

国际 HPM 研究概述

◇汪晓勤

一 滥觞

根据文献的记载,早在公元前4世纪,古希腊学者欧德姆斯(Eudemus)就撰写过《算术史》《几何史》《天文史》。1758年,法国数学家蒙蒂克拉(J.E.Montucla,1725-1799)出版《数学史》(2卷,后被补充为4卷)。1880年开始,德国数学史家康托尔(M.Cantor,1829-1920)陆续出版《数学史讲义》(4卷),取代了蒙蒂克拉的《数学史》,成为19世纪里程碑式的标准数学史著作,并奠定了数学史作为一门学科的地位。但是,蒙蒂克拉和康托尔以及同时代其他学者研究数学史的目的不是为教育服务,而是要揭示数学史的文化价值,揭示数学在一个民族文化生活中的地位。

随着数学史学科的建立,数学史逐渐成了一门数学教师教育课程。1891年,数学史家史密斯(D.E.Smith,1866-1940)在美国密歇根州立师范学院开设数学史课程;20世纪初,史密斯在哥伦比亚大学师范学院创建数学教育博士点,数学史是最重要的学位课程。史密斯在其《数学史》第一卷(1923)前言中指出,数学史已被公认为教师教育的重要学科。史密斯认为,数学史为数学教学改革提供了借鉴;他还强调历史相似性对于数学教学的重要意义:困扰世界的东西也会困扰儿童,世界克服其困难的方式提示教

师,儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难^[1]。

同时代另一位美国数学史家卡约黎(F.Cajori,1859-1930)也是关注数学史教育价值的学者之一。他认为,教师在课堂上讲述数学史,可以激发学生的学习兴趣,并让学生正确认识数学的本质:数学并非枯燥、呆板的,而是不断进步、生动有趣的学科。卡约黎也认识到学生的学习困难所具有的历史相似性^[1]。

史密斯和卡约黎的数学史著作对我国数学史家钱宝琮(1892-1974)产生了很大的影响。从20世纪20年代开始,钱先生相继在南开大学、浙江大学、华东师范大学开设数学史课程。他认为,数学史研究的一个重要目标是为中学数学教师服务。他还倡导,师范院校有必要开设数学史课程。

19世纪,德国生物学家海克尔(E.Haeckel,1834-1919)提出生物发生学定律“个体发育史重演种族发展史”,并将该定律运用于心理学领域,指出“儿童的心理发展不过是种族进化的简短重复而已”。人们将该定律运用于数学教育,历史发生原理应运而生。19世纪末,历史发生原理开始受到广泛的推崇和讨论,这大大促进了数学教育研究者对于数学史的关注。除了史密斯、卡约黎、F·克莱因(F.Klein,1849-1925)、庞加莱(H.

Poincaré, 1854-1912)、波利亚(G.Pólya, 1887-1985)、弗赖登塔尔(H.Freudenthal, 1905-1990)、M·克莱因(M.Kline, 1908-1992)等著名数学家都是该原理的倡导者。例如, M·克莱因认为, 历史上数学家所遇到的困难, 正是学生也会遇到的学习障碍, 因而数学史是教学的指南。以负数为例, M·克莱因指出: “从主流数学诞生开始, 数学家花了一千年才得到负数概念, 又花了一千年才接受负数概念, 因此我们可以肯定, 学生学习负数时必定会遇到困难。”^[2]

然而, 数学史的价值并不仅仅局限于历史相似性给予教学的启示。20世纪50年代, 美国学者琼斯(P.S.Jones, 1912-2002)总结了数学史更多的教育价值^[3]。对学生而言:

* 数学史能够澄清数学的意义, 揭示数学的本质, 加深学生对数学的理解。

* 数学史能激发学生的学习兴趣, 并让他们欣赏和热爱数学。

* 数学概念漫长而曲折的历史, 让学生获得心理安慰, 不会因自己的不理解而担忧。

对教师而言:

* 数学史为教师提供丰富的教学素材。

* 数学史是教师改进教学的工具。

* 数学史提供新课引入的话题以及帮助学生找到“发现”新概念或新思想的方法。

总之, 20世纪70年代以前, 关于数学史与数学教育之间的关系, 数学家、数学史家和数学教育家主要局限于对数学史教育价值的讨论, 这些讨论并未建立在教育实践的基础之上; 数学史家著述数学史, 其目的主要是为数学教师了解和运用数学史提供资源, 但并未涉及“如何将数学史运用于数学教学中”这一问题。

二 教学实践

1972年, 第二届国际数学教育大会(ICME-2)在英国埃克塞特举行。为了促进数学史在各学段数学教学上的运用、数学史与数学教育关系之探讨等方面的国际交流与合作, 促进数学家和数学教师对数学史与数学教学关系的认识, 琼斯、罗杰斯(L.Rogers)等组建“数学史与数学教学之

关系国际研究小组”(International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, 简称HPM研究小组), 标志着数学史与数学教育之关系作为一个学术研究领域的诞生。四年后, 在德国卡尔斯鲁厄举行的第三届国际数学教育大会上, HPM研究小组正式成立, 隶属于国际数学教育委员会。

HPM研究小组成立之后, 人们从单纯的理论探讨转向HPM课堂实践。随着理论和实践研究的深入开展, 人们发现了数学史中更丰富的教育价值。1991年, 英国数学史家福韦尔(J.Fauvel, 1947-2001)基于已有的研究文献, 总结了15种之多: (1)增加学生的学习动机; (2)改变学生的数学观; (3)让学生获得心理安慰; (4)使数学不那么可怕; (5)有助于保持对数学的兴趣; (6)给予数学以人文的一面; (7)有助于解释数学在社会中的作用; (8)有助于发展多元文化进路; (9)有助于安排课程内容顺序; (10)有助于学生对概念的理解; (11)对比古今方法, 确立现代方法的价值; (12)为学生提供探究的机会; (13)有助于解释今天学生的学习困难; (14)培养资优生的远见卓识; (15)提供跨学科合作的机会。^[4]

自1984年开始, 在国际数学教育大会召开的当年, 国际HPM研究小组举办HPM卫星会议, 至今已有九届, 数学史融入数学教学的实践乃是历届HPM卫星会议的重要主题之一。在台湾, 基于数学史的教学设计主要采用学习单的方式, 已有案例涉及圆与圆周长、扇形面积、分数乘除法等。

三 教育取向的历史研究

要将数学史融入数学教学, 教师需要拥有必要的数学史料, 因此, 教育取向的数学史研究和数学史素材的整理、裁剪和加工是HPM研究小组的基础性工作。在HPM研究小组成立之后, 教育取向的历史研究文献日益增多。早在1969年, 全美数学教师协会(NCTM)出版了《用于数学课堂的历史专题》, 书中的材料大多取自史密斯、卡约黎等先驱者的著述, 但与数学课程的关联还不够紧密。2004年, 美国数学史家卡茨率领一个由22名中学数学教师组成的团队历时两年

编成《用于数学教学的历史模块》一书,供数学教师使用。该书中的材料与数学课程的关系更为密切,作者还给出课堂中如何实施各个模块的具体建议。

历届 HPM 卫星会议、欧洲“数学教育中的数学史与认识论”暑期大学(ESU)的文集,以及 HPM 领域的文集,如《向大师学习》(1995)、《数学之魂:历史研究与教学融入》(1996)、《用历史来教数学》(2000)等,都包含有大量教育取向的历史研究成果。古里克斯和布洛姆(Gulikers & Blom, 2001)在有关几何历史与教学的文献综述中,教育取向的历史研究占了相当大的比例。

④ 历史相似性研究

发生原理或历史相似性对数学教学具有重要意义。事实上,如果某一概念的历史相似性是客观存在的,那么,教师可以借鉴历史,重构知识的自然发生过程来设计教学。

一些欧美学者以若干数学主题为载体开展了实证研究,印证了历史相似性的存在。以角的概念为例,历史上数学家对角的认识见表 1。

表 1 历史上数学家对角的认识

时间	数学家	对角的认识	类别
公元前 6 世纪	泰勒斯	将“相等的角”称为“相似的角”。	质
公元前 4 世纪	亚里士多德	将“相等的角”称为“相似的角”。	质
	欧德姆斯	角源于“折断”或“偏斜”。	质
公元前 3 世纪	欧几里得	若一直线与另一直线构成的两个相邻的角相等,则称这两个角为直角;钝角是大于直角的角;锐角是小于直角的角。	质/量
	欧几里得	是平面上相遇、且不在同一直线上的两条线彼此之间的倾斜度。	关系
	阿波罗尼斯	角是面或体中的折线或折面收缩到某点或某条线处。	量
公元 1 世纪	普鲁塔克	角是折线或折面在某处的初距。	量
	卡普斯	角是包含它的两线或两面之间的距离。	量

美国学者凯瑟(Keiser)通过课堂观察和访谈调查发现,六年级学生对角的理解恰好可以分为“质”“量”和“关系”三个方面。国内相关研究也得到类似的结论^[9]。据此,关于“角的初步认识”,教师可以重构角概念的发展过程,按照“质—量—关系”的顺序来设计教学。

历史相似性的另一种教育价值在于,教师可以根据历史上数学家所遇到的困难来预测学生的学习困难或认知障碍,从而制订相应的教学策

略,让学生有效地跨越学习障碍、克服学习困难。以字母表示数为例。西方学者将初等代数的历史分成修辞代数、缩略代数和符号代数三个阶段。古代两河流域的代数属于第一个阶段,即问题求解的过程是以纯粹的文字语言来表达的。到了公元 3 世纪,古希腊数学家丢番图首次用字母来表示未知数,使得代数学的发展进入第二个阶段。直到 16 世纪,法国数学家韦达(F. Viète, 1540-1603)首次扩大字母的功能,用字母来表示一类数或任意数,标志着代数学进入第三个阶段。代数学发展的历史表明,从修辞代数到缩略代数,从缩略代数到符号代数,每一次的跨越都经历了十分漫长的时间。而英国学者哈帕(Harper)的研究表明,学生对符号代数的认识具有一定的历史相似性。由此我们可以断言,学生在学习用字母表示数时,一定会遇到困难。一方面,我们需要设计恰当的探究活动,让学生实现从低级阶段到高级阶段的跨越;但另一方面,我们也必须有充分的心理准备,这种跨越绝不可能是一蹴而就的。

⑤ 教师专业发展

查纳基斯(Tzanakis)和阿克维(Arcavi)曾总结数学史对丰富教师知识储备的重要意义^[9]:

* 通过数学史,教师可以确定引入一种新数学知识的动机。

* 通过数学史,教师可以了解历史上出现过、课堂上可能会再现的困难或障碍。

* 通过数学史,教师可以理解“做数学”的创造性过程,从而提高数学素养,更好地理解数学活动的本质。

* 通过数学史,教师可以丰富自己的教学知识储备,包括例子、解决问题的另类方法等。

* 数学史让教师对于表达思想或解决问题的非传统方法、非常规方法更加宽容或尊重。

在福韦尔和冯马南主编的《数学教育中的历史》(2000)一书中,专门用一章的篇幅来讨论数学史在教师教育中的作用。而 2004 年在瑞典乌普萨拉举行的第六届 HPM 卫星会议上,“数学史对教师培训的作用”被列为重要的主题之一。

已有的研究表明,HPM 可以有效地促进教

师的专业发展。莫斯福德(Mosvold)、詹克维斯特(Jankvist)等已经讨论了数学史与教师面向教学的数学知识(MKT,如图1)之间的密切关联。

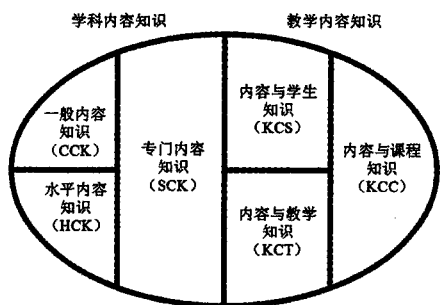


图1 数学教师用于教学的数学知识分类框架

克拉克(Clark)的研究表明,数学史改变了职前教师的MKT,特别是其中的专门内容知识(SCK)和内容与教学知识(KCT)^[7];亨特雷(Huntley)等的研究表明,数学史课程对于发展职前教师的数学知识具有积极的作用;维尔德纳(Weldeana)、卡瑞兰勃斯(Charalambous)等先后通过研究发现,数学史有助于职前教师树立积极的数学和数学教学信念。

克服自我为中心的思维习惯,倾听学生,走进学生的心灵之中,是一名教师胜任教学工作的重要前提。教师在学习数学史的时候,需要克服自我为中心的思维习惯,走进另一个时代、另一种文化背景下的数学家的心灵之中,因此,数学史对于教师有着不同于知识层面的另一种重要价值。阿克维和矾田(Arcavi & Isoda,2007)在针对职前教师所设计的“倾听学生”工作坊上,将莱茵德纸草书上的“猫和老鼠”问题(有7座房屋,每一座房屋内有7只猫,每只猫每天吃7只老鼠,每只老鼠每天吃7颗麦穗,每颗麦穗含7个容积单位的麦粒,问房屋、猫、鼠、麦穗和容积数的总和是多少)进行改编(将僧侣文改为象形文),让学生猜测象形文所表示的数字,并复原古埃及的乘法运算^[8]。作者试图通过该研究,建立一种让职前教师养成倾听学生习惯的策略。

六 教材中的数学史

数学史融入数学教材,有着悠久的历史,近年来也受到HPM领域的研究者的关注。2010

年,在维也纳召开的第六届欧洲“数学教育中的数学史与认识论”暑期大学(ESU-6)上,来自法国、意大利、波兰、希腊等国的学者们组织了一次小组讨论,与会者考察了有关国家数学教科书中的数学史,并讨论了教科书中融入数学史的目标、方式和评价标准。

以法国数学教科书为例,数学史在教科书中的运用方式有点缀式、附加式、复制式、顺应式、重构式五种,见表2。

表2 教材中运用数学史的方式

类别	呈现内容	功能
点缀式	插图,如数学家画像、历史上的测量工具、古代数学著作的书影、反映数学主题的绘	以图辅文,图文并茂;装饰、美化、人性化。
附加式	数学史文字阅读材料,如附于某个主题之后的历史注解、独立成节的专题历史、附于正文之后的历史介绍或人物简介、数学术语的辞源等。	追溯历史起源,补充历史知识,提供辅助材料。
复制式	直接来自历史的数学问题、问题解法、定理证法等,或作为教材开篇的学科历史溯源。	提供数学问题,再现古人智慧,促进数学学习。
顺应式	改编自历史上数学问题的习题,或根据历史材料而编制的数学问题,或源于数学史,但经过简化的思想方法。	提供数学问题,增加探究机会,激发学习兴趣。
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史,以发生的方法来引入数学概念,或借鉴了历史,以符合现代学生认知的方式编排的知识。	把握认知基础,激发学习动机,促进知识理解。

根据上述分析框架,我们可以对世界各国小学数学教科书中的数学史进行深入的比较研究,从中获得思想的启迪。

七 结语

综上,HPM领域的研究课题包括理论探讨(为何与如何)、教育取向的数学史研究、数学史融入数学教学的实践研究、历史相似性实证研究、教师专业发展研究、数学史融入数学教材研究等。教育取向的数学史研究是HPM研究的基础;历史相似性研究为数学史融入数学教学和数学史融入数学教材提供依据;数学史融入数学教学的实践与HPM理论始终处于良性互动的过程之中;教师专业发展是HPM学习共同体的目标,相关研究为教师成长提供重要借鉴。

HPM研究表明,数学史对于学生的数学学习和教师的专业发展有着重要促进作用,数学史营造了不一样的数学课堂,改变了学生,改变了教师。因此,HPM受到广大一线教师和职前教师的喜爱。在未来,实践研究以及教师专业发展仍将是HPM领域的重要研究课题。不论未来的数

学教育会经历怎样的改革,不论未来的数学教育理论会经历怎样的新旧更替,数学的历史都永远无法改变,因而基于数学历史发展规律的数学教育研究也必将经得起历史的考验。我们有理由相信,HPM 必将成为数学教育中亮丽的风景!

参考文献:

[1]汪晓勤.HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017.

[2] M.Kline.A proposal for the high school mathematics curriculum [J]. Mathematics Teacher, 1966, 59 (4): 322-330.

[3] Jones P. S..The history of mathematics as a teaching tool[J]. Mathematics Teacher, 1957,50 (1): 59-64.

[4] Fauvel J..Using history in mathematics education [J]. For the Learning of Mathematics, 1991,11(2): 3-6.

[5] Keiser J. M..Struggles with developing the concept of angle: comparing sixth-grade students' discourse to the history of angle concept [J]. Mathematical Thinking and Learning, 2004, 6 (3): 285-306.

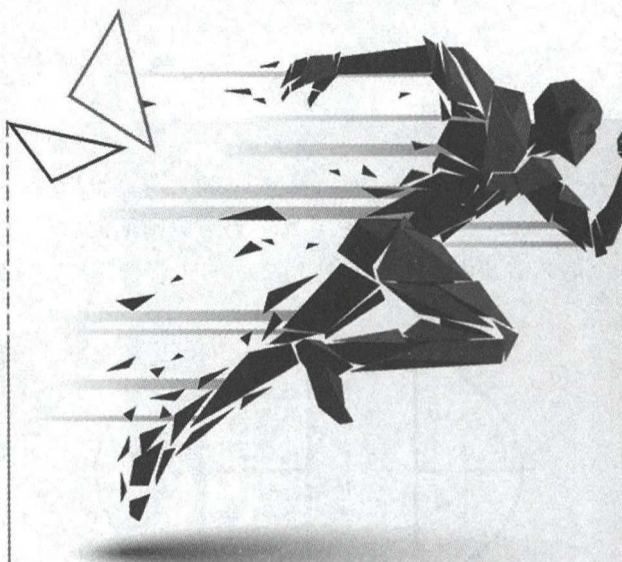
[6] Tzanakis C., Arcavi A..Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. [M].In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in Mathematics Education, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000:201-240.

[7] Clark K. M..History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers[J]. Educational Studies in Mathematics, 2012, 81: 67-84.

[8] Arcavi A., Isoda M..Learning to listen: from historical sources to classroom practice[J]. Educational Studies in Mathematics, 2007,66 (2): 111-129.

【本文系上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”的研究成果】

(作者单位:华东师范大学教师教育学院) [L]



编者按:

基础教育课程承载着党的教育方针和教育思想,规定了教育目标和教育内容,是国家意志在教育领域的直接体现,在立德树人中发挥着关键作用。《普通高中数学课程标准(2017年版)》(本专辑均简称为《高中课标2017》)的颁布,在数学教育界掀起了一股学习和研究的热潮。与2003年版高中课标相比,《高中课标2017》在课程目标、课程结构、课程内容、课程评价等方面都发生了一些显著的变化,特别是提出了数学学科核心素养、“三会”、学业质量标准等新的概念或理念。由于我国普通高中教育和义务教育是一脉相承的,具有系统性和连续性,所以,以下问题值得我们深思:高中课标的修订,对义务教育阶段特别是小学阶段的课程设计、课标修订及教育教学改进等有哪些启示呢?基于此,本刊策划了“高中课标的启示”专辑。

在本专辑中,马云鹏、孙晓天、张丹、王永春、刘琳娜等专家,分别围绕核心素养、必备品格、“三会”、抽象思想、建模思想,或高位引领,或建构理论体系,或结合具体案例谈教学策略,各抒己见,为我们的研究和教学指明了方向。

理越辩越明,道越论越清。对于课程改革的理论研究和实践探索会一直持续下去,期待更多的人参与进来。特别是教科研人员 and 一线教师,在理论的“实践性解读”方面更有发言权。期望我们的共同努力能为义务教育阶段的教学及接下来的课程改革等提供一些参考意见。