, 2008, 8(4):501–532.
- [23] Thompson R, Valiquette F. Group foliation of differential equations using moving frames [J]. *Forum of Mathematics Sigma*, 2015, 3:1–53.
- [24] Calogero F, Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform-I [J]. *Nuovo Cimento B*, 1976, 32(2):201–242.
- [25] Calogero F, Degasperis A. Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform-II [J]. *Nuovo Cimento B*, 1977, 39(1):1–54.
- [26] Bogoyavlenskii O I. Breaking solitons in 2+1-dimensional integrable equations [J]. *Russian Math Surveys*, 1990, 45(4):1–86.
- [27] Radha R, Lakshmanan M. Dromion like structures in the (2+1)-dimensional breaking soliton equation [J]. *Phys Lett A*, 1995, 197(1):7–12.
- [28] Alagesan T, Chung Y, Nakkeeran K. Painlevé test for the certain (2+1)-dimensional nonlinear evolution equations [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 26(4):1203–1209.
- [29] Lou Senyue, Tang Xiaoyan, Liu Qingping, Fukuyama T. Second order lax pairs of nonlinear partial differential equations with Schwarzian forms [J]. *Z Naturforsch A*, 2002, 57(9):737–744.
- [30] Yan Zhenya, Zhang Hongqing. Constructing families of soliton-like solutions to a (2+1)-dimensional breaking soliton equation using symbolic computation [J]. *Comput Math Appl*, 2002, 44(10):1439–1444.
- [31] Li Biao, Chen Yong, Xuan Hengnong, et al. Symbolic computation and construction of soliton-like solutions for a breaking soliton equation [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2003, 17(5):885–893.
- [32] Geng Xianguo, Cao Cewen. Explicit solutions of the 2+1-dimensional breaking soliton equation [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2004, 22(3):683–691.
- [33] Fan Engui, Hon Y C. Quasiperiodic waves and asymptotic behavior for Bogoyavlenskii's breaking soliton equation in (2 + 1)-dimensions [J]. *Phys Rev E*, 2008, 78(3):036607.
- [34] Fan Engui, Chow K W. Darboux covariant lax pairs and infinite conservation laws of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation [J]. *J Math Phys*, 2011, 52(2):023504.
- [35] Han Zhong, Chen Yong. Differential invariants of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation [J]. *Z Naturforsch A*, 2016, 71(9):855–862.
- [36] Hu Xiaorui, Li Yuqi, Chen Yong. A direct algorithm of one-dimensional optimal system for the group invariant solutions [J]. *J Math Phys*, 2015, 56(5):053504.
- [37] Hu Xiaorui, Li Yuqi, Chen Yong. Constructing two-dimensional optimal system of the group invariant solutions [J]. *J Math Phys*, 2016, 57(2):023518.

Group Foliation and Explicit Solutions of the $(2+1)$ -Dimensional Breaking Soliton Equation

HAN Zhong¹ CHEN Yong² LANG Yanhuai³

¹Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, East China Normal University, Shanghai 200062, China. E-mail: hanzhong22@qq.com

²Corresponding author. Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, East China Normal University, Shanghai 200062, China.
E-mail: ychen@sei.ecnu.edu.cn

³School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China. E-mail: yhlang@shufe.edu.cn

Abstract Group foliation of the $(2+1)$ -dimensional breaking soliton equation is performed within the theory of equivariant moving frames. The infinite-dimensional part of the admitted symmetry group is utilized to produce a foliation of its entire solution space, so the resolving system inherits only the finite-dimensional part of the symmetry group. The procedure of the method is completely symbolic and algorithmic. With the group foliation reduction method, some solutions of the breaking soliton equation are obtained in an explicit form which are closed with respect to the regarding infinite-dimensional subgroup.

Keywords Group foliation, Equivariant moving frames, Differential invariants,
 $(2+1)$ -Dimensional breaking soliton equation

2000 MR Subject Classification 22E05, 34A05, 34A34

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 4, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA