《自然科学史研究》 第18卷 第3期（1999年）：222～233
*Studies in the History of Natural Sciences* Vol. 18 No. 3（1999）

# 大衍求一术在西方的历程*

汪晓勤
（中国科学院自然科学史研究所，北京，100010）

**摘 要** 秦九韶解一次同余组的大衍求一术被西方学者所理解，并不是一件顺利的事。1852年英国汉学家伟烈亚力在《北华捷报》上撰文，介绍孙子“物不知数”题的解法，但未能具体介绍求乘率的求一术；德国学者毕尔那茨基在译伟烈亚力的论文以及法国数学家特凯在转译毕氏的德译文时都误解了该解法。德国数学家马蒂生在只有毕氏译文的情况下，敏锐地发现毕氏的错误，并证明了中国解法与高斯解法的一致性，还对模不两两互素的情形作了解释，从而为“中国剩余定理”这一数论术语在西方的确立奠定了基础。然而，马蒂生仍不知中国解法中关键性的求一术。

**关键词** 伟烈亚力 大衍术 乘率 毕尔那茨基 马蒂生 中国剩余定理
**中图法分类号** O11

数论中的中国剩余定理系指：如果 $k_i$ 满足同余式

$$k_i \frac{M}{m_i} \equiv 1(\bmod m_i),(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $M=m_1m_2\cdots m_n$，$m_1$，$m_2$，…，$m_n$ 两两互素，那么一次同余组

$$N \equiv r_i(\bmod\ m_i),(i=1,2,...,n) \tag{1}$$

的解为：

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i M_i r_i(\bmod M)。$$

关于这个定理，一般的中国数学史著作中都有介绍。至于它如何为西方学者所了解，国内迄今尚无专文论述。李俨最早简略提及马蒂生、康托、三上義夫和赫师慎的工作[1]，后来的一些中国数学史著述也只是作泛泛的介绍：1852年英国传教士伟烈亚力将孙子“物不知数”题解法以及大衍术介绍到西方，1874年德国马蒂生撰文指出秦九韶（或孙子）的解法与高斯在《算术探究》中所给出的解法一致，以后西方著作中就将上述解法称作“中国剩余定理”[2～6]。本文试图对该定理在西方的认识过程作一探讨。

## 1 伟烈亚力的开拓性工作

19世纪上半叶以前，西方学者对中国数学知之甚少。法国著名数学史家蒙图克拉

收到文稿日期：1999-03-20；收到修改稿日期：1999-04-23

* 本文是博士毕业论文《伟烈亚力与中西数学交流》的一部分。作者对何绍庚先生3年来的悉心指导以及郭书春、刘钝、王渝生、艾素珍、韩琦、王扬宗、邹大海、田淼等师友的关心、支持和帮助表示深深的感谢。

(J. E. Montucla，1725～1799）在其数学史经典著作《数学史》第一卷第二部分第四章专论中国数学史。蒙氏所能见到的只有18世纪来华耶稣会士宋君荣（A. Gaubil，1689～1759）等关于中国天文学的著述，因此蒙氏此章虽名为“中国数学史”，但实际上主要是对中国天文学的介绍。而对于纯粹数学，则因无更多文献可依，故只提到简单的测量方法、勾股定理和球面三角，蒙氏认为，明清之际“欧洲人来到中国后，中国的算术不再有什么地位”[7]。在此后半个世纪，蒙氏的著作以及耶稣会士的有关著述是西方学者了解中国数学的主要文献[8]。19世纪30年代之前，程大位的《算法统宗》已流传到法国，法国汉学家毕瓯（E. Biot，1803～1850）、意大利数学家利布里（G. Libri，1830～1869）都对它作了研究。利氏认为此书是当时“欧洲所知唯一不是由传教士写的中国数学著作”[9]。毕瓯于1839年3月在《亚洲杂志》(*Journal Asiatique*）上发表了十二卷本《〈算法统宗〉全书总目》[10]，在卷五最后，毕氏介绍了孙子“物不知数”题，但没有给出它的解法。

1852年，英国来华传教士伟烈亚力（A. Wylie，1815～1887）为纠正西方学者对中国数学的错误看法，在上海英文周报《北华捷报》上发表著名论文《中国数学科学札记》，文中作者用秦九韶大衍术解释了“物不知数”题的解法：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 定母： | 3 | 5 | 7 |
| 衍母： | 3×5×7 | | |
| 衍数： | 35 | 21 | 15 |
| 奇： | 2 | 1 | 1 |
| 乘率： | 2 | 1 | 1 |
| 用数： | 70 | 21 | 15 |
| 余数： | 2 | 3 | 2 |

所求数：$N=70\times2+21\times3+15\times2-3\times5\times7\times2=23$。

伟烈亚力介绍上述解法时没有具体对用以求乘率的“求一术”作具体介绍。上述解法中，有两个“奇”都是1，被直接作为乘率；而另一个“奇”为2，伟烈亚力只介绍说：

> “然后将这个大于1的奇用于一个称作‘求一’的辅助过程：衍母(Extension Parent)① 和奇辗转相除，直到余数化为1，本例中得数为2，即为乘率。”[11]

显然，伟烈亚力根本没有说清乘率到底是如何求得的。伟烈亚力又全文翻译了《数书九章》大衍类第1题“蓍卦发微”的解法，不过，同样没有交代求乘率方法。伟烈亚力还介绍了大衍类另外8题，其中翻译了“古历会积”、“余米推数”两题的题文，其余则泛泛介绍而已。

伟烈亚力论文还有若干错误和不足。如他认为一行最早应用大衍术于《大衍历》，导致谬种流传。他选择秦九韶“与为解决一次同余式组而设的其他问题性质不同”[12]的“蓍

① 实际上应为“定母”（Fixed Parent），这可能是伟烈亚力的笔误。

卦发微”题作为详细介绍的对象，直接影响了后来的西方学者对大衍术的理解。

## 2 毕尔那茨基等人的误解

《中国数学科学札记》发表后，《北华捷报》主编奚安门（Henry Shearman，？～1856）将其收入1853年的《上海历书》(*Shanghai Almanac and Miscellany*) 上。德国学者毕尔那茨基（K. L. Biernatzki）在柏林偶然获得这本历书，看到了伟烈亚力的论文，于是将其译为德文（但作了许多改动），于1856年以《中国之算术》为题发表。

关于“物不知数”题的解法，毕尔纳茨基的译文起先与伟烈亚力原文一致：

> “三个除数3，5，和7相乘，得数105为衍母。衍母除以定母7，得商15为衍数。衍数再除以（定母）7，余1为乘率。以乘率乘衍数，积15为用数。这就是前面所说的‘七七数之剩一，则置十五’。”[13]

但接着，毕尔那茨基写道：

> “用同样的方法可得其他用数，即：
>
> $$\frac{105}{5}=21,\text{为衍数；}$$
>
> $$\frac{21}{5}\ \text{余}\ 1,\text{为乘率；}$$
>
> $$21\times 1=21,\text{为用数。}$$
>
> 这就是上面所给出的‘五五数之剩一，则置二十一’。最后，
>
> $$\frac{105}{3}=35,\text{为衍数；}$$
>
> $$\frac{35}{5}\ \text{得余数或‘奇’}2,\text{为乘率；}$$
>
> $$35\times 2=70,\text{为用数。}$$
>
> 这就是刚才所说的‘三三数之剩一，则置七十’。”[13]

这里我们看到，毕尔那茨基的译文已经偏离了伟烈亚力的原文，只字未提“奇”大于1时计算乘率的“求一术”，而是把“奇”与乘率等同起来。导致毕尔那茨基误解大衍术的其中一个原因显然是伟烈亚力原文没有具体介绍“求一术”，另外，“物不知数”题解法中的三个奇数和对应乘率相等，而“蓍卦发微”题中的四个奇1、1、1、3恰恰也与对应乘率相等，使得毕尔那茨基轻率地将两者混为一谈。

在毕尔那茨基的译文里还有一个错误。伟烈亚力原文在介绍“物不知数”题的解法后，讲到最早将大衍术应用到天文上的人是一行（Yih Hing），紧接着在介绍“蓍卦发微”题时又提到《易经》① (*Yih King*)。毕尔那茨基十分粗心地将Yih Hing和Yih King等同起来，甚至说秦九韶的著作乃是对一行著作的详细注解，从而将大衍术归功于一行。后来的康托、特凯、汉克尔、马蒂生、三上義夫、狄克逊，甚至史密斯、萨顿、尤什凯

① 伟烈亚力在书名音译之前恰恰没有标上中文。另外，伟烈亚力在前面已提到一行，但英文名写成Yin-hing，与后面的Yih Hing不完全一致。这是导致毕氏错误的一个原因。

维奇等数学史或科学史家都沿袭了这一错误。这一错误还导致某些印度学者认为一行有可能从印度人那里学到了解不定方程 $\mathrm{A}x-\mathrm{B}y=\mathrm{C}$ 的库塔卡法[14][15]。尽管有许多错误，但毕氏的译文引起对中国数学一无所知的国内外学者的浓厚兴趣。

1858 年，德国著名数学史家康托（Moriz Cantor，1829～1920）发表论文《数字符号之历史》(Zur Geschichte der Zahlzeichen)，他所依据的是毕尔那茨基的译文。由于译文中多处难以理解，他很想获得伟烈亚力的原文，但未能如愿。在用现代代数记号表示了毕尔那茨基译文中“物不知数”题的解法后，他在论文中认为中国大衍术的是错误的，并断言：在不定分析的研究方面，中国人落后于同时期别的文明国家[16]。

在毕尔那茨基发表译文不久，法国数学家特凯（Olry Terquem，1782～1860）将它转译为法文，在他去世后的 1862 年发表于他自己创办于 1844 年的《数学新年刊》(*Nouvelles Annales des Mathématiques*）上，题为《中国的算术与代数》[17]。由于毕尔那茨基氏的误解，特凯将“物不知数”题的解法作了错误的一般性地表示：一数除以 $p_1$，余 $s_1$；除以 $p_2$，余 $s_2$；除以 $p_3$，余 $s_3$。求该数。若

$$p_1p_2 = q_3p_3 + r_3(0 < r_3 < p_3),$$
$$p_1p_3 = q_2p_2 + r_2(0 < r_2 < p_2),$$
$$p_2p_3 = q_1p_1 + r_1(0 < r_1 < p_1),$$

则所求数为

$$N = p_1p_2r_3s_3 + p_1p_3r_2s_2 + p_2p_3r_1s_1。$$

因此，只有当 $r_1$，$r_2$ 和 $r_3$ 满足 $r_1^2\equiv1(\mathrm{mod}\ p_1)$，$r_2^2\equiv1(\mathrm{mod}\ p_2)$ 和 $r_3^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p_3)$ 时上述解才能满足已知条件。孙子问题中，$r_1=2$，$r_2=r_3=1$，恰恰满足这个条件。但当该条件不满足时，所求解显然是错误的。

特凯看不懂“蓍卦发微”题，因此将其略去。在介绍了《数书九章》其它不定问题后，特凯说：“印度人有一个称作库塔卡的类似算法。但中国人不可能从印度人那里学到该算法。”[17]

在特凯之后，法国科学院秘书、著名数学家贝特朗（J. Bertrand，1822～1900）读了毕氏的译文后，感到很有必要向西方介绍伟烈亚力的研究成果[18]，于是对毕文进行重译、删节并加评论后，于 1869 年分两期将其发表于《博学者杂志》。贝氏也看不懂“蓍卦发微”题，因此文中的介绍半途而废[16]。

## 3 马蒂生的关键性论述

《中国数学科学札记》因毕尔那茨基、特凯、贝特朗的译文而为欧洲学者们所知，在整个 19 世纪下半叶以及 20 世纪日本著名数学史家三上義夫（1875～1950）出版他的英文《中日算学发达史》以前，一直是西方关于中国数学的最重要的文献。

毕尔那茨基的译文是德国数学史家汉克尔（Hermann Hankel，1839～1873）的重要参考文献。在作者去世后一年出版的《古代和中古数学史》(*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthun und Mittelalter*）里，汉克尔对中国数学有所论述。他认为，中国的大衍术等价于印度的库塔卡，中印数学之间存在十分密切关系[16]。

1874 年，德国数学家马蒂生（Ludwig Matthiessen，1830～1906）在给康托的一封信① 里纠正了毕尔那茨基的错误，并证明：中国的大衍术与德国大数学家高斯（C. F. Gauss，1777～1855）的解法是等价的[19]。高斯解模两两互素的一次同余组（1）的一般方法载于他 1801 年出版的《算术研究》第 1 章第 36 节[20]。如果 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$……满足

$$\alpha \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ m/m_1),$$
$$\beta \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_2) \equiv 0(\mathrm{mod}\ m/m_2),$$
$$\gamma \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_3) \equiv 0(\mathrm{mod}\ m/m_3),$$
$$\delta \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_4) \equiv 0(\mathrm{mod}\ m/m_4),$$
$$\cdots\cdots$$

其中 $M=m_1m_2m_3\cdots$，则（1）的解为：

$$N \equiv \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 + \delta r_4 \ldots (\mathrm{mod}\ M)。$$

翌年，马蒂生又撰文② 对印度库塔卡法和中国大衍术作了比较，认为两者是不同的。1881 年，马蒂生又撰文[19]论述大衍术，文中介绍了“物不知数”题（作者也看到毕瓯发表在《亚洲杂志》上的《〈算法统宗〉总目》，再次指出毕氏译文中将奇数当作乘率的错误，并以现代记号表示它的解法（表 1）。

**表 1　马蒂生介绍孙子剩余问题的解法**

| 定　母 Bestimmte Primzahlen | 余　数 Reste | 除　法 Divisionen | 乘　率 Multiplicatoren | 用　数 Hülfszahlen |
|---|---|---|---|---|
| $m_1=3$ | $r_1=2$ | $5\cdot 7\cdot k_1\equiv 1$ (mod3) | $k_1=2$ | $5\cdot 7\cdot k_1=70$ |
| $m_2=5$ | $r_2=3$ | $3\cdot 7\cdot k_2\equiv 1$ (mod5) | $k_2=1$ | $3\cdot 7\cdot k_2=21$ |
| $m^3=7$ | $r_3=2$ | $3\cdot 5\cdot k_3\equiv 1$ (mod7) | $k_3=1$ | $3\cdot 5\cdot k_3=15$ |

$$N=2\cdot 2\cdot 5\cdot 7+3\cdot 1\cdot 3\cdot 7+2\cdot 1\cdot 3\cdot 5-3\cdot 5\cdot 7n=233-105n。$$

马蒂生给出高斯解法，说明它与中国解法的一致性，并指出其中的 $\alpha$，$\beta$ 和 $\gamma$ 即为大衍术中的“用数”（Hülfszahlen）。

由于马蒂生只看过毕尔那茨基的译文，而无任何其他文献可依，因此，他错误地把秦九韶当成是《孙子算经》和《大衍历》的注者。

“蓍卦发微”题中的四个模 $m_1=1$，$m_2=2$，$m_3=3$，$m_4=4$ 不两两互素，引起了马蒂生的注意。秦九韶分别求得：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 定母： | 1 | 1 | 3 | 4 |
| 衍数： | 12 | 12 | 4 | 3 |
| 乘率： | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 泛用： | 12 | 12 | 4 | 9 |

在求得泛用数后，秦九韶又求定用数：“复推元用等数二约副母二为一，今乃复归之为二，

① L. Matthiessen：Ueber die Algebra der Chinesen (Schreiben an Cantor). *Zeitschrift für Mathematik Und Physik*，1874，**19**：270.

② L. Matthiessen：Vergleichung der indischen Kuttaka und der chinesischen Tayen-Regel，Sitzungs-berichte der math. -naturwiss. Section in den Verhandl. der Philologen-Versammlung zu Rostock，1875.

遂用衍母一十二益于左副一十二内，共为二十四。”[21]于是得

定用：12　　24　　4　　9

以上数据在伟烈亚力《札记》和毕尔那茨基译文里都有介绍（但毕氏看不懂此后的一部分，因而对该题的介绍就此而止）。马蒂生通过研究，认为“一行”的解模不两两互素的一次同余组

$$N \equiv r_1(\text{mod } m_1) \equiv r_2(\text{mod } m_2) \equiv r_3(\text{mod } m_3) \equiv \cdots \equiv r_n(\text{mod } m_n) \qquad (2)$$

的一般方法是：求出 $m_1, m_2, m_3\cdots$ 的最小公倍数 $M=1^p\cdot 1^q\cdots 2^r\cdot 3^s\cdot 5^t\cdots=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$，其中 $m_i\equiv 0$（mod $\mu_i$），$i=1$，2，3，…；从同余式

$$\alpha_i \equiv 0\left(\text{mod } \frac{M}{\mu_i}\right) \equiv 1(\text{mod}\mu_i), i = 1,2,3,\cdots$$

求得泛用数 $\alpha_i$，而定用数则为 $\alpha_i$（$1+m_i-\mu_i$），于是（2）的解为

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i (\text{mod} M)$$

或一般地

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (1 + m_i - \mu_i) r_i (\text{mod} M)。$$

马蒂生还给出一次同余组有解的条件：

$$r_p \equiv r_q(\text{mod}\delta(m_p, m_q))。$$

这里 $\delta$ 表示最大公约数。马蒂生不满足于毕氏的译文，他根据文中对《数书九章》大衍类第三题“推计土功”的介绍（未给出具体数据）设了具体数据：分别由 2，3，6，12 人组成的四个组从事同样多的劳动，经过若干整劳动日之后，分别余下 1，2，5，5 个单位工作量。求总的工作量。亦即求同余组

$$x \equiv 1(\text{mod } 2) \equiv 2(\text{mod } 3) \equiv 5(\text{mod } 6) \equiv 5(\text{mod } 12)。$$

马蒂生给出详细的解如表 2。因此所求数为

$$N = 1\cdot 24 + 2\cdot 36 + 5\cdot 16 + 5\cdot 81 - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 n = 581 - 12n。$$

最小解 $N=17$。因 $17=8\cdot 2+1=5\cdot 3+2=2\cdot 6+5=1\cdot 12+5$，故已完成工作量为 $8\cdot 2+5\cdot 3+2\cdot 6+1\cdot 12=55$ 个单位。

马蒂生对于从泛用数求定用数的解释虽从数学原理上说是正确的，也符合“蓍卦发微”题的数据，但并不符合秦九韶的原意。在“蓍卦发微”题中，秦九韶舍泛用数不用，而转求定用数，是因为泛用数之和 37 “无意义，兼蓍少太露”[21]的缘故。《数书九章》大衍类模不两两互素的其余诸题也无一用马蒂生的方法求正用数。马蒂生也不知道秦九韶求乘率的“求一术”。面对毕尔那茨基译文中的诸多错误和难解之处，他和康托一样，希望找到伟烈亚力的原文，但亦未能如愿以偿。1874 年，伟烈亚力在一封信中告诉他，“札记”一文当时在上海已经找不到了[19]。

1880 年康托出版《数学史讲义》。作者在此书中根据马蒂生的论述，完整地给出了“物不知数”题的解法，纠正了自己以前的错误看法，并赞扬这一解法的发明者有着“最为幸运的创造力”[22]。不过，由于毕尔那茨基只字不提求一术，马蒂生生论文中也付之阙如，康托认为解法中诸乘率很可能是靠试验得到的。

**表 2 马蒂生所设工作量问题的解**

| 元数 | 定数 | 余数 | 除 法 | 乘率 | 泛用数 | 定 用 数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_1=2$ | $\mu_1=1$ | $r_1=1$ | $1\cdot 3\cdot 4\cdot k_1\equiv 1$ (mod1) | $k_1=1$ | $\alpha_1=12$ | $\alpha_1$ $(1+m_1-\mu_1)$ $=24$ |
| $m_2=3$ | $\mu_2=1$ | $r_2=2$ | $1\cdot 3\cdot 4\cdot k_2\equiv 1$ (mod1) | $k_2=1$ | $\alpha_2=12$ | $\alpha_2$ $(1+m_2-\mu_2)$ $=36$ |
| $m_3=6$ | $\mu_3=3$ | $r_3=5$ | $1\cdot 1\cdot 4\cdot k_3\equiv 1$ (mod3) | $k_3=1$ | $\alpha_3=4$ | $\alpha_3$ $(1+m_3-\mu_3)$ $=16$ |
| $m_4=12$ | $\mu_4=4$ | $r_4=5$ | $1\cdot 1\cdot 3\cdot k_4\equiv 1$ (mod4) | $k_4=3$ | $\alpha_4=9$ | $\alpha_4$ $(1+m_4-\mu_4)$ $=81$ |

## 4 20 世纪西方学者的工作

用秦九韶大衍求一术解释“物不知数”题中的求乘率法，始于 20 世纪的三上義夫。在 1913 年出版的英文《中日算学发达史》中，三上義夫给出定母 3、奇数 2 所对应的乘率求法，并以图式表示如下[23]：

| | |
|---|---|
| 1（天元） | 2（奇） |
| | 3（定母） |

（1）

| | |
|---|---|
| 1（天元） | 2（奇） |
| 1（归数） | 1（定余） |

（2）

| | |
|---|---|
| 2 | 1（奇余） |
| 1（归数） | 1（定余） |

（3）

三上義夫全文翻译了秦九韶的大衍求一术，并以现代记号作了解释：设奇数为 $a$，定母为 $b$，$a$ 和 $b$ 辗转相除，使得最后一个余数 $r_{2k}=1$，所得商依次为 $q_1$，$q_2$，…，$q_{2k}$，则

$$A_1=1q_1,\ A_2=A_1q_2+1,\ A_3=A_2q_3+A_1,\ A_4=A_3q_4+A_2,\ \cdots,\ A_{2k}=A_{2k-1}q_{2k}+A_{2k-2},$$

最后一个即为乘率。

关于模不两两互素的情形，三上義夫作如下解释：“若元数中有两个或多个有公因数，则从这些数中去掉该因数，而只在其中一个数中保留它。元数因此变得两两互素。简化后的数称为定母。”[23]对于从泛用数求定用数，三上義夫解释为：“恢复原来被去掉的公因数，用它们去乘相应的（泛）用数。泛用数就变成了定用数。”[23]按照这种解释，我们来看元数中只有两个有公因数 $m_i$ 和 $m_j$ 的情形。设 $(m_i,\ m_j)=d_{ij}$ $(i<j)$，诸定母为

$$\mu_\tau=\begin{cases} m_i/d_{ij}(\tau=i) \\ m_\tau \qquad (\tau\neq i)\end{cases} \quad (\tau=1,2,3\cdots,n)$$

相应定用数为

$$U_\tau=\begin{cases} M_ik_td_{ij}(\tau=i) \\ M_tk_i(\tau\neq i)\end{cases} \quad (\tau=1,2,3,\cdots n)。$$

于是（2）的解为

$$x\equiv M_1k_1r_1+M_2k_2r_2+\cdots+M_{i-1}k_{i-1}r_{i-1}+M_ik_td_{ij}r_i+M_{t+1}k_{i+1}r_{t+1}+\cdots+M_nk_nr_n(\mathrm{mod}\ M)。$$

不难看出，这样的解释虽符合“蓍卦发微”题数据，但从数学原理上说是错误的。

1913 年，比利时来华传教士赫师慎（L. Van Hée，1873～1951）在《通报》上撰文介绍孙子“物不知数”题、张丘建百鸡问题、秦九韶“程行相及”、“推计土功”题，并以现代符号给出“物不知数”题的解法[24]。赫氏仅仅根据史密斯的一篇介绍 9 世纪印度数学家摩诃毗罗（Mahaviracayra）数学著作的论文[25]，断言大衍术与印度库塔卡类似（这可能也受伟烈亚力的影响），并因此怀疑中国大衍术受过外来的影响。史密斯在他的

论文里，给出了摩诃毗罗的不定方程三例：(1) $(6x\pm10)/9=$整数；(2) $ax+by+xz+dw=p$；(3) $x+y+z+w=n$，但并未给出摹诃毗罗的解法。赫氏在并没有深入探讨大衍求一术，也没有对中印两种算法作比较的情况下妄下结论，正表明其认识之肤浅。翌年，赫氏又在《通报》上撰文介绍《白芙堂算学丛书》，在谈到黄宗宪《求一术通解》时，对“物不知数”题的衍数、奇数、乘率求法作了解释[26]，不过，这似乎完全抄袭了三上義夫的原文①。

1920 年，美国学者狄克逊 (L. E. Dickson) 出版《数论史》，在第二卷里，介绍了“中国剩余问题”(即孙子问题) 的历史。作者根据马蒂生、三上義夫等人的著述，介绍了中国人的有关成果。但他把 (2) 的解法归功于一行《大衍历》，把 (1) 的解法归功于秦九韶[27]。李约瑟[28]和钱宝琮[2,12]都曾指出狄氏的错误 (但实际上错误应上溯到伟烈亚力和毕尔那茨基)。狄氏介绍大衍求一术也不准确，如对同余式 $ax\equiv1\pmod b$ $(a<b)$，$a$ 和 $b$ 辗转相除，直到获得余数 $r_n=1$，商依次为 $q_1$，$q_2$，$q_3$，$\cdots q_n$，设 $A_1=q_1$，$A_2=A_1q_2+1$，$A_3=A_2q_3+A_1$，$A_4=A_3q_4+A_2$，……，则乘率 $x=A_n$。显然，这里狄氏偏离了三上義夫原文，而没有注意到大衍求一术中 $i$ 为偶数之限制。事实上，当 $i$ 为奇数时，$A_i$ 是同余式 $ax\equiv-1\pmod b$ 的解。②

1920 年，意大利数学史家洛利亚 (G. Loria，1862～1954) 撰文对孙子发现大衍术提出质疑，“因为没有丝毫的迹象表明他把该问题看得比同书中其它问题更有趣或更为重要”[29]。不过后来在《数学史》中，洛氏还是介绍了孙子问题的解法，并承认它与高斯的解法相同，但与康托一样怀疑解法中的乘率是靠试验得出的[8]，尽管他看过三上義夫的著作。在此后的数十年间，大衍求一术很少引起西方学者的注意。美国著名数学史家史密斯 (D. E. Smith，1860～1944) 早在 1914 年与三上義夫合作的《日本数学史》中[30]和 1925 年出版的《数学史》第二卷中[31]，只不过介绍了“物不知数”题而已。而数年后，由于受对中国数学持否定或怀疑态度的塞迪约 (L. P. E. A. Sédillot)、赫师慎、瓦卡 (G. Vacca，1872～?)、洛利亚等人的影响，史密斯撰文对“8 世纪唐代和尚一行著述大衍术”之前中国是否已有不定问题表示怀疑[32]。

美国著名科学史家萨顿 (G. Sarton，1884～1956) 接受伟烈亚力的看法，认为大衍术与印度库塔卡类似[33]。

前面我们看到，马蒂生虽论及 (2) 的解法，但对如何将不两两互素的元数 $m_i$ 化为两两互素的定数 $\mu_i$ 却没有作出清晰的解释。英国学者马勒 (K. Mahler) 利用素因数分解来求 $\mu_i$：设 $m_i$ 的素因数分解式为：

---

① 李俨先生认为介绍求一术时“作十字号以界之”乃是赫氏的发明，又认为他对大衍求一术的介绍比三上義夫更为详细 [1]，这是不符合事实的。

② 同余式 $ax\equiv\pm1\pmod b$ $(a<b)$ 等价于不定方程 $by=ax\mp1$，由欧几里得算法，我们有：$b=q_1a+r_1$ $(0<r_1<a)$，$a=q_2r_1+r_2$ $(0<r_2<r_1)$，$r_1=q_3r_2+r_3$ $(0<r_3<r_2)$，$r_2=q_4r_3+r_4$ $(0<r_4<r_3)$，…，$r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n$ $(r_n=1)$，根据欧拉 (L. Euler，1707～1783) 的记号，$b=[r_{n-1},q_n,q_{n-1},\cdots,q_3,q_2,q_1]$，$a=[r_{n-1},q_n,q_{n-1},\cdots,q_3,q_2]$，当 $q_1$，$q_2$，$q_3$，…，$q_{n-1}$，$q_n$，$r_{n-1}$共有偶数项时，$y=[q_n,q_{n-1},\cdots,q_3,q_2]$，$x=[q_n,q_{n-1},\cdots,q_3,q_2,q_1]$ 为 $by=ax+1$ 的解；共有奇数项时，$y$，$x$ 就为 $by=ax-1$ 的解。参见 [20]，又可参见 [12]。

$$m_i = p_1^{a_{i1}} p_2^{a_{i2}} \cdots p_t^{a_{it}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

记

$$a_\tau = \max_{i=1,2,\cdots,n} a_{i\tau} \ (\tau = 1, 2, \cdots, t)$$

而

$$a_{i_\tau \tau} = a_\tau \quad (\tau = 1, 2, \cdots, t)$$

取

$$\alpha_{i\tau} = \begin{cases} \alpha_\tau (i = i_\tau) \\ 0 (i \neq i_\tau) \end{cases} \quad (\tau = 1, 2, \cdots, t)$$

于是

$$\mu_i = p_1^{\alpha_{i1}} p_2^{\alpha_{i2}} \cdots p_t^{\alpha_{it}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即为满足条件（1）$\mu_i | m_i$（$i=1$，2，…，$n$），（2）（$\mu_i$，$\mu_j$）$=1$，$i \neq j$ 和（3）$Lcm$（$\mu_1$，$\mu_2$，…，$\mu_n$）$=Lcm$（$m_1$，$m_2$，…，$m_n$）的定母。马勒证明了同余组（2）有解的充要条件。

虽然马勒试图“复制出古老中国方法的数学内容”[34]，但利用元数的素因数分解式来求定数显然不是中国古代数学家的真实做法。

李约瑟（J. Needham，1900～1995）《中国科学技术史》第三卷对大衍术的介绍并不尽如人意，因为他和伟烈亚力一样，也没有介绍求乘率的求一术，只是说求乘率是主要过程或运算中“最为重要的部分之一”[28]。李约瑟引用了马蒂生和马勒等人的工作。关于大衍术与库塔卡的关系，李约瑟的看法与伟烈亚力、萨顿相同。李约瑟和他的合作者王铃还试图探讨大衍术与一行《大衍历》的关系，但未获得明确的结论[28],[35]，因为无法知道一行解决相当于同余组

$$1110343x \equiv 44820 (\mathrm{mod}\ 60 \times 3040) \equiv 49107 (\mathrm{mod}\ 89773)$$

的问题的具体方法。不过他们断言，《数书九章》卷三“治历演纪”的解法最接近于一行的方法。

1963 年，美国著名数学史家斯特洛伊克（D. J. Struik）撰文介绍中国古代数学，其中介绍了孙子问题并以现代记号给出它的解法。作者认为大衍类是秦九韶《数书九章》中最有趣的内容。他介绍了两个问题：（1）$N \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 1$（mod 4），（2）$N \equiv 32$（mod 83）$\equiv 70$（mod 110）$\equiv 30$（mod 135）（前一题并不符合“蓍卦发微”题，后一题是“分粜推原”题），并说明了模不两两互素同余组的解法[36]。

到了 70 年代，比利时学者李倍始（U. Libbrecht）出版《13 世纪的中国数学：秦九韶〈数书九章〉》，对大衍求一术作了详尽研究。此书曾引起中国数学史家们的浓厚兴趣①。

从伟烈亚力的首次介绍到李倍始的详尽研究，大衍求一术在西方走过 120 年的历程。其中伟烈亚力的开拓性工作具有十分重要的历史意义，是大衍求一术被西方认识的起点。毕尔那茨基的译文则导致了伟烈亚力工作为欧洲所了解，但毕氏将乘率与奇数混为一谈，

① [37] 所收人的 30 篇论文中有 11 篇引用过这部著作，另有 1 篇是对它的述评。

又导致康托、特凯等人对大衍术的误解。马蒂生的出色工作在大衍术被西方认识的过程中起了最为重要的作用。他正确理解了大衍术，并证明大衍术与高斯方法的一致性，从而为“中国剩余定理”这一术语的确立奠定了基础。虽然马蒂生还给出了模不两两互素情形的一个解释，但是，由于未能接触更多的相关文献，他无法知道计算乘率的求一术，因而未能全面了解秦九韶的一次同余组解法。三上義夫介绍了乘率的求法，翻译了秦氏的大衍求一术，他的英文著作为西方学者了解大衍求一术起过很大作用。后来的西方数学史家赫师慎、洛利亚、史密斯贬低、怀疑大衍术，产生了消极的影响。马勒对模不两两互素的情形提出现代证明，但不符合秦九韶的原意。李约瑟对大衍求一术的介绍并无新见。只有李倍始的工作才为大衍求一术的西方历程划上了令人满意的句号。

## 参 考 文 献


1 李俨. 大衍求一术之过去与未来. 见：中算史论丛（一）. 中华学艺社，1933. 60～121.

2 钱宝琮. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964. 77～78.

3 中外数学简史编写小组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986. 186～188.

4 沈康身. 中算导论. 上海：上海教育出版社，1986. 286～287.

5 刘钝. 大哉言数. 沈阳：辽宁教育出版社，1995. 271.

6 李文林，袁向东. 中国剩余定理. 见：中国古代科技成就. 北京：中国青年出版社，1996. 106～115.

7 J. E. Montucla. *Histoire des Mathématiques* (Vol. I). Paris, 1797. 450.

8 G. Loria. *Storia delle Matematiche dall'Alba della Civilta al Secolo XIX* (Vol. I). Seconda Edizione, Ulrico Hoepli, Milano, 1950. 146, 152.

9 J. C. Matzloff. *Histoire des Mathématiques Chinoises*. Masson, 1988. 2.

10 E. Biot. Table Generale d'un Ouvrage Chinoise Intitute Suan-Fa Tong-Tsong. *Journal Asiatique*, 1839, **7**: 193～217.

11 A. Wylie. Jottings on the Science of the Chinese: Arithmetic. *North-China Herald*, Aug. 21; Sept. 11, 18, 25; Oct. 16, 23; Nov. 6, 13, 20, 1852.

12 钱宝琮. 秦九韶《数书九章》研究. 见：宋元数学史论文集. 北京：科学出版社，1966. 77.

13 K. L. Biernatzki. Die Arithmetik der Chinesen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1856, (52): 59～94.

14 S. Ganguli. India's Contribution to the Theory of Indeterminate Equations of the First Degree. *Journal of the Indian Mathematical Society*, 1931, **19**: 110～120, 129～142, 153～168.

15 S. N. Sen. Study of Indeterminate Analysis in Ancient India. *Proceedings of the 10th International Congress of the History of Science, Ithaca*, 1962. Paris, 1964. 493～497.

16 U. Libbrecht. *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-Shu Chiu-Chang of Ch'in Chiu-shao*. Cambridge, 1973. 314～315, 359～360.

17 O. Terquem. Arithmétique et Algèbre des Chinois. *Nouvelles Annales de Mathematiques*, 2e Série, 1862, 1, 35～44; 1863, 2, 529～540.

18 H. Cordier. The Life and Labours of Alexander Wylie, Agent of the British and Foreign Bible Society in China. A Memoir. *Journal of the Royal Asiatic Society*, 1887, **19**: 351～368. Rep. in *Chinese Researches*, Shanghai, 1897. 7～18.

19 L. Matthiessen. Ueber das sogenannte Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king von Sun-tsze und Tayen lei schu von Yih-hing. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 1881, **91**: 254～261.

20 C. F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae, in *Werke* (I), Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1981. 20～21, 26.

21 秦九韶. 数书九章. 见：郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(第一分册). 郑州：河南教育出版社，1993.

446～447.

22 M. Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (*I*). Leipzig, 1922. 687.

23 Y. Mikami. *The Development of Mathematics in China and Japan*. Leipzig: B. G. Teubner, 1913. 66～68.

24 Van Hée. Les Cent Volailles ou l'Analyse Indéterminée en Chine. *T'oung Pao*, 1913, **14**: 203～210, 435～450.

25 D. E. Smith. The Ganita-Sara-Sangraha of Mahaviracarya. *Bibliotheca Mathematica*, 1908～9, 3. Folge, Band 9. 106～110.

26 Van Hée. Bibliotheca Mathematica Sinensis Pé-Fou. *T'oung Pao*, 1914, **15**: 111～164.

27 L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers* (Vol. II). Chelsea Publishing Company, New York, 1952. 58～60.

28 J. Needham. *Science and Civilization in China* (Vol. 3), Cambridge, 1959. 42, 120～121.

29 G. Loria & R. B. McClenon. The Debt of Mathematics to the Chinese People. *Scientific Monthly*, 1921, **12**: 517～521.

30 D. E. Smith & Y. Mikami. *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: The Court Publishing Company, 1914. 10.

31 D. E. Smith. *History of Mathematics* (Vol. II). Ginn and Company, Boston, 1925. 380.

32 D. E. Smith. Unsettled Questions Concerning the Mathematics of China. *Scientific Monthly*, 1931, **33**: 244～250.

33 G. Sarton. *Introduction to the History of Science* (Vol. II, Part II). Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1975. 626.

34 K. Mahler. On the Chinese Remainder Theorem. *Mathematische Nachrichten*, 1958, **18**: 120～122.

35 Wang Ling. The Date of the Sun Tzu Suan Ching and the Chinese Remainder Problem. *Proceedings of the 10th International Congress of the History of Science*, *Ithaca*, 1962. Paris, 1964. 489～492.

36 D. J. Struik. On Ancient Chinese Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 1963, **56** (6): 424～432.

37 吴文俊主编. 秦九韶与《数书九章》. 北京师范大学出版社, 1987.

# A HISTORY OF *DA-YAN QIU-YI SHU* IN THE WEST

Wang Xiaoqin

(*Institute for the History of Science*, *CAS*, *Beijing*, 100010)

**Abstract** It is not smooth for Qin Jiushao's *Da-Yan Qiu-Yi Shu* to be understood in the West. In 1852, A. Wylie, a British missionary who came to China in 1847, published in *North-China Herald* the famous *Jottings on the Science of the Chinese*: *Arithmetic*, in which he explained the solution of Sun Zi's famous remainder problem and the first problem of *Shu-Shu Jiu-Zhang* by means of *Da-Yan Shu*, without showing explicitly how to find the multiplicator, i. e. , the solution of the congruence of $ax \equiv 1 \pmod b$. In translating this paper, the German Scholar K. L. Biernatzki misunder stood the *Da-yan Shu*, confusing the multiplicator with the *Ji*, which is the least positive residue of a (mod b). So did the French Mathematician O. Terquem in translating Biernatzki'. L. Matthiessen, a German mathematician, judiciously corrected Biernatzki's mistake and pointed out the identity of *Da-Yan Shu* with C. F. Gauss' rule in *Disquisitiones Arithemeticae*. L. Matthiessen also offered and explanation of the case in which the moduli are not relatively prime in pairs. However, he did not know the *Qiu-Yi Shu*, which Y. Mikami first explained in modern notations in his *Development of Mathematics in China and Japan*. Over a century passed before the Belgian scholar U. Libbrecht exhaustively studied the *Da-Yan Qiu-Yi Shu* in his *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*.

**Key Words** A. Wylie, *Da-Yan Qin-Yi Shu*, Multiplying term, A. L. Biernatzki, L. Mattiessen, Chinese remainder theorem

责任编辑：艾素珍