初中 HPM 课例中的数学文化内涵分析

林庄燕，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，200062）

摘　要：基于知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐、多元文化这五个维度的分类框架，选取2014年—2018年发表的12个初中HPM课例，分析它们体现了哪些数学文化内涵。得到结论：HPM课例经常使用“知识源流”与“多元文化”维度的数学文化元素，很少使用“社会角色”“审美娱乐”和“学科联系”维度的数学文化元素。提出建议：深入开展教育取向的数学史文献研究；夯实HPM的理论基础；不脱离学校数学教育的现实，开发HPM课例。

关键词：HPM课例　数学文化内涵　分类框架

丹麦学者Jankvist认为，数学史既是数学教学的工具，又是数学教学的目标。实践表明，将数学史融入数学教学（HPM），可以揭示知识之谐，呈现方法之美，营造探究之乐，达成能力之助，展示文化之魅，实现德育之效。

近年来，将数学史融入数学教学日益受到一线教师的关注和推崇，不少HPM课例被开发了出来。但是，在应试背景下，很多教师对数学史的工具性价值（如“知识之谐”“方法之美”等）比较重视，而对数学史的目标性价值（如“文化之魅”等）关注较少。

笔者之一曾经撰文根据已有的关于数学史教育价值的理论探讨，结合《普通高中数学课程标准（2017年版）》提出的课程目标，建立了“基于数学史的数学文化内涵”分类框架。这个框架包含知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐、多元文化五个维度。“知识源流”是指某个知识点的历史发展过程以及相关的人物、事件、思想等；“学科联系”是指数学与其他知识领域（科学技术、社会科学、人文艺术等）

之间的关联；“社会角色”是指数学对人类文明进步、社会发展所起的重要作用；“审美娱乐”是指数学的美和趣味；“多元文化”是指不同文明、不同地域在同一数学课题上的成就和贡献。

下面，我们尝试基于上述框架，选择一些初中 HPM 课例，分析它们体现了哪些数学文化内涵，有何特点与不足，以期为未来 HPM 课例的研究以及关于数学文化内涵的进一步探讨，提供有益的启示。

一、课例的选取

我们选取了 2014 年—2018 年发表的 12 个初中 HPM 课例作为研究对象。这些课例大多由 HPM 学习共同体开发。各个课例扼要的教学过程如下：

《字母表示数》课例通过古埃及数学问题引入，让学生设未知数，列一元一次方程；再通过丢番图的二元一次方程组问题，提出“字母表示任意数或一类数”的思想；最后通过火柴棍搭正方形问题，进一步巩固“字母表示任意数或一类数”的思想。

《反比例函数》课例通过《太上感应篇》中的故事，引出称重活动，揭示重物、砝码、力臂之间的关系，从而引入反比例函数概念；再以问题串的形式，让学生辨析反比例函数概念；最后设计 3 个不同类型的练习题，进一步帮助学生巩固对概念的理解和掌握。

《三角形内角和》课例通过“泰勒斯拼地砖”的故事引入，通过三角形拼图活动，让学生自主探究并发现三角形的内角和性质；再引导学生用严谨的方法进行说理；最后改编美国早期几何教科书中的问题，丰富和强化学生对三角形内角和性质的理解与应用。

《平方差公式》课例通过佃户租地的故事，引出平方差公式；再用赵爽的“面积割补法”，证明公式；在巩固练习之后，提出丢番图的二元二次方程组问题，借助“和差术”，利用平方差公式加以解决。

《分数指数幂》课例先让学生通过类比，猜想得到 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；再通过 4 道思考题，让学生体会分数指数幂与方根之间的关系，引出分数指数幂与根式之间的一般关系；最后展示分数指数幂符号的演进过程，并设计两道以数字为底的常规题目和两道以字母为底的历史素材问题作为练习。

《一元二次方程的配方法》课例先引导学生复习开平方法；再改编花拉子米的方程问题，引导学生认识代数意义上的“配方”对应于几何意义上的“将长方形割补成正方形”；最后让学生探究古巴比伦的一元二次方程（一次项为负）的几何解法。

《邻补角、对顶角》课例首先通过“如何测量墙角线的夹角”问题，引出邻补角和对顶角概念；接着利用视错觉图，揭示“仅凭观察得到的结论未必可靠”的道理，让学生对“对顶角相等”进行说理；然后通过视频，讲述泰勒斯的故事以及说理的历史背景；最后让学生运用新知解决问题。

《演绎证明》课例首先结合生活实例，引入数学证明；接着通过回顾“对顶角相等”的证明，让学生感知数学中的演绎证明；然后播放视频，让学生了解证明的由来，并认识泰勒斯、欧几里得和《几何原本》；最后让学生证明三角形内角和定理。

《三角形中位线定理》课例首先通过四等分三角形土地问题，引出中位线概念；接着让学生通过实验操作，猜想中位线性质；然后让学生用多种方法，对性质进行证明；最后通过视频，介绍中位线定理的历史。

《实数的概念》课例通过 A4 纸长宽之比问题的探究，引入$\sqrt{2}$；再通过求近似值的计算，体验$\sqrt{2}$是无限不循环小数，从而建构无理数的概念；最后播放视频，回溯无理数的历史。

《完全平方公式》课例通过“已知正方形面积，求边长”的问题引入；再设计“从符号表征下的公式推导到图形表征下的公式解释”和“从和的平方到差的平方”的探究过程；最后通过例题和练习，让学生理解和掌握公式。

《等腰三角形的性质》(第一课时)课例首先利用古罗马时期的墓碑，设置问题引入；接着利用等腰三角形纸片，让学生通过观察、操作，猜想等腰三角形的性质；然后让学生通过推理，论证等腰三角形的性质；最后让学生复原古人测山高的方法。

二、数学文化内涵的分析

(一)知识源流

HPM课例的基本特点就是，借鉴数学知识发生、发展的过程，运用相关的历史素材，引导学生进行数学学习。因此，“知识源流”是数学文化内涵的基础维度。这一维度可以进一步分为人物与事件、概念与术语、问题与求解、命题与证明、工具与符号等子维度。12个课例都涉及这一维度，进一步看，都涉及人物与事件子维度，部分涉及其他子维度。具体如下：

《字母表示数》课例涉及丢番图用字母表示未知数，以及古埃及的一元一次方程问题、丢番图的二元一次方程组问题(属于问题与求解子维度)。

《反比例函数》课例涉及欧几里得定义反比例，以及“反函数”一词中“反”的含义(属于概念与术语子维度)。

《三角形内角和》课例涉及泰勒斯发现三角形内角和定理，以及美国早期几何教科书中的问题(属于问题与求解子维度)和毕达哥拉斯学派、欧几里得、克莱罗、美国早期几何教科书给出的不同证明(属于命题与证明子维度)。

《平方差公式》课例涉及赵爽证明平方差公式，以及丢番图的二元二次方程组问题(属于问题与求解子维度)和面积割补法(属于命题与证明子维度)。

《分数指数幂》课例涉及斯蒂菲尔将幂指数从非负整数推广到负整数，沃利斯将正整数幂的运算推广到任意有理数幂，以及沃利斯和欧拉的有关分数指数幂的问题(属于问题与求解子维度)和分数指数幂符号的历史(属于工具与符号子维度)。

《一元二次方程的配方法》课例涉及花拉子米用几何方法解一元二次方程，以及花拉子米的一元二次方程及其几何解法(属于问题与求解子维度)。

《邻补角、对顶角》课例涉及泰勒斯开创演绎证明之先河，以及演绎证明的必要性、泰勒斯关于“对顶角相等”的证明(属于命题与证明子维度)。

《演绎证明》课例涉及《几何原本》奠定数学证明模式，以及欧几里得关于“三角形内角和”和“对顶角相等”的证明(属于命题与证明子维度)。

《三角形中位线定理》课例涉及欧几里得用面积方法证明平行线分线段成比例定理(三角形中位线定理为其特殊情形)，以及古巴比伦泥板记载的土地分割问题(属于问题与求解子维度)和刘徽的“出入相补法”(属于命题与证明子维度)。

《实数的概念》课例涉及毕达哥拉斯学派发现无理数，以及无理数的辞源(属于概念与术语子维度)和根号的历史(属于工具与符号子维度)。

《完全平方公式》课例涉及刘徽用几何方法解释开方法，以及“已知正方形面积，求边长”的问题(属于问题与求解子维度)和完全平方公式的几何证明(属于命题与证明子维度)。

《等腰三角形的性质》(第一课时)课例涉及古埃及和古罗马人使用水准仪，以及16世纪的测山高问题(属于问题与求解子维度)和

水准仪(属于工具与符号子维度)。

(二)学科联系

数学史告诉我们,数学与其他学科(自然科学、人文科学、社会科学)之间有着紧密的关联。这种关联正是数学文化的内涵之一。12 个课例中只有 2 个课例涉及这一维度。具体如下:

《反比例函数》课例的新课引入环节,教师讲述了我国古代的劝善书《太上感应篇》中记载的一个关于杆秤的故事:“明朝万历年间,扬州有一家大南货店,店主在临死的时候吩咐儿子说:‘我平生起家,全靠这杆秤。这杆秤乃是乌木合成,中间空的地方藏有水银,称出的时候,就将水银倒在秤头,称入的时候,就将水银倒在秤尾。这样入重出轻,就是我致富的原因。但是,目前竞争激烈,也只能惨淡经营。希望你更加努力,争取扭转局面。’”从而引出问题:店主究竟是怎样“入重出轻”的?他这样做的利和弊是什么呢?利用杆秤的故事和天平实验引出反比例函数概念,体现了数学与物理之间的密切联系。

《演绎证明》课例中,教师用博物学家达尔文(C. R. Darwin,1809—1882)的故事来说明演绎证明的意义:“有一个农场主,他的猪总是养不胖,因此他忧心忡忡。这件事被达尔文知道了,他告诉农场主:多养猫,猪就会胖起来。理由是猫吃田鼠,多养猫便少田鼠;田鼠吃土蜂,少田鼠便多土蜂;土蜂传播三叶草,多土蜂便多三叶草;猪吃三叶草,多吃三叶草,猪便会胖起来。”这段史料看上去与数学无关,是在讲生物学中关于食物链的故事,但是关于食物链的推理实例有助于学生对逻辑推理的理解和对证明作用的领会。这说明了演绎证明不仅仅局限于数学学科,也体现了数学与生物学的联系。

(三)社会角色

数学对人类文明的进步、社会的发展有着重要的作用,数学文化中的“社会角色”就是指数学的应用价值。12 个课例中只有 4 个课例涉及这一维度。具体如下:

《三角形内角和》课例中,教师设计“泰勒斯拼图”活动,再现三角形内角和的发现过程:公元前 6 世纪,古希腊思想家、哲学家泰勒斯在装修房子时发现了一个非常有趣的事实:六块同样的正三角形地砖恰好铺满某一点的四周,而不重叠,也不留任何缝隙。这就表明,大小相同的六个角相加恰好等于 360°,其中三个角相加恰好等于 180°。泰勒斯发现三角形内角和的过程,让学生感受到数学知识来源于生活,数学的应用无处不在。

《平方差公式》课例中,教师将发生在古希腊的欺骗性土地分配事件改编为“庄园主与佃户”的故事来引入:“从前,有一个狡猾的庄园主,把一块边长为 $a(a>5)$米的正方形土地租给佃户张老汉。第二年,他把这块土地的一边减少 5 米,相邻的另一边增加 5 米,继续租给张老汉,租金不变。”教师引导学生通过比较边长变化前后的土地面积来判断张老汉是否吃亏。由此可见,数学与现实生活息息相关。

《三角形中位线定理》课例中,教师利用古巴比伦泥板记载的六兄弟分割三角形土地的问题,巧妙设计了“四兄弟分土地”问题的情境:“在古巴比伦两河流域,有四兄弟相安无事地生活着。直到一天,他们的父亲去世打破了这一平静,四兄弟为了分割父亲留下的一块土地而争论不休。”教师让学生设计方案解决四兄弟的矛盾,由此感受数学在现实生活中的应用价值。

《等腰三角形的性质》(第一课时)课例中,教师展示了古代埃及和古巴比伦通过生活经验的积累制作的由一个等腰三角形及悬挂在顶点处的铅垂线组成的水准仪(如图 1),并指出:“土地丈量员在测量时调整底边的位置,如果铅垂线经过底边终点,就表明底边垂

直于铅垂线，即底边是水平的。我们从中就可以发现这实际上运用到了等腰三角形三线合一的性质。”此外，教师还展示了 17 世纪意大利数学家博默多罗的《实用几何》一书中的一幅插图（如图 2），并指出：“文艺复兴时期，水准仪这种工具也被广泛地运用着，那个时代的测量员正是利用水准仪来测量山的高度。”由此，深刻体现了数学的“社会角色”。

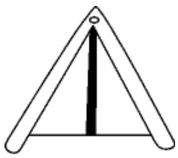
图 1

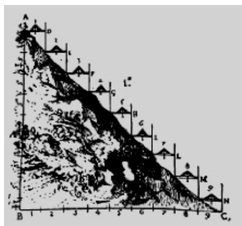
图 2

（四）审美娱乐

数学史告诉我们，促进数学发展的不仅有实际应用，还有智力上的好奇以及美学和趣味上的娱乐。英国哲学家和数学家罗素（W. Russell，1872—1970）说过：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高的美。”数学美包括简洁美、对称美、奇异美和统一美等。12 个课例中只有 4 个课例涉及这一维度。具体如下：

《字母表示数》课例中，教师给出了古埃及时期莱因德纸草书上的一个问题：“一个量，加上它的$\frac{2}{3}$，它的$\frac{1}{2}$和它的$\frac{1}{7}$，等于 33，求该量。”让学生感觉到现行符号语言的简洁之美。

《平方差公式》课例中，教师将古希腊丢番图的《算术》中的一个问题作为例题：“已知两正数和为 20，积为 96，求两数。”由于学生没有学过一元二次方程，教师采用丢番图的“和差术”解决：假设所求两数分别为 $10-x$ 和 $10+x$，则 $(10-x)(10+x)=96$，即 $10^2-x^2=96$，故 $x=2$，故所求两正数分别为 12 和 8。这展示了数学解题方法的对称之美。学生或许会困惑为什么将两数设为 $10-x$ 和 $10+x$，但从解题过程中可以看到“和差术”的方法对于简化计算的优势。

《分数指数幂》课例中，教师展示了分数指数幂的符号在 14 世纪—17 世纪这 300 余年来的发展过程，如图 3 所示。学生感觉到符号的形式越来越简洁、直观。

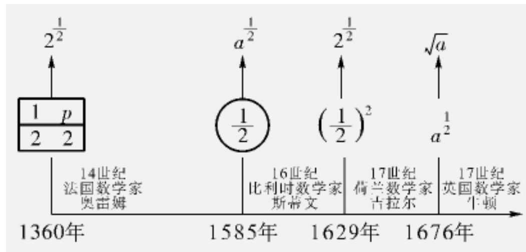

图 3

《邻补角、对顶角》课例中，教师通过视错觉图形（如图 4），告诉学生“仅凭观察得到的结论未必可靠”的道理，让学生感觉数学的奇异之美。实际上，早期几何教科书为了说明演绎证明的重要性，常常使用这类图形：图 5 就是关于直线位置关系的两种视错觉图形。

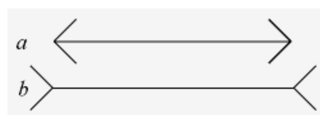

图 4

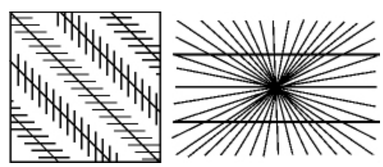
图 5

（五）多元文化

数学史上，任何概念、公式、定理或问题都不是某一个数学家，也不是某一个国家或地区的专利，不同时代、不同文明、不同地域的数学家都可能做出各自的贡献（如问题的提出、公式的推导、定理的证明、符号的创造等等）。因此，“多元文化”是数学文化的重要

内涵。12 个课例中有 9 个课例涉及这一维度。举例如下：

《一元二次方程的配方法》课例中，教师引导学生经历配方法的产生过程，重新发现古埃及祭司、古巴比伦祭司、古希腊数学家欧几里得（公元前 3 世纪）、《九章算术》作者（约 1 世纪）、阿拉伯数学家花拉子米（Al－Khwarizmi，9 世纪）的几何方法，完成一次与古代数学家的“跨越时空的心灵之约”，拉近与数学的距离，感悟数学文化的魅力。

《完全平方公式》课例中，教师展示了古希腊数学家欧几里得、中国数学家刘徽（3 世纪）、古希腊数学家席翁（Theon，4 世纪）、阿拉伯数学家花拉子米、印度数学家婆什迦罗（Bhāskara，1114—1185）、意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci，13 世纪）、法国数学家韦达（F. Viète，1540—1603）等对完全平方公式的图形（几何）形式、文字形式和符号形式所做的贡献，呈现了多元文化。

三、结论与启示

由以上分析可见，很多 HPM 课例对数学文化元素的使用不够均衡，缺乏多元性：“知识源流”与“多元文化”维度的元素经常被使用，而“社会角色”“审美娱乐”和“学科联系”维度的元素很少被使用。因此，许多课例尽管采用了 HPM 的视角，但实际上其“文化味”是不足的。究其原因，除了本文开头所说的应试背景之外，还可能受以下三种因素的制约：

一是教师在数学文化内涵认识上的局限性。数学史是数学文化的重要组成部分。所以宽泛地说，数学史融入数学教学就意味着数学文化融入数学教学。但事实上，教师可能只聚焦最能体现数学史内涵的“知识源流”以及自然涉及的“多元文化”，而忽视能够体现数学文化内涵的其他维度，因而影响了对历史素材的选择和运用。

二是教师所掌握的数学历史素材较少。大多数 HPM 课例所运用的历史素材都比较单一。例如，古巴比伦人在土地丈量的实践中，提出了“已知长方形面积以及长宽之差，求长和宽”问题，在没有代数符号的情况下，他们只能依靠几何方法，通过割补将长方形转化为正方形来求得长方形的宽。BBC 制作的《数学的故事》（第一集）中包含了上述内容。如果融入这一素材，那么，《一元二次方程的配方法》课例就多了数学文化的“社会角色”维度。又如，许多绘画作品，如 16 世纪意大利艺术家弗朗西斯卡（P. della Francesca，1406—1492）的《基督受鞭图》，长宽之比满足 $\sqrt{2}:1$。如果融入这一素材，那么，《实数的概念》课例就有了数学文化的“学科联系”维度（数学与艺术）。

三是数学教学的现实条件。HPM 课例都是在常规课堂中实施的，教师还需要完成常规的教学目标——这需要一定的巩固练习时间。事实上，中学数学的教学进度并不允许一节常态课中运用太多的历史素材。因此，当我们分析 HPM 课例中的数学文化内涵时，应该清楚理想和现实之间是存在差距的。

对此，我们认为，要在 HPM 课例中更深刻地体现数学文化内涵的价值，HPM 学习共同体（课例开发者）还应在以下方面下功夫：

一是深入开展教育取向的数学史文献研究。数学史是一个巨大的宝藏，可用的素材取之不尽、用之不竭。没有历史研究，HPM 课例就成了无源之水、无本之木，数学的“文化之魅”则不易呈现。为此，课例开发者首先应该拥有一定数量的数学史文献，包括原始文献和研究文献。两河流域泥板书、古埃及纸草书、东西方历代数学名著（如《九章算术》《几何原本》《计算之书》等）和历史上的数学教科书都属于原始文献。数学通史（如史密斯的《数学史》、博耶的《数学史》、伊夫斯的《数学史概论》、卡茨的《数学史通论》等）、国

别史(如希思的《希腊数学史》、刘钝的《大哉言数》、Sirinivasiengar 的《印度数学史》等)、专题史(如范德瓦登的《古代文明的几何与代数》、卡茨等的《驯服未知数:从古代到 20 世纪初的代数史》、博耶的《解析几何史》等)以及数学史论文都属于研究文献。此外,一些数学史家相继编辑了东西方的数学史原始文献,如史密斯的《数学原始文献》、斯特洛伊克的《数学原始文献:1200～1800》、福韦尔的《数学史读本》、李文林的《数学珍宝》、卡茨的《东方数学选粹》等。

二是夯实 HPM 的理论基础。在 HPM 领域,理论和实践始终保持着良性互动:课例研究为 HPM 理论的建构提供论据,而 HPM 的理论则反过来指导课例研究。根据课例分析,我们得出基于数学史的数学文化内涵的五个维度,反过来,数学文化内涵的五个维度指导我们更有针对性地对历史材料进行选择、裁剪和加工。例如,教学锐角三角函数概念时,我们可以按照数学文化的内涵选取较为丰富的历史素材。为了体现"学科联系",可以选取公元前 3 世纪古希腊天文学家阿里斯塔克斯的天文测量问题;为了体现"社会角色",可以选取美、英早期教科书中的实际测量问题(如山高测量问题、在沼泽地两端架设水管问题等);为了体现"审美娱乐",可以选取 19 世纪的数学谬论"64=65",等等。

三是不脱离学校数学教育的现实,开发 HPM 课例。在教学进度无法更改、课堂时间有限的情况下,要多维度地展现"文化之魅",融入更多的数学史素材,理想的策略是在多个教学环节中运用史料。如根据历史材料编制数学问题作为例题或练习题,制作简短的 HPM 视频,等等。

参考文献:

[1] Jankvist, U. T.. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009(71).

[2] Wang, X., Qi, C., Wang, K.. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study[J]. *Science & Education*, 2017(26).

[3] 孙洲. HPM 视角下的"字母表示数"教学[J]. 数学教学,2017(6).

[4] 王进敬,栗小妮."反比例函数":实验重构数学史,故事凸显价值观[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(6).

[5] 唐秋飞."三角形内角和":在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2015(7).

[6] 李玲,顾海萍."平方差公式":以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2014(11).

[7] 汪晓勤,叶晓娟,顾海萍."分数指数幂":从历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2015(4).

[8] 沈志兴,洪燕君."一元二次方程的配方法":用历史体现联系[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2015(10).

[9] 顾海萍,孙丹丹. HPM 视角下的"邻补角、对顶角"教学[J]. 中学数学月刊,2018(9).

[10] 贾彬,栗小妮. HPM 视角下的"演绎证明"教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2018(5).

[11] 张莉萍,栗小妮. HPM 视角下的"三角形中位线定理"的教学[J]. 数学教学,2018(7).

[12] 宋万言,栗小妮."实数的概念":折纸、拼图中发现,计算、比较中建构[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(8).

[13] 栗小妮,沈中宇."完全平方公式":从历史中找动因、看形式[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2018(3).

[14] 汤雪川,栗小妮,孙丹丹."等腰三角形的性质":从历史中找应用,看证明[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2018(11).