

HPM 视角下的人口增长问题学习进阶设计*

姜浩哲 汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院,上海 200062)

1 问题的提出

人口增长问题是中、小学数学教材中常见的数学问题.在小学数学“认识百分数”相关章节中,学生就有接触到“人口增长率”的概念,并开始简单预测未来人口增长趋势;在初中学习了函数的相关概念后,学生能通过函数的图像寻找人口数量随时间增长的规律;而高中等比数列的有关内容则与人口指数增长模型有着密切的联系.

在我国,尽管人口增长问题学生各学段的数学学习中均有涉及,但通常教学却往往只重视数学知识本身,忽视了课程内容的联系、学生思维的发展和建模能力的培养.近年来,关于学习进阶(Learning Progressions)^①的相关研究和应用方兴未艾^[1].吴颖康等认为,“学习进阶揭示了学生在学习和探索某一主题时,对该主题的思考、理解与实践活动在相当长的一段时间内是如何从简单到复杂、从低水平到高水平、从新手到专家逐步发展的.”^[3]倘若基于学习进阶加以设计,使人口增长问题教学能围绕主线,不断深入贯穿于不同学段的相关课程内容之中,不失为系统帮助学生认识模型本质和提升建模能力的良策.

在数学史上,人口增长问题同样引发了数学家们的广泛兴趣.早在公元前4500年,巴比伦王国就举办了全国性调查,按族登记人口^[4].17世纪,英国学者格兰特(J. Graunt, 1620-1674)编制了世界上第一张生命表,并正式开始人口数量规律的科学研究^[5].著名数学家欧拉(L. Euler, 1707-1783)在《无穷分析引

论》中介绍指数和对数时引入了相关人口指数增长的实例^[6],马尔萨斯(T. Malthus, 1766-1834)在此基础上对人口指数增长模型进行了完善.一方面,人口增长问题的发展历史为建立假设的学习进阶(Hypothetical Learning Trajectories)提供了参考^[7];另一方面,从HPM视角看,丰富的历史材料在选择和加工后融入课堂教学同样具有较高的价值和意义.

2 教学设计

2.1 小学阶段人口增长问题的教学设计

2.1.1 新课引入

教师向学生介绍新课历史背景.人口增长问题由来已久,我国先秦时期管子、孔子、商鞅、韩非子等人就在著作中进行了相关论述,甚至提出了人口和土地之间应有一个理想比例的思想.古希腊柏拉图(Plato,公元前427-公元前347)和亚里士多德(Aristotle,公元前384-公元前322)从城邦国家的防务、安全和行政管理角度研究了人口“适度”问题.17世纪后,许多数学家、统计学家或都探讨过人口增长问题.当然,研究人口增长问题,必然离不开人口统计数据.早在公元前4500年,巴比伦王国就举办了全国性调查,按族登记人口.我国是世界上唯一有长期不间断人口资料记录的国家,据《后汉书》记载,公元前2200年,大禹就曾经“平水土,分九州,数万民”,所谓“数万民”就是统计人口.

2.1.2 例题解析

例1 我国(不含港澳台)1970年、1980年和1990年人口总数分别为8.30亿、9.87亿和

*上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”之系列论文之一.

① Learning Progressions 与 Learning Trajectories 本质上具有一致性,因而在此可不作区分(参阅文献[2]和[3]).

11.43亿^①,试比较1970年至1980年间、1980年至1990年间人口增长速度.

教师指出,1970年至1980年间、1980年至1990年间人口数量分别增长了1.57亿、1.56亿.然而,从历史上看,我国自1982年起推行计划生育政策,1980年至1990年间人口增长速度呈放缓趋势.教师继而指出:在人口基数不同的情况下,不能通过人口增长的绝对数量比较人口增长速度.

教师联系百分数、比例的有关内容,启发学生寻找能表示人口增长速度的“相对量”,并给出学生人口增长率的数学公式:设某地区 X 年人口总数为 S_1 , $X+N$ 年人口总数为 S_2 ,则该地区在 X 年至 $X+N$ 年间人口总增长率为 $\frac{S_2 - S_1}{S_1} \times 100\%$.教师要求学生运用人口增长率的概念和公式作答例1,发现结论与历史相符.

教师指出,学生可以将数学模型理解为数字、字母或其他数学符号组成的,描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法,虽然真正实际问题的数学模型通常要比例1复杂得多,但是建立数学模型的基本步骤已经包含在了解决例1的过程中了:对实际人口总数进行近似以简化问题;用字母表示数;根据实际问题列出数学公式;求出数学解答;用得到的数学答案解释原问题;最后还用历史背景知识对上述结果进行了简单检验.

2.1.3 思维拓展

思考题1 若已知2010年A、B两地区人口总数均为10万人,2010年至2015年间,A地区人口总增长率为30%,B地区每年平均人口增长率为6%,试比较2015年A、B两地区的人口总数.

小学生在百分数应用的学习过程中常有这样的思维误区,即 N 年间人口总增长率等于年平均人口增长率与 N 的乘积,教师通过思考题1引导学生思考和发现5年后A、B两地区人口总数并不相等,既帮助学生巩固了所学新知,也为后续学习埋下伏笔.

在课堂最后,教师为学生简单拓展人口自

然增长率与出生率、死亡率之间的关系,并补充介绍格兰特生命表的有关历史内容.

2.1.4 课后活动

教师布置课后活动^②,要求学生通过网络、图书等收集世界人口历史数据,绘制简单的世界人口调查统计表、折线统计图等,估算不同时期世界人口增长率并对未来世界人口进行合理预测,搜集资料了解人口发展与资源环境承载能力之间的关系.

我国著名教育家张奠宙教授指出:“解决数学应用问题的本质是数学建模.”在小学阶段,学生运用数学公式解答应用问题的过程,本身也是一种典型、简约、形象的数学建模过程^[9].教师往往也会直接为学生建立模型,学生一般只需要找出模型中数学符号在具体问题情境中的含义,代入相关数值后即可求解得到答案.教学设计既包含有中国传统式的课堂教学,也将美国探究实践式的课后活动融入其中.教师通过建立“人口增长率”模型帮助学生学习百分数的应用,也使学生体会了数学建模的基本步骤,从而对数学模型产生初步的认识.

2.2 初中阶段人口增长问题的教学设计

2.2.1 新知传授

教师教授学生描点法作函数图像的一般步骤:列表、描点、连线,并详细说明和举例.

2.2.2 例题解析

教师引导学生从函数的观点分析人口增长问题并给出例题.

例2 表1给出了近两个世纪的美国家口统计数据,运用描点法作出人口数量随时间(年份)变化的函数的图像.

学生作答后,教师要求学生回忆小学阶段学习的“人口增长率”概念并进行相关计算,随后,教师引导学生发现:在人口增长率较高的时期,函数图像上升“陡峭”,而在人口增长率较低的时期,函数图像上升“平缓”,并指出通过函数图像观察人口增长趋势更具直观性.同时,教师补充了1930年至1960年经济萧条和二次大战的历史背景,以解释其间人口增长缓慢的原因.

① 数据来源:中华人民共和国国家统计局.中国统计年鉴2014[M].北京:中国统计出版社,2014.

② 本课后活动教学设计参考了全美数学教师协会(NCTM)的官网资源和文献[8].

表1 美国历史人口数据^[11]

年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
人口/百万	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4	38.6	50.2	62.9
年	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口/百万	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7	150.7	179.3	203.2	226.5	248.7	281.4

从简单运用已建立的模型到根据一般步骤自主建立模型,这一阶段的学习让学生对数学建模有了更进一步的尝试.再看数学模型,小学时,学生了解的数学模型仅仅是用来解决实际问题的,它只是具有应用价值,但如今,教师引导学生发现数学模型还是对现实情境的一种简洁、清晰的表达,一段函数图像,却很好地阐明了近两个世纪的人口增长过程,这也很好地解释了人们常说的“数学是一种语言”,从这个意义上说,学生在对数学模型本质的认识上也完成了一次进阶.

2.3 高中阶段人口增长问题的教学设计

2.3.1 新课引入

首先,教师引导学生回忆小学时的思考题1,要求学生猜想 N 年间人口总增长率与年平均人口增长率之间的关系.同时,教师帮助学生回顾初中阶段学习的例2,要求学生计算1790年至1860年期间各相邻10年人口数量的比值,发现近似相等.教师由此引导学生建立等比数列模型:从1790年起到1860年美国每10年的人口数量近似地构成一个等比数列 $\{a_n\}$,若每10年人口总增长率为 x ,则 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 1 + x$.

2.3.2 历史展示

教师向学生展示数学家欧拉研究人口增长问题的历史.1748年,欧拉在《无穷分析引论》中介绍指数和对数时就引入和讨论了相关人口增长问题.欧拉认为,第 n 年的人口数量 P_n 满足 $P_{n+1} = (1+x)P_n$,其中 n 为正整数, x 代表人口增长率, x 为正实数.如果考虑初始人口数量 P_0 ,则 $P_n = (1+x)^n P_0$.这被称作是人口几何级数增长模型或人口指数增长模型^[10].其后,人口学家马尔萨斯在调查了英国100多年的人口统计资料,对指数增长模型进行了完善并补充了人口增长率不变的假设^[11].教师随后要求学生建立模型解答下述选自《无穷分析引论》中的例题.

例3 某地现有人口10万,年增长率为 $\frac{1}{30}$,求百年后该地人口数.

教师介绍,这道问题欧拉是根据1747年柏林人口调查数据提出的,1747年柏林人口数量约为10.7224万.欧拉通过人口指数增长模型说明自然情况下任何地区在一个世纪中人口数量将增加10倍以上,而这一事实也在伦敦被观察证实^[10].

2.3.3 思维拓展

教师指出,在欧拉《无穷分析引论》指数与对数的相关章节还讨论了贷款利率问题,与人口指数增长模型十分类似,思考题2对原书问题进行了适当改编.

思考题2 某人以5%的年复利率借款40万弗罗林,商定 n 年后一次性还款,问 n 年后连本带息共应还款多少?

教师引导学生运用类比的思想方法建立等比数列模型解答,将两类问题进行适当比较并要求学生联系小学阶段课后活动中人口发展与资源环境承载能力关系的资料思考:在贷款利率问题中,如果 $n \rightarrow \infty$,则还款金额必定也会趋向于无穷大;但是在人口增长问题中,如果时间接近无限长,人口数量会趋向于无穷大吗?

如果说小学阶段通过“增长率”研究人口增长问题较为繁琐且缺少了直观性,初中阶段通过函数的图像研究人口增长问题不能很好满足定量分析的要求,那么在高中阶段,借助等比数列相关知识得到的人口指数增长模型则同时弥补了以上两种方法的缺陷.通过数列通项公式,便可以简单明了计算和预测某一地区较长时间内人口数量.高中阶段,教师从小学思考题和初中例题的内容再出发,引导学生在事先没有步骤和方法可循的情况下自主建立等比数列模型.思维拓展环节,教师结合《无穷分析引论》的相关内容设置思考题,引导学

生通过类比的思想方法使数学模型应用到更多新的领域,数学模型再也不是预制好的、一成不变的,而是可以根据具体问题不断调整、灵活多变的;也不是为特定对象所独有的,而是可以转移到所有合适领域中的.课堂最后,

教师再次结合小学课后活动内容启发学生进行深度思考,帮助学生了解人口指数增长模型也有不完善的地方,因为地球的资源空间是有限的,人口不可能无限制地增长,并引导学生树立正确的人口观.

3 数学史与学习进阶融合的方式

表2 数学史与学习进阶融合的方式

学段	数学史运用方式	教学环节	本教学环节数学史相关内容	回顾的其他学段或环节的内容	回顾相关教学内容的目的	
高中	整体性重构	复制式	例题解析	《无穷分析引论》中人口增长问题		
		顺应式	新课引入	运用指数增长模型分析美国18世纪上半叶人口数据	N 年间人口总增长率与年平均人口增长率之间的关系	引导学生联系等比数列的有关内容建立模型
			思维拓展	《无穷分析引论》中贷款利率问题	《无穷分析引论》中人口增长问题、人口发展与资源环境承载能力之间的关系	引导学生通过类比的思想方法建立和应用数学模型,并对两类问题进行比较.启发学生树立正确的人口观
初中	整体性重构	顺应式	例题解析	通过函数的图像分析美国历史人口数据	通过增长率分析中国历史人口数据	补充说明人口增长率在函数图像中的体现,对比说明通过函数图像观察人口增长趋势更具直观性
小学	整体性重构	附加式	新课引入	介绍人口思想和人口普查的历史		
			思维拓展	介绍格兰特生命表		
		课后活动	查阅资料了解世界历史人口数据、人口发展与资源环境承载能力之间的关系			
		顺应式	例题解析	通过增长率分析中国历史人口数据		

纵观从小学至高中的人口增长问题教学设计,数学史在整体性重构后与学习进阶相融合的,史料和问题在教学中环环相扣、层层铺垫,如表2所示.教学设计中,数学史料和问题不断回顾、补充、对比,意图促进学生的认知和元认知水平^[12].

4 数学史与学习进阶融合的价值

在人口增长问题的教学设计中,不仅由学习进阶联结而成的数学内容、思想的体系和网络呈现了“方法之美”,而且融合了的数学史与学习进阶还共同体现了“知识之谐”、

“探究之乐”、“能力之助”、“文化之魅”和“德育之效”.

4.1 方法之美

许多研究发现学习进阶有助于学生形成更丰富的知识网络或概念序列^[3, 13].通过学习进阶,百分数、函数、数列等多样的数学方法,类比、数形结合等精妙的数学思想在人口增长问题教学中联结成系统全面、有机统一的网络体系,呈现出“方法之美”.

4.2 知识之谐

一方面,基于历史人口统计数据或历史上

数学家们的认知引导学生发现和解决问题,使得学生理解和学习模型有关知识的过程变得自然而然、水到渠成;另一方面,基于学习进阶的教学是依据学生的认知和理解而设计的,各学段教学内容环环相扣、层次铺垫,学生也能明白有关模型或知识不是“降落伞”从天而降,体现了“知识之谐”。

4.3 探究之乐

一方面,历史人口数据为数学建模提供了丰富的资源依托,学生在探究如何更好地描述历史人口增长规律的过程中既能被数学家们的智慧吸引,也能因自身数学活动经验的积累而收获乐趣。另一方面,在学习进阶中,人口增长问题环环相扣、层层深入,面对愈发复杂的问题情境,学生更能在好奇心的驱使下揭开问题的层层面纱,刨根究底之中“探究之乐”也愈发浓烈。

4.4 能力之助

一方面,历史问题有助于提升学生数学建模等核心素养^[14];另一方面,学习进阶为循序渐进地引导学生发展建模能力提供了科学依据。从开始学会运用已经建立的模型,到自主建立和求解模型,学生数学建模能力不是一蹴而就的,基于学习进阶的教学也无疑成为“能力之助”。

4.5 文化之魅

一方面,人口增长问题历史悠久,既展现了数学与现实生活的联系,教学设计也充分体现了M·克莱因(M. Kline, 1908-1992)的“数学文化原理”;另一方面,学习进阶过程中,教学设计同样为学生呈现出多元的学习文

化^[15]:既有中国传统文化注重的循序渐进的课堂讲授,也引入了西方文化所提倡的旨在引导学生实践、探索、体验的课后活动。

4.6 德育之效

一方面,教学设计落实了“立德树人”这一今日教育的根本任务,通过数学史的融入引导学生更好地认识数学活动的本质,理解数学是不断演进的,数学家们勤奋、执着、严谨的优秀品质更向学生传递了数学背后的人文精神;另一方面,基于学习进阶的教学也促进了“人口观”的发展,教师引导学生逐渐理解了人口增长应与资源环境相适应,潜移默化的“德育之效”也由此产生。

5 结语

从1989-2016年核心期刊文献的统计分析可以发现,中小学生学习数学建模能力的提高是数学教育研究人员关注的焦点,优秀的数学建模案例还略显不足^[16]。一方面,数学史可以作为假设的学习进阶建立的依据,而学习进阶又能科学地、循序渐进地发展学生建模能力;另一方面,数学史又为数学建模案例的开发提供了丰富、真实的背景资源。与此同时,数学史和学习进阶融合后还体现了多个维度的价值(如图1所示)。当然,考虑到学习进阶本身具有假设性的特点,我们在学习进阶设计的过程中尚未开展实证研究,因而还存在部分值得完善的地方。但是,我们有理由相信,从HPM视角下设计数学建模的学习进阶无论是对于当前的教学实践、案例开发,还是对今后教科书的修订和编写,都具有重要的参考意义。

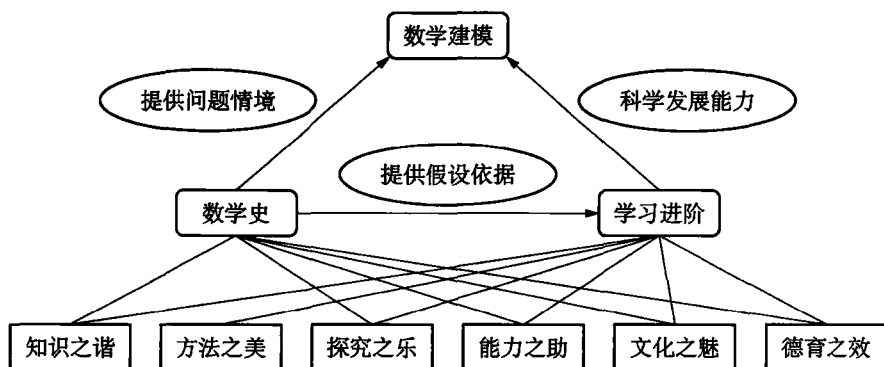


图1 HPM视角下的数学建模学习进阶设计

参考文献

- [1] National Research Council (NRC). Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K - 8 [M]. Washington: National Academies Press, 2007:211 - 251.
- [2] Daro P, Mosher F A, Corcoran T. Learning Trajectories in Mathematics: A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction [EB/OL]. (2015 - 06 - 03) [2016 - 11 - 20]. Consortium for Policy Research in Education, 2011. http://www.cpre.org/sites/default/files/researchreport/1220_learningtrajectoriesinmathccireport.pdf. DOI:10.12698/cpre.2011.r68.
- [3] 吴颖康, 邓少博, 杨洁. 数学教育中学习进阶的研究进展及启示 [J]. 数学教育学报, 2017, 26(6):40 - 46.
- [4] 孙兢新. 人口普查的历史 [J]. 江苏统计, 2000(s1):38 - 41.
- [5] (美) Pollard J H 著. 人口增长的数学模型 [M]. 姚志坚, 译. 成都: 四川大学出版社, 1988:1 - 2.
- [6] Euler L. Introduction to Analysis of the Infinite [M]. New York: SPRINGER-VERLAG, 1988:75 - 92.
- [7] Bakker A. Design Research in Statistics Education — on Symbolizing and Computer Tools [D]. The Freudenthal Institute, Utrecht, 2004:51,87.
- [8] 蓝非. 掌握方法是解决数学问题的关键——美国小学数学拓展课《人口增长中的数学》案例 [J]. 现代教学, 2005(11):60 - 61.
- [9] 张秋爽. 在问题教学中建构数学模型——有感于吴正宪《行走中的数学问题》的教学 [J]. 教育视界, 2015(8):25 - 26.
- [10] Bacaër N. A Short History of Mathematical Population Dynamics [M]. London: Springer London, 2011:13 - 39.
- [11] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型(第4版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011:163 - 173.
- [12] Fauvel J, Maanen J V. History in Mathematics Education [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000:289 - 290.
- [13] Nordine J, Krajcik J, Fortus D. Transforming Energy Instruction in Middle School to Support Integrated Understanding and Future Learning [J]. Science Education, 2011, 95(4):670 - 699.
- [14] Wang X Q, Qi C Y, Wang K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study [J]. Science & Education, 2017, 26(2):1029 - 1052.
- [15] 张三花, 黄甫全. 学习文化研究: 价值、进展与走向 [J]. 江苏高教, 2010(6):15 - 18.
- [16] 牛伟强, 张佃, 熊斌. 中国中小学数学建模研究的回顾与反思——基于1989—2016年核心期刊文献的统计分析 [J]. 数学教育学报, 2017, 26(5):66 - 70.