从“勾股容方”到均值不等式

汪晓勤

（华东师范大学数学系　200241）

均值不等式是中学数学的重要主题，迄今为止，人们已经给出了很多种证明或推导方法，人们耳熟能详的弦图模型和半圆模型实源于古代中国和希腊的数学史．展卷阅读古代数学文献，我们常常会有新的收获．本文从《九章算术》“勾股容方”问题出发，对均值不等式进行了粗浅的探究．

1　勾股容方

汉代数学名著《九章算术》勾股章中设题：“今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何．”解法是：“并勾股为法，勾股相乘为实，实如法而一，得方一步．”[1]设直角三角形的直角边为 a 和 b，则上述解法相当于说，与直角三角形具有公共直角的内接正方形边长为

$$d=\frac{ab}{a+b}$$

公元 263 年，布衣数学家刘徽为《九章算术》作注．在注中，他利用出入相补原理证明了上述公式，如图 1 所示．用对角线将长和宽分别为 b 和 a 的矩形分成两个直角三角形，每个直角三角形分成一个内接正方形(黄)和两个小直角三角形(朱、青)．将三种颜色的图形进行重组，得到图 2 所示的矩形，该矩形的长为 $a+b$，宽即为内接正方形的边长 d，故有 $ab=d(a+b)$．

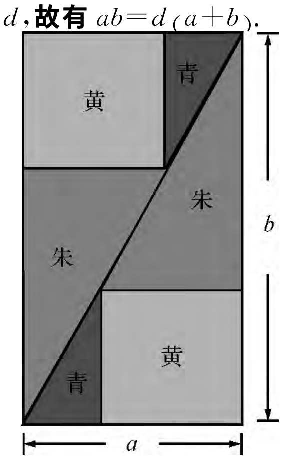

图 1

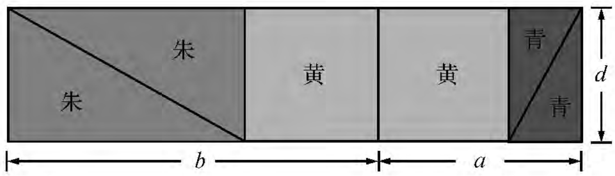

图 2

今天，人们常常顺应式地将“勾股容方”问题运用于初中数学教学中．如，用相似三角形性质解决“在一块直角三角形空地上设计一座正方形花坛”之类的实际问题．但该历史名题的教育价值远不止于此．事实上，刘徽的勾股容方图也是均值不等式的几何模型．

2　相似观点

如图 3，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=a$，$AB=b$，$a<b$．正方形 $GBEF$ 和 $HIDJ$ 分别内接于直角三角形 ABC 和 CDA，JH 的延长线交 GF 于 K．注意到 $AH:CH=CF:AF=a:b$，故知 $AH<CH$，$CF<AF$．因此，当 $a<b$ 时，直角三角形 HKF 总是存在的．于是，

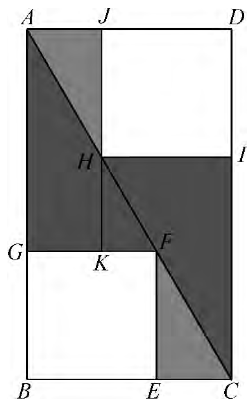

图 3

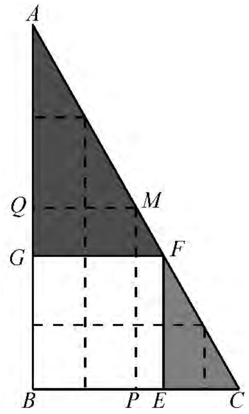

图 4

$$HK=b-\frac{2ab}{a+b},\quad KF=\frac{2ab}{a+b}-a$$

因直角三角形 HKF 与直角三角形 ABC 相似，

$AB>BC$，故 $HK>KF$，于是有

$$b-\frac{2ab}{a+b}>\frac{2ab}{a+b}-a$$

由此得不等式

$$\frac{4ab}{a+b}<a+b$$

或即

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2<ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

故得均值不等式

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2} \qquad (2)$$

3　函数视角

设内接于直角三角形 ABC、且与直角三角形具有一个公共直角的长方形的长为 x，则其面积为

$$S(x)=x\left(b-\frac{bx}{a}\right)=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{ab}{4}$$

易知，当 $x=\frac{a}{2}$ 时，$S(x)$ 最大．如图 4，设 M 是 AC 的中点，MQ 和 MP 分别垂直于 AB 和 BC，则 $QBPM$ 是直角三角形 ABC 的面积最大的内接长方形，其面积为 $\frac{1}{4}ab$．因此有：

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2<\frac{1}{4}ab \qquad (3)$$

由此同样可得不等式(1)或(2)．

4　三角比值

在刘徽的勾股容方图中，如果我们连接 BF，并且作 $BR\perp AC$，垂足为 R，如图 5 所示．易知

$$BF=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b},\quad BR=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

设 $\angle BFR=\theta$，则有

$$\sin\theta=\frac{BR}{BF}=\frac{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}}$$

$$=\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{\frac{a^2+b^2}{a+b}},$$

$$\sqrt{1-\cot^2\theta}=\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{\frac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}}.$$

因 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<1$，$0<\sqrt{1-\cot^2\theta}<1$，由此即得 a、b 的调和中项、几何中项、算术中项、均方根、反调和中项之间中项之间的大小关系

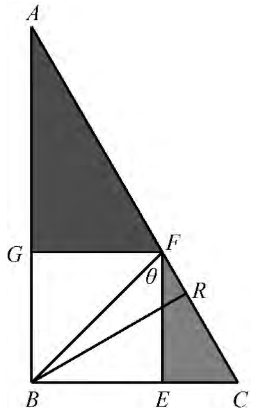

图 5

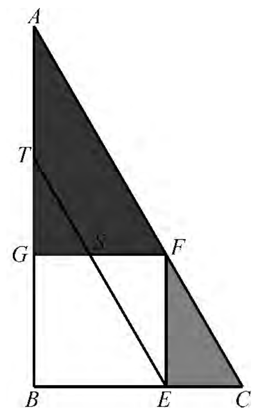

图 6

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\frac{a^2+b^2}{a+b} \qquad (4)$$

5　转换视角

让我们换一种视角来考察刘徽的勾股容方图．如图 6，设 $EC=a$，$AG=b(a<b)$，则 $EF=GF=\sqrt{ab}$．过点 E 作 CA 的平行线，分别交 GF 和 AG 于 S 和 T．易知，$SF=EC=a$，$AT=EF=\sqrt{ab}$．故有 $GS=\sqrt{ab}-a$，$TG=b-\sqrt{ab}$．因直角三角形 TGS 与直角三角形 AGF 或 FEC 相似，又由 $a<b$ 知 $EC<EF=GF<AG$，故得 $GS<TG$，即

$$\sqrt{ab}-a<b-\sqrt{ab} \qquad (5)$$

这就是均值不等式(2)．

类似地，如图 7，过点 F 作 GE 的平行线，交 AB 于 Y，交 BC 的延长线于 X；过 C 作 BC 的垂线，交 FX 于 W．因 $CE<BE$，故 $CF<AF$，从而得 $WC<AY$．这就是不等式(5)．

不等式(5)亦可直接由比例性质得到：由 $\frac{\sqrt{ab}}{a}=\frac{b}{\sqrt{ab}}$ 得 $\frac{\sqrt{ab}-a}{a}=\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$，再由 $a<\sqrt{ab}$，即得(5)．这种推导方法可以上溯到古希腊阿基米德的

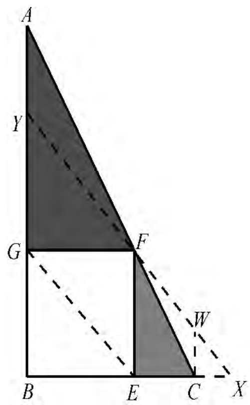

图 7

著作中[2].

6　梯形模型

转换视角之后，我们还可以通过梯形来考察均值不等式．如图 8，仍设 $EC=a$，$AG=b(a<b)$．过点 C 作 BC 的垂线 CU，过点 A 作 AB 的垂线 AV，分别交 GE 和 EG 的延长线于 U 和 V．过 AC 的中点 M 作 BC 和 AB 的平行线，分别交 UV 于 N、L．由于 $CE<BE$，故 $EU<GE$．在梯形 $CAGU$ 中，ML 是中位线，$ML=\frac{a+b}{2}$，由 $FE<ML$ 即得均值不等式(2).

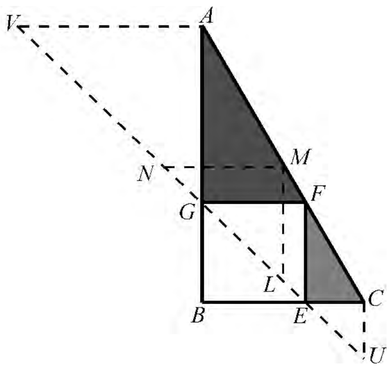

图 8

类似地，在梯形 $CAVE$ 中，由 $GF<NM$，亦得均值不等式(2).

7　若干启示

从勾股容方图出发，我们得到了探究均值不等式的多种几何方法．这样的探究有着诸多启示．

(1)数学史为学生提供了探究的机会，古老的"勾股容方图"展示了数学史的这一教育价值．历史上的数学问题可以成为课堂上探究的起点；站在古人的肩膀上，必能有所创新．

(2)带着 HPM 的眼光去阅读数学历史文献时，这些文献将不再是过时的、冷冰冰的陈列品，而是鲜活的、生动的、充满教育意蕴的思想养料．因此，HPM 可以引领我们找到新的研究课题．

(3)言"有"易，说"无"难．数学的历史是一座宝藏，其中所蕴含的教学资源取之不尽、用之不竭．如果轻率地断言："除了某某方法，不再有别的方法"，那么很可能是大错特错的．对于均值不等式而言，区区一个"勾股容方图"尚能提供如此多样的方法，数千年以来人类智慧之宝库、浩如烟海的数学历史文献，其中又该含有多少精彩的方法呢？历史开阔我们的视野、涤荡我们的心胸，教会我们宽容、审慎和谦卑．

参考文献

1　郭书春．汇校九章算术[M]．沈阳/台北：辽宁教育出版社/九章出版社，2004

2　汪晓勤．关于均值不等式的历史注记[J]．中学教研(数学)，2005，10：47－48

(上接第 6 页)

问题特别注意反映真实的现实问题，而且丰富、有趣．因此，如何使我们的统计与概率教学赶上世界先进水平是一个急需解决的问题．我们应特别关注如何加强统计思想、数据分析观念，使学生掌握基本的数据收集、整理、分析的技能，同时要加强统计与概率的综合，使学生掌握用概率知识研究随机现象的基本方法，并能用于解决一些实际问题等．某种意义上说，在中学数学课程中，统计与概率更多地扮演了"联系""综合""问题解决""实际应用"等角色，这样的特点需要关注．

本文所展示的研究非常粗浅．坦率地说，我们对统计与概率的知识储备水平不高，因此本研究一定是挂一漏万，而且会存在错误，敬请大家批评指正．愿我们一起为提高我国统计与概率的教学水平作出更大的努力．

参考文献

1　张奠宙主编．中学数学教学全书(数学卷)[M]．上海：上海教育出版社，1996，12：336

2　刘绍学主编．普通高中课程标准实验教科书·数学必修 3(A 版)[M]．2 版．北京：人民教育出版社，2007，2

3　刘绍学主编．普通高中课程标准实验教科书·数学必修 3 教师教学用书(A 版)[M]．3 版．北京：人民教育出版社，2007，4

4　章建跃等．美国高中数学核心概念图[J]．课程·教材·教法，2013，11：115—121

5　中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准(实验)[S]．北京：人民教育出版社，2013