

# HPM视角下的

# 高中函数概念课例研究\*

教师教育学院(200062) 刘恩璐 汪晓勤  
 华东师范大学 数学科学学院200241) 沈中宇

## 1. 引言

所谓“HPM课例”，是指以解决某个教学问题为主旨、以不同方式将数学史融入具体知识点的教学的案例，包括教学的缘起、设计、改进、实施、反馈和评价等过程。近年来，随着HPM课例研究的开展以及HPM课例的逐渐增多，越来越多的一线教师对HPM产生了浓厚的兴趣，他们希望深入学习HPM的有关知识，并将数学史运用于课堂教学之中。但对于一线教师来说，独立开发一个较为理想的HPM课例却并非易事，因为教师手头往往缺乏有用的历史素材，即使有了历史素材，对于数学史的运用方式也不甚了解。因此，让一线教师深入了解HPM课例的研究方法和形成过程，是十分必要的。

函数是高中数学的核心概念之一，沪教版高中《数学》(一年级第一学期第三章第一节)虽然引入了集合语言，但仍采用“变量说”(人教版教科书采用“集合对应关系”定义，即“对应说”)。对于函数概念的教学，迄今人们已经做了很多实践研究。但是，教学实践中仍存在一些问题有待于进一步解决，例如，学生在初中已经学习了函数的定义(沪教版初中教科书采用“变量依赖关系”定义，而人教版初中教科书则采用“变量对应关系”定义)，为什么到了高中还需要学习函数的新定义？如何在课堂上重构函数概念的历史，引导学生从“变量说”顺利过渡到“对应说”？HPM视角下的函数概念教学能否体现数学史的多元教育价值？

为此，HPM工作室开展了将数学史融入函数概念教学的课例研究，先后历经选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作四个环节，最终形成了有一定特色的HPM课例。本文呈现课例研究的完整过程，为函数概念的教学以及未来的HPM课例研究提供参考。

## 2. HPM视角下的函数概念课例研究

## 2.1 选题与准备

### 2.1.1 确定课题

课例研究的课题是HPM工作室在每个学期的期末根据下学期各学段的教学内容来确定的。高中函数概念既是初中函数概念的进一步抽象化，又是整个函数模块的基础，对后续数学学习至关重要，自然成为工作室的首选。HPM工作室成员根据自己的教学进度，自愿报名承担开课任务。

针对函数概念的教学，基于过去的教学实践以及已有的实践研究，工作室确定了以下需要解决的问题：

- (1) 函数概念发生演变的历史动因是什么？
- (2) 经过初中阶段的数学学习，学生对于函数概念的认知起点是什么？
- (3) 初中已经学习了函数的定义，为什么到高中还要学习新的定义？
- (4) 如何从变量说过渡到对应说？

### 2.1.2 搜集史料

确定课题之后，工作室的研究者对函数概念的演进历史进行了研究。主要搜集以下史料。

1748年，欧拉(L. Euler, 1707-1783)在《无穷分析引论》中采用“解析式说”来定义函数：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。”但到了1755年，欧拉采用“变量依赖说”重新定义了函数：

“如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些变量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数。该定义适用范围很广，包含了一个量由其他量确定的所有方式。因此，若 $x$ 表示变量，其他所有以任意方式依赖于 $x$ 或由 $x$ 确定的量均称为 $x$ 的函数。”

\*本文系HPM工作室系列论文之一。

在探讨从解析式说演变为变量依赖说的历史动因时,我们发现“弦振动问题”扮演着重要的角色:一根两端固定的弹性弦被变形成某种初始形状再释放,如何确定刻画振动弦在某时刻形状的函数?对于该问题的研究引发数学家重新审视函数的定义,函数概念的外延因此得到了进一步拓展:用不同区间的解析表达式分段定义的函数;徒手绘制的函数,可能并不能用任何解析表达式给出。

函数概念从“变量依赖关系”演变为“变量对应关系”,与傅里叶级数的研究密切相关。数学家们一直试图用通用解析式来表示所有的函数,傅里叶(J. Fourier, 1768-1830)在不严谨的条件下给出了“所有函数都可以用傅里叶级数来表示”的结论。1837年,德国数学家狄利克雷(G. L. Dirichlet, 1805-1859)发表题为“用正弦和余弦级数表示完全任意的函数”的文章,拓展了当时的函数概念:

“设 $a, b$ 是两个确定的值, $x$ 是可取 $a, b$ 之间一切值的变量。如果对于每一个 $x$ ,有唯一有限的 $y$ 值与它对应,使得当 $x$ 从 $a$ 到 $b$ 连续变化时, $y$ 也逐渐变化,那么 $y$ 就称为该区间上 $x$ 的一个连续函数。在整个区间上, $y$ 无需按照同一种规律依赖于 $x$ ,也无需单独考虑能用数学运算来表示的关系。”

为说明该规则具有完全任意的性质,狄利克雷举出了“性状极怪”的函数实例:当 $x$ 为有理数时, $y=c$ ;当 $x$ 为无理数时, $y=d \neq c$ (今称狄利克雷函数)。其意义在于:突破了以往人们对于函数的印象,是第一个既不是由一个解析式表示、也不是徒手绘制的曲线,说明了函数作为任意配对的概念。

集合论诞生后,函数定义得到了进一步抽象,1939年,布尔巴基学派在《集合论》中给出了函数新定义:

“设 $E$ 和 $F$ 是两个集合,它们可以不同,也可以相同。 $E$ 中的一个变元 $x$ 和 $F$ 中的变元 $y$ 之间的一个关系称为一个函数关系,如果对每一个 $x \in E$ ,都存在唯一的 $y \in F$ ,它满足与 $x$ 的给定关系。我们将联系的每一个元素 $x \in E$ 和 $y \in F$ 的运算称为函数; $y$ 称为 $x$ 处的函数值。函数是由给定的关系决定的,两个等价的函数关系确定了同一函数。”

### 2.1.3 初步设计

在课例研究准备阶段,开课教师(即后文中的“执教者”)首先独立完成教材分析和学情分析。工作室为第 38 页

开课教师提供与函数相关的数学史料以及已有的相关教学设计。教师研读上述材料,思考如何将历史融入教学,并提出自己的困惑,如“关于函数概念,初中采用变量说,高中采用对应说,两者之间有何关系?”“教材中出租车费、男子110米栏记录的实例,仅仅是为了说明分段函数和函数的图像表示吗?”等等。

教师根据历史材料,结合实践经验以及已有的教学设计,初步完成教学设计(I),见表1。教学目标为:(1)理解函数的概念,理解抽象函数符号 $f(x)$ 的意义;(2)理解和掌握用图设法,列表法和解析法表述函数;(3)会根据具体情况确定函数的定义域以及判断两个函数是不是同一函数;(4)通过经历函数概念变化的过程,提升数学抽象的能力。

表1 “函数的概念”教学设计(I)

教学环节	教学过程	数学史素材
复习引入	回忆初中函数的概念并举例,介绍韦头三位数学家。	笛卡尔、欧拉和李普兰简介
新课探究	探究 I: (1)写出简单问题中的函数关系式; (2)男子100米栏世界纪录统计表,生活中的例子。 (3)讨论“解析式”定义的局限性。 探究 II: (1)展示欧拉的“变量依赖关系”定义; (2)讨论 $y=0(x \in \mathbf{R})$ 是否函数; (3)讨论“变量依赖关系”定义的局限性。 探究 III: (1)展示狄利克雷的“变量对应关系”定义; (2)呈现“变量说”的现代标准定义。 探究 IV: (1)用集合语言来描述两个变量之间的对应关系; (2)呈现变量说的课本定义。	欧拉的函数定义 狄利克雷的函数定义
知识应用	通过例题让学生巩固函数的概念。	
课堂小结	总结本节课主要内容和主要方法。	

## 2.2 研讨与设计

### 2.2.1 历史分析

工作室研究者通过对函数概念历史的研究,得到以下教学启示。

(1)为了顺利实现从“解析式”定义到“变量依赖关系”定义的过渡,可借鉴数学史上的“弦振动问题”,让学生产生认知冲突。具体方案是:先给学生们听一段优美的吉他曲,启发学生想象吉他琴弦振动的形状,引出“函数是否一定有解析式”这一问题。

(2)为了顺利实现从“变量依赖关系”定义到“变

量对应关系”定义的过渡,可利用数学史上的狄利克雷函数,让学生产生新的认知冲突.考虑到狄利克雷函数的抽象性,一开始采用文字语言来描述该函数.

(3)制作时长一分半左右的HPM微视频,简单介绍狄利克雷的生平、狄利克雷的函数定义及其意义,让学生感受数学知识背后的理性精神.

### 2.2.2 交流研讨

基于以上教学启示,研究者与执教者再一次就教学设计进行深入交流和研讨.研讨过程中,研究者与执教者达成共识,学生在本节课中需要实现函数概念的三次跨越:从“解析式”定义到“变量依赖关系”定义、从“变量依赖关系”定义到“变量对应关系”定义、从“变量对应关系”定义到“集合对应关系”定义,在此基础上,知道如何判断两个函数是否同一函数.

大家在研讨中提到,本节课所涉及的历史上的函数定义较多,教师应该最后给学生一个标准的函数定义.执教者提出新的问题:在“变量对应关系”定义(不用集合语言)的基础上,如何自然地引入集合语言?

### 2.2.3 改进设计

基于研讨结果以及历史研究的启示,执教者对教学设计(I)进行改进,见表2.

教学设计(II)在教学目标上,删掉“理解抽象函数符号  $f(x)$  的意义”,增加“形成动态的数学观”和“经历函数概念变化的过程,提升数学学习的兴趣和信心”.

表2 “函数的概念”教学设计(II)

教学环节	教学过程	数学史素材
复习引入	同教学设计(I)	同教学设计(I)
新课探究	<p>探究 I:</p> <p>(1)引出欧拉“解析式说”;</p> <p>(2)吉他琴弦振动的形状、股票趋势图和随手画的一段曲线;</p> <p>(3)同教学设计(I).</p> <p>探究 II:</p> <p>(1)同教学设计(I);</p> <p>(2)男子100米栏世界纪录统计表、常值函数 <math>y=0(x \in \mathbb{R})</math> 和狄利克雷函数(文字语言);</p> <p>(3)同教学设计(I).</p> <p>探究 III:</p> <p>(1)同教学设计(I);(2)HPM微视频;</p> <p>(3)验证前面六个例子.</p> <p>探究 IV:</p> <p>(1)用文氏图表示狄利克雷函数;</p> <p>(2)展示布尔巴基学派的集合对应关系定义;</p> <p>(3)呈现课本定义.</p>	<p>同教学设计(I)</p> <p>振动弦问题</p> <p>同教学设计(I)</p> <p>狄利克雷函数</p> <p>同教学设计(I)</p> <p>布尔巴基学派的函数定义</p>
知识应用	同教学设计(I)	
课堂小结	总结本节课主要内容和学习感悟.	

同时,为了检测教学效果、了解学生对函数概念的理解,研究者参考已有的调查问卷,编制函数概念的前、后测调查问卷.

## 2.3 实施与反馈

### 2.3.1 第一轮教学

第一轮教学为试讲,执教者采用了教学设计(II).教学过程中,执教者利用“狄利克雷函数”引入“变量对应法则”定义.通过用文氏图表示狄利克雷函数的定义域(有理数集与无理数集),再对应到因变量  $y$  的取值(1和0)所构成的集合.接着用集合的形式写出狄利克雷函数的分段解析式,顺利引出函数概念在集合语言下的“变量对应说”,并让学生去体验集合语言的简洁性和数学语言的演进性.

从学生填写的前、后测调查问卷和访谈录音有如下发现.大多数学生课前对于函数持有“解析式”意象,而课后都有了“对应”意象.另外,学生对于函数概念有了动态的数学观,承认函数的复杂性,但也看到历史上数学家特别是狄利克雷对于数学的热爱.函数概念演进的艰辛而缓慢的过程,为学生提供了思想启迪.但是,从散点图的考查可以看出,仍有部分学生认为“函数是连续的图像”,说明他们对于变量对应关系仍然缺乏深刻的理解.

执教者对于第一轮教学进行了反思,认为本节课存在三个问题:一是学生回忆初中函数概念时,“解析式”的出现并不自然;二是学生对于振动弦形状和股票走势图例子没有反应,“变量依赖说”引入不够流畅;三是“对应”这个词的引入不自然.听课教师和研究者也提出若干建议,如狄利克雷所使用的“对应”一词可用来解释前面所有的函数例子,建议让学生拿这个词与其他词作比较,从而得出前者的优越性.最后,执教者意识到,不仅要关注“对应”这个词,还应强调它的合理性.

### 2.3.2 第二轮教学

本轮教学为正式授课,工作室的一线教师和大学研究者均前往观摩,根据第一轮教学之后的研讨与反思,执教者对教学设计(II)做了一些调整,形成了教学设计(III),见表3.

在教学目标上,删掉“理解和掌握用图示法,列表法和解析法表述函数”,增加“理解函数的三要素”和“感受数学的理性精神”.

在试讲所用的教学设计(II)中,执教者虽然先给

出了布尔巴基学派的“集合对应关系”定义(对应说),但是紧接着又回到了沪教版教科书中的定义(集合语言下的变量对应说).而在正式课的教学设计(III)中,执教者不再拘泥于沪教版教科书中的定义,最后呈现给学生的是布尔巴基学派的“集合对应关系”定义.

表3 “函数的概念”教学设计(III)

教学环节	教学过程	数学史素材
情景引入	教师课前播放吉他曲,并将三位数学家的图片根据本节课的内容改为欧拉,狄利克雷,李善兰.	欧拉、狄利克雷、李善兰简介
新课探究	探究I: (1)同教学设计(II); (2)吉他琴弦振动的形状(在PPT上做了将一根琴弦振动时的形状描绘下来再移动到直角坐标系中的动画)和随手画的一段曲线; (3)同教学设计(I).	同教学设计(I) 同教学设计(II)
	探究II: (1)同教学设计(I); (2)校运会男子100米纪录统计(让学生更有生活感和熟悉感)、常值函数 $y=0$ ( $x \in \mathbb{R}$ )和狄利克雷函数(文字语言); (3)同教学设计(I).	同教学设计(I) 同教学设计(II)
	探究III: (1)展示简化版狄利克雷对函数的定义,即“一般地,在一个变化过程中,如果有两个变量 $x$ 与 $y$ ,并且对于 $x$ 的每一个确定的值, $y$ 都有唯一确定的值与其对应,那么我们就说 $x$ 是自变量, $y$ 是 $x$ 的函数”; (2)同教学设计(II); (3)HPM微视频(内容改为“函数概念的历史”)	同教学设计(I) 函数概念的演进历史
	探究IV: (1)同教学设计(II); (2)同教学设计(II).	同教学设计(II)
知识应用	同教学设计(I)	
课堂小结	同教学设计(II)	

### 2.3.3 学生反馈

我们对全班37名学生在情感和认知两方面进行了前后测.在对函数概念的理解上,大多数学生对函数的印象课前是初中学过的各类函数,课后是函数“对应说”的定义和函数三要素.在用语言刻画函数对应关系的考查上,学生正确率从45.9%变为了83.8%.在考查函数的表格对应问题上,将前测有规律的数据变为无规律的数据后,学生的正确率从70.3%变为了67.6%.在通过函数图像考查对应关系“唯一性”的问题上,将前测无规律的变化图像变为了开口朝右的抛物线,学生正确率从45.9%变为54.1%.在函数图像为

离散的点集问题的考查上,学生的正确率从21.6%变为了59.5%.

后测卷加了一个问题,让学生说说本节课上印象最深刻的内容.多数学生提及函数的演进过程、函数的对应关系和函数的三要素,还有一部分学生提到函数的严谨化、质疑的精神和坚持不懈的努力等.从表格题和图像题中进一步发现,不少学生认为函数必须是有规律的,并没有在学习“集合对应关系”定义后发生改变,这既说明了学生对于函数新定义尚缺乏深刻理解,同时也印证了数学教育研究所发现的概念定义和概念意向分离的现象.

### 2.3.4 同行评议

第二轮教学之后,工作室教师与研究者对本节课进行了点评.与已有的HPM视角下的函数概念教学设计相比,本课例做了许多创新.一是在狄利克雷函数来凸显变量依赖关系定义的局限性,二是以狄利克雷函数情形中集合语言的自然引入;三是现代“集合对应关系”定义的呈现,突破了沪教版教科书中的定义.此外,执教者的课堂总结很棒:任何数学概念都经历不断演进的过程,正如同学们的数学学习一样,刚开始有反复、有疑惑、甚至有错误,但在今后的学习过程中会不断改进、渐至佳境.这样的总结既让学生树立动态的数学观,又让学生正确看待自己数学学习的过程.

但是,对应说的必要性问题仍然未得到很好的解决,未来需要作进一步的历史研究,以为教学提供借鉴;此外,在讲常值函数  $y=0$  的例子时,可以多给学生一些思考时间,因为这里存在强烈的认知冲突.

## 2.4 整理与写作

### 2.4.1 教师反思

第二轮教学之后,执教者围绕函数概念的教学,进行了深刻的反思.根据反思单,我们发现执教者在四个方面的变化.

首先,执教者对函数概念有了更深刻的认识,知道不应仅从解析式上去判断对应法则.

其次,执教者认识到学生对函数的理解(函数为解析式)具有历史相似性,需要用反例来纠正他们的观点,使他们的理解不断深入.

再次,执教者以往是通过让学生反复解题来达到理解概念的目的,经过本次教学,执教者意识到,借鉴和重构函数概念的历史,可以让学生真正经历概念的

形成过程,从而加深对它的理解,因而HPM是概念教学的有效途径。

最后,HPM视角下的函数概念教学,让学生得以穿越时空与历史上的数学家对话,从而让他们亲近数学,获得积极的情感体验,并感悟数学背后的理性精神。

### 3.4.2 课例呈现

最后呈现的课例主要分为5部分,分别是引言、史料选取与运用、教学设计与实施、学生反馈和结语。

引言对教材作简要分析,概述函数概念已有的教学设计,总结有待解决的教学问题,说明HPM视角的必要性。“史料选取与运用”部分介绍函数概念的历史、本节课所选择的历史素材以及数学史的运用方式。“教学设计与实施”部分按函数概念的各个教学环节展开,中间展示一些关键的教学片段。“学生反馈”部分呈现函数概念前、后测结果以及对结果的质性分析。“结语”部分为数学史在本节课中所体现的教育价值以及执教者和研究者的反思。

### 3.启示

经历选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作四个步骤,最终形成了“函数的概念”这一HPM课例。从课例形成过程中,我们获得了以下启示。

首先,重视教育取向的数学史研究,促成对史料的深入挖掘。历史研究是HPM课例研究的基础,有了深入的历史研究和翔实的历史素材,我们才能获得思想的养料,为教学活动的设计提供参照,才能有理有据地对教学设计进行改进和创新。

其次,关注学生对课堂教学的反馈,达成数学史与课堂教学自然融合。理想的HPM课例需要将知识的历史顺序、逻辑顺序和学生的心理顺序统一起来,在以史为鉴的同时,关注学生的最近发展区,步步为营,以最易为学生理解和接受的方式展开教学。

再次,加强教师对教学的反思,优化数学史的教

学价值。通过HPM课例研究过程中教师填写的教师反思单和与教师研讨,可以及时了解教师每一阶段困惑并促进其发展。我们发现随着课例研究的深入,教师的对数学史教育价值的理解会随之加深,从为了数学史而数学史到利用数学史达成多元的教育价值,从促进学生知识理解到发展学生动态的数学观。

最后,强调分工合作,利用专业学习共同体的力量开发完善的课例。一个理想的HPM课例往往是团队协作的结果。课前通过团队研讨改进教学设计,课后通过分工来完成课堂实录、问卷调查和同行评议等。经过研讨、修改、实践、反思诸环节的循环,确保课例实施的有效性。

### 参考文献:

[1]汪晓勤.19世纪中叶以前的函数解析式定义[J].数学通报,2015,54(05):1-7+12.

[2]Kleiner,I.Evolution of the function concept:A brief survey [J]. College Mathematics Journal, 1989, 20(4):282-300.

[3]吴文俊.世界著名数学家传记(上)[M].北京:科学出版社,1995.

[4]钟萍,汪晓勤.函数概念:基于历史相似性自然过渡[J].教育研究与评论(中学教育教学),2016(02):62-68.

[5]Reed,Beverly M. The Effects of Studying the History of the Concept of Function on Student Understanding of the Concept [D]. Ohio: Kent State University, 2007.

[6]课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心编著.八年级上册数学书[M].北京:人民教育出版社,2016.

[7]汪晓勤,张小明.HPM研究的内容与方法[J].数学教育学报,2006,15(1):16-18.

