20 世纪中叶以前的余弦定理历史①

汪晓勤

（华东师范大学数学系　200241）

近年来，将数学史融入数学教学的实践与案例开发已成为 HPM 领域的中心课题之一. 然而，数学史资源的匮乏是导致中学 HPM 实践难以开展的主要因素之一. 随机选择一个中学数学课题，考虑从 HPM 的视角进行教学设计，结果，教师往往会发现，这个知识点的历史其实是个盲点. 在与中学教师研讨余弦定理的 HPM 教学设计时，我们首先需要解决的就是历史这个盲点.

另一方面，在高中数学教材即将开始修订之际，"数学史融入数学教材"成了人们关注的研究课题. 就余弦定理而言，需要先解决"融入什么"，才能解决"如何融入"的问题.

基于上述原因，我们对 17—20 世纪 142 种三角学文献进行考察（限于篇幅，其中绝大部分文献未在参考文献中列出），试图回答：20 世纪中叶以前，余弦定理是如何演变的？有哪些推导方法？余弦定理的历史对今日教学有何启示？

为便于表述，我们将余弦定理分成几何和三角两种形式，前者不含三角形内角的余弦，后者即为我们熟知的三个含内角余弦的等式. 将几何形式与直角三角形边角关系结合起来，就成了三角形式.

1　从欧几里得到毕蒂克斯

余弦定理是作为勾股定理的推广而诞生的. 公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》卷二分别给出钝角三角形和锐角三角形三边之间的关系[1]：

命题Ⅱ.12　在钝角三角形中，钝角对边上的正方形面积大于两锐角对边上的正方形面积之和，其差为一矩形的两倍，该矩形由一锐角的对边和从该锐角（顶点）向对边延长线作垂线，垂足到钝角（顶点）之间的一段所构成.

命题Ⅱ.13　在锐角三角形中，锐角对边上的正方形面积小于该锐角两边上的正方形面积之和，其差为一矩形的两倍，该矩形由另一锐角的对边和从该锐角（顶点）向对边作垂线，垂足到原锐角（顶点）之间的一段所构成.

命题Ⅱ.12 相当于说，在图 1 所示钝角三角形△ABC 中，

$$a^2=b^2+c^2+2cm\ (a\text{ 为钝角对边})\qquad(1)$$

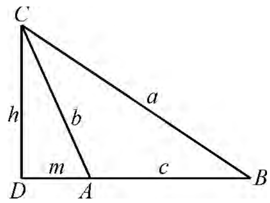

图 1

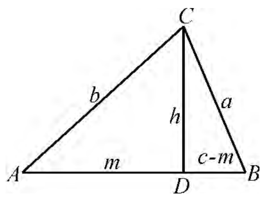

图 2

命题Ⅱ.13 相当于说，在图 2 所示锐角三角形△ABC 中，

$$a^2=b^2+c^2-2cm\ (a\text{ 为锐角对边})\qquad(2)$$

其中等式(2)对于钝角三角形中的锐角对边也是成立的.

欧几里得利用勾股定理对上述命题进行证明. 如图 1 和 2，由勾股定理分别得，

$$a^2=h^2+(c+m)^2=h^2+m^2+c^2+2cm=b^2+c^2+2cm,$$

$$a^2=h^2+(c-m)^2=h^2+m^2+c^2-2cm=b^2+c^2-2cm.$$

在第一种情形，$m=-b\cos A$，在第二种情形，$m=b\cos A$，代入相应等式，即得我们熟悉的三角形式的余弦定理：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\qquad(3)$$

公元 2 世纪，古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy）在其《天文大成》中利用欧几里得的几何命题解决了"已知三角形三边求角"的问题，但他

① 人教社课程与教材研究所十二五规划课题"数学史融入高中数学教材研究"（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一.

并未明确提出余弦定理. 另一方面,利用托勒密定理,我们的确能轻易证明余弦定理.

1593年,法国数学家韦达(F. Viète, 1540—1603)首次将欧几里得的几何命题写成三角形式[2]. 在图2中,根据(2)有 $2cm=b^2+c^2-a^2$,故有

$$1 : \sin(90°-A) = b : m = 2bc : 2cm = 2bc : (b^2+c^2-a^2)$$

而在图1中,根据(1)有 $2cm=a^2-b^2-c^2$,故有

$$1 : \sin(A-90°) = b : m = 2bc : 2cm = 2bc : (a^2-b^2-c^2)$$

综合上面二式可得

$$2bc : (b^2+c^2-a^2) = 1 : \cos A \qquad (4)$$

韦达还证明了余弦定理的另一种几何形式. 如图3,在 $\triangle ABC$ 中,$AB>AC>BC$,以 C 为圆心、以短腰 CB 为半径作圆,交 AC 及其延长线于 F、E,交 AB 于 G. 由几何知识易知:

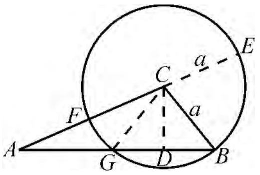

图3

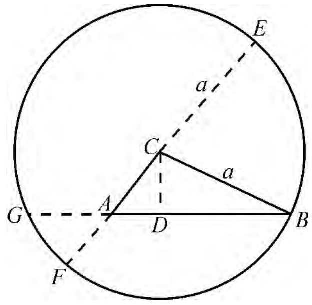

图4

$$AB : AE = AF : AG$$

此即

$$AB : (AC+BC) = (AC-BC) : (AD-DB)$$

或

$$c : (b+a) = (b-a) : (AD-DB) \qquad (5)$$

由此,韦达得到下列几何命题:"三角形底边与两腰之和的比等于两腰之差与底边被高线所分的两条线段之差的比."[2] 我们称之为韦达定理. 将 $AD-DB=c-2a\cos B$ 代入,即得三角形式

$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B \qquad (6)$$

稍后,德国数学家毕蒂克斯(B. Pitiscus, 1561—1613)在其《三角学》(1595)[3]中利用韦达定理来解不等边三角形的"边边边"问题. 由(5)求得 $AD-DB$,进而求得 DB 和 AD. 由 $DB=a\sin(90°-B)$,$AD=b\sin(90°-A)$ 可求得 $\angle A$ 和 $\angle B$. 需要指出,毕蒂克斯是历史上第一个将"三角学"作为书名的数学家.

2 几何主导下的17—18世纪

在我们所考察的17—18世纪的26种三角学著作中,只有荷兰数学家斯内尔(W. Snell, 1591—1626)的《三角形论》[4]、意大利数学家卡瓦列里(B. Cavalieri, 1598—1647)的《平面与球面三角学》[5]、英国数学家爱默生(W. Emerson, 1701—1782)的《三角学基础》[6]和意大利数学家卡诺里(M. Cagnoli, 1743—1816)的《平面与球面三角形》[7]给出了三角形式的余弦定理. 其中,斯内尔、卡瓦列里、爱默生和韦达一样,直接根据欧几里得的几何命题导出比例式(4),而卡诺里则利用欧几里得的证法得到我们今天的形式. 斯内尔还给出余弦定理的另一个比例式:

$$1 : [1-\sin(90°-A)] = 2bc : [a^2-(c-b)^2] \qquad (7)$$

爱默生的《三角学基础》仅给出三角形式的余弦定理而未涉及几何形式,其余25种三角学著作均含有几何形式的余弦定理.

在17—18世纪,韦达定理仅仅局限于底边上高线的垂足位于底边上的情形,即对于钝角三角形而言,必须选择钝角的对边作为底边;而对于锐角三角形而言,底边可以是任意一个角的对边.

韦达和毕蒂克斯在证明(5)时,仅以短腰为半径作辅助圆. 卡瓦列里、西班牙数学家萨拉戈萨(J. Zaragoza)[8]、法国数学家奥泽南(J. Ozanam, 1640—1717)[9]等均沿用同样的证法. 但斯内尔在其《三角形论》中却以长腰为半径作辅助圆,同样证明了韦达定理[4]:如图4,在 $\triangle ABC$ 中,$AB>BC>AC$,以 C 为圆心、以 CB 为半径作圆,交 AC 的延长线于 E、F,交 BA 的延长线于 G. 由几何知识易知:$FA\times AE=GA\times AB$,或即 $(BC-AC)\times(BC+AC)=AB\times(DB-AD)$,故得

$$AB : (BC+AC) = (BC-AC) : (DB-AD) \qquad (8)$$

由(8)可得(3).

之后,荷兰数学家弗拉克(A. Vlacq, 1600—1667)在《平面与球面三角学》[10]中、英国数学家海恩斯(S. Heynes)在《三角学》[11]中也采用了斯内尔的方法. 英国数学家马塞雷(F. Maseres, 1731—1824)在其《平面三角学基础》中则同时采用了两种方法[12].

与毕蒂克斯的《三角学》一样,25种三角学著

作都详细讨论了各种三角形求解问题. 表 1 给出了卡瓦列里的分类讨论情况. 其中,“已知三边求各角”问题的方法是:先运用韦达定理求得底边被高线所分成的两条线段,然后根据直角三角形边角关系求出原三角形的底角.

表 1 卡瓦列里所讨论的解三角形问题

序	已知项	所求项	定理
1	两边和其中一边所对角	另一边的对角	正弦定理
2	两角和其中一角所对边	另一角的对边	正弦定理
3	两边及其夹角	另两个角	正切定理
4	两边及其夹角	第三边	余弦定理(三角形式)
5	三边	三个角	韦达定理

在 17—18 世纪的多数三角学著作中,由于不含三角形式的余弦定理,因而“已知两边及

其夹角求第三边”问题也是通过正切定理来解决的. 如,已知 a,b 和 $\angle C$,则由

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}} \tag{9}$$

因 $\dfrac{A+B}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}$ 已知,故可求得 $\dfrac{A-B}{2}$,从而求得 $\angle A$ 和 $\angle B$. 再利用正弦定理,即可求得第三边 c.

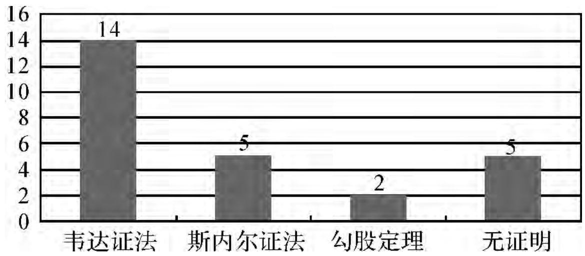

图 5

图 5 给出 25 种三角学著作中的韦达定理证明方法的分布情况. 从中可见,韦达的著作对17—18 世纪三角学著作产生了很深的影响,绝大多数作者沿用了辅助圆方法.

3　承前启后的 19 世纪

在我们所考察的 19 世纪 68 种三角学著作中,有 51 种仅给出三角形式的余弦定理而不涉及几何形式;8 种仅采用韦达定理,另 9 种同时使用了两种形式.

在给出三角形式的 60 种著作中,定理的推导方法共有以下四种.

方法 1　直接利用《几何原本》命题Ⅱ. 12 和Ⅱ. 13;

方法 2　利用欧几里得证法,即两次运用勾股定理. 美国数学家哈斯勒(F. R. Hassler)在其《解析平面与球面三角学基础》(1826)中对欧氏方法进行简化[13],即根据图 1 和 2 得

$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

方法 3　利用射影公式. 又分成三种方法.

(1)由 $a=b\cos C+c\cos B$,$b=c\cos A+a\cos C$,$c=a\cos B+b\cos A$ 可得

$$a^2=ab\cos C+ac\cos B,$$
$$b^2=bc\cos A+ab\cos C,$$
$$c^2=ac\cos B+bc\cos A,$$

从而得到

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C,$$
$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,$$
$$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B.$$

英国数学家杨(J. R. Young,1799—1885)的《平面与球面三角学基础》是最早采用该方法的三角学教材之一[14].

(2)由 $a=b\cos C+c\cos B$ 得 $c\cos B=a-b\cos C$,两边平方得

$$c^2\cos^2 B=a^2-2ab\cos C+b^2\cos^2 C \tag{10}$$

又由 $c\sin B=b\sin C$ 得

$$c^2\sin^2 B=b^2\sin^2 C \tag{11}$$

(10)+(11)得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \tag{12}$$

同理可得另外两个等式(3)和(6).

美国数学家肖弗内(W. Chauvenet,1820—1870)的《平面与球面三角学》是最早采用该法的三角学教材之一[15].

(3)将射影公式写成关于 $\cos B$ 和 $\cos C$ 的方程组

$$\begin{cases} c\cdot\cos B+b\cdot\cos C-a=0\\ 0\cdot\cos B+a\cdot\cos C-(b-c\cos A)=0\\ a\cdot\cos B+0\cdot\cos C-(c-b\cos A)=0\end{cases}$$

则显然有

$$\begin{vmatrix} c & b & -a\\ 0 & a & c\cos A-b\\ a & 0 & b\cos A-c\end{vmatrix}=0$$

展开即得(3). 英国数学家尼克松(R. C. J. Nix-

on)在《初等平面三角学》中采用此法[16].

方法 4　利用和角公式与正弦定理. 在 $\triangle ABC$ 中,我们有

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

两边平方得

$$\begin{aligned}\sin^2 C&=\sin^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B+\\&\quad 2\sin A\sin B\cos A\cos B\\&=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin^2 A\sin^2 B+\\&\quad 2\sin A\sin B\cos A\cos B,\\&=\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos(A+B)\\&=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C\end{aligned}$$

由正弦定理即得等式(15). 英国数学家德摩根(A. de Morgan,1806—1871)在其《三角学基础》中采用此法[17].

法国数学家塞雷(J. A. Serret,1819—1885)在其《三角学》中详细讨论了正弦定理、余弦定理和射影公式之间的关系[18]:

(1)和角公式+正弦定理⇒射影公式:

$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B\Rightarrow c=a\cos B+b\cos A$,同理可得其他等式;

(2)射影公式⇒余弦定理,如上文介绍;

(3)余弦定理⇒射影公式:将等式(3)、(8)和(15)两两相加即得;

(4)余弦定理⇒正弦定理:由余弦定理得

$$\sin^2 A=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 B=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2c^2},$$

$$\sin^2 C=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2},$$

故得

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}$$

从而得到正弦定理.

图 6 给出了 60 种三角学著作中四种方法的分布情况.

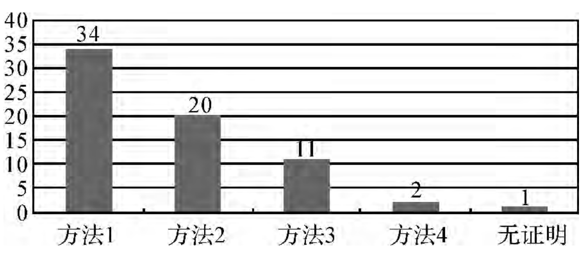

图 6

可见,虽然韦达定理在 19 世纪逐渐退出历史舞台,三角形式的余弦定理逐渐一统天下,但利用欧几里得命题或欧几里得的几何方法来推导后者,依然是 19 世纪绝大多数三角学教材的选择.

在采用韦达定理解"边边边"问题的 17 种著作中,5 种采用了韦达的证法,5 种采用了斯内尔的证法,6 种采用了勾股定理,1 种未给出证明.

值得一提的是,19 世纪数学家补充了 18 世纪三角学著作中未曾涉及的情形,从而完善了韦达定理. 如英国数学家格雷戈里(O. Gregory,1774—1841)在其《平面和球面三角形基础》(1816)中利用图 7[19]、美国数学家佩尔斯(B. Peirce,1809—1880)在其《平面三角学基础》(1835)中利用图 8[20]各得到:

$$AB:(AC+BC)=(AC-BC):(AD+DB)$$

($\angle B$ 为钝角).

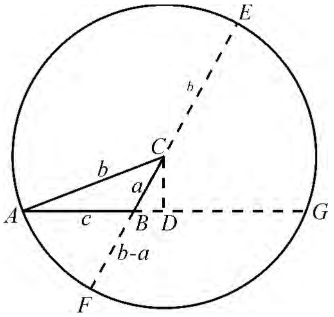

图 7

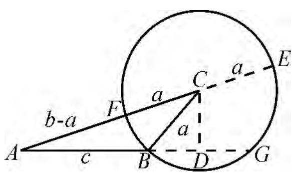

图 8

4　平凡的 20 世纪上半叶

在我们所考察的 1900—1955 年间出版的 48 种教材中,已完全看不到韦达定理的影子.

诸教材中推导余弦定理(三角形式)的方法共有四种:其中方法 1—3 分别与 19 世纪的方法1—3 相同,为直接利用欧几里得命题Ⅱ.12 和Ⅱ.13、欧氏勾股定理证法和射影公式法. 方法 4 为解析几何方法,利用两点之间的距离公式,该方法也为今日教材所采用.

图 9 给出各种方法的分布情况.

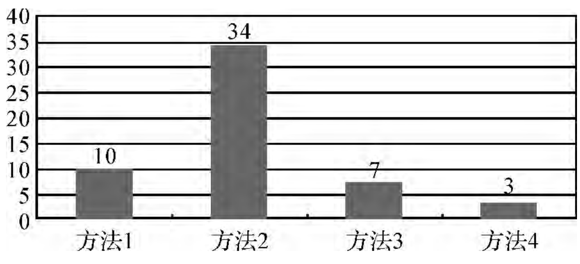

图 9

与 19 世纪相比,直接利用欧几里得命题的教

材明显减少,欧几里得的几何证法一枝独秀,备受青睐.尽管美国数学家库尔提斯(D. R. Curtiss)在 1942 年出版的《三角学及其应用》中开始利用直角坐标系来推导余弦定理[21],但所用方法其实仍是欧几里得的方法.就余弦定理而言,20 世纪前 50 年是因循守旧、平淡无奇的时期.直到 1951 年,美国数学家荷尔莫斯(C. T. Holmes)在其《三角学》中才开始真正采用解析几何方法[22].至于向量方法的出现,更是晚近的事了.

5 结语

余弦定理是作为勾股定理的推广而诞生的,在诞生之初,它只是以几何定理的身份出现;直到 16 世纪,才出现三角形式.17—18 世纪,尽管三角形式偶有出现,但人们主要运用韦达定理来解"已知三边求各角"问题,用正切定理来解"已知两边及其夹角求第三边"问题.19 世纪,韦达定理逐渐被抛弃,三角形式的余弦定理逐渐占上风.到了 20 世纪,韦达定理销声匿迹,三角形式的余弦定理一统天下.

16 世纪以降,人们普遍采用欧几里得的几何方法或直接从欧几里得的几何命题Ⅱ.12 和Ⅱ.13 出发来推导三角形式的余弦定理;19 世纪之后,也有部分作者采用射影公式或从正弦定理与和角公式出发来推导该定理;直到 20 世纪 50 年代才出现解析几何的方法.韦达或斯内尔的辅助圆方法只是用来证明韦达定理,而在推导三角形式的余弦定理时,并没有人使用这种方法,但今天所谓的"无字证明"不过是用韦达或斯内尔的辅助圆方法来推导三角形式的余弦定理而已,这应验了《圣经》传道书中的一句话——太阳底下无新事!

历史告诉我们,余弦定理深深根植于几何的土壤之中,为几何而生,由几何而证,因几何而美.一切抛开几何背景和几何方法的余弦定理教学,都不可能符合学生的认知规律,都不可能完美无缺.历史还告诉我们,余弦定理不仅以几何定理为前身,而且和其他三角学定理之间也有密切的联系,在课堂教学中揭示这样的联系,无疑可以加深学生对定理的理解.

参考文献

1 Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 1)[M]. Cambridge: The University Press, 1968. 403—409

2 von Braunmühl, A. *Vorlesungen über Gischichte der Trigonometrie* [M]. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1900. 176—177

3 Smith, D. E. *A Source Book in Mathematics* (Vol. 2) [M]. New York: Dover Publications, 1959. 434—435

4 Snell, W. *Doctrinae Triangulorum Canonicae*. Lugduni Batavorum: Ioannis Maire, 1627. 70—74

5 Cavalieri, B. *Trigonometria Plana et Sphaerica*. Bononiae: Haercdis Victorij Benatij, 1643. 17—21

6 Emerson, W. *The Elements of Trigonometry*. London: W. Innys, 1749. 96—97

7 Cagnoli, M. *Traité de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique*. Paris: Didot, 1786. 115—116

8 Zaragoza, J. *Trigonometria Hispana: Resolutio Triangulorum plani & Sphaerici*. Valentiae: Hyerommum de Villagrafia, 1673. 59—72

9 Ozanam, J. *La Geometrie Pratique*. Paris: Chez L'Auteur & Estienne Michallet, 1684. 110—129.

10 Vlacq, A. *La Trigonométrie Rectiligne et Sphérique*. Paris: Claude Jombert, 1720. 56—57

11 Heynes, S. *A Treatise of Trigonometry, Plane and Spherical, Theoretical & Practical*. London: Town Hill, 1716. 20—28

12 Maseres, F. *Elements of Plane Trigonometry*. London: T. Parker, 1760. 49—50

13 Hassler, F. R. *Elements of Analytic Trigonometry*, Plane & Spherical. New York: James Bloomfield, 1826. 85

14 Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: John Souter, 1833. 18—19

15 Chauvenet, W. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Philadelphia: Hogan, Perkins & Co., 1851. 58—59

16 Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*. Oxford: The Clarendon Press, 1892. 202—206

17 de Morgan, A. *Elements of Trigonometry and Trigonometrical Analysis* [M]. London: Taylor & Walton, 1837. 63—64

18 Serret, J. A. *Traité de Trigonométrie*. Paris: Bachelier, 1850. 103—106

19 Gregory, O. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*. London: Baldwin, Cradock & Joy, 1816. 19—20

20 Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*. Cambridge & Boston: James Munroe & Co., 1835. 42—44

21 Curtiss, D. R., Moulton, E. J. *Essentials of Trigonometry with Applications*. Boston: D. C. Heath & Co., 1942. 100—101

22 Holmes, C. T. *Trigonometry*. New York: Mcgraw—Hill Book Company, 1951. 87—88