上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2018 年第 7 卷第 3 期

刊首语

教育部《关于 2017 年普通高考考试大纲修订内容的通知》要求“充分发挥高考命题的育人功能和积极导向作用”，并提出“在数学试题中增加数学文化的内容”。由此，数学文化高考题成为高考试卷中一道靓丽的风景线，渗透人文素养，弘扬中国传统文化，体现数学育人价值。2018 年，新鲜出炉的北京、上海、浙江等地的高考题中，可以发现数学文化的身影，现一一列举赏析如下。

试题 1 （2018 年北京理科卷第 4 题）“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献。十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$。若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为（　　）

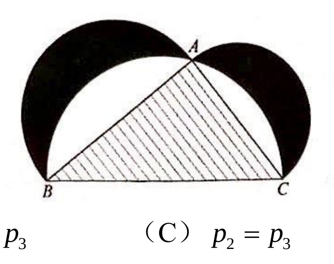
（A）$\sqrt[3]{2}f$　　　　（B）$\sqrt[3]{2^2}f$

（C）$\sqrt[12]{2^5}f$　　　　（D）$\sqrt[12]{2^7}f$

题源：朱载堉是明代杰出的乐律学家，首创“十二平均律”理论，解决音乐的“旋宫转调”问题，该理论在中国乃至世界音乐史上都具有极高的理论价值。在其律学研究中，他认识到律学与音乐的相互性，考证律历合一的思想，综合概括自然界音律所表现的规律性，可任意自由转调，创立“十二平均律”。他在1581年发表的《律历融通》中称十二平均律“新法密率”；在1584年发表的《律学新说》中提到了计算方法；在1596年的《律吕精义》中公布了详细的计算方法。

本题再现式地呈现十二平均律中的科学方法，并自由式地改编，将明代的半音比例运用于等比数列以及幂运算，凸显科学的真善美，既而体现音数之玄妙，彰显文化之魅。

试题 2（2018 年全国理科卷 I 第 10 题）下图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC，$\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为I，黑色部分记为II，其余部分记为III，在整个图形中随机取一点，此点取自I，II，III的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则（　　）



（A）$p_1=p_2$　　（B）$p_1=p_3$　　（C）$p_2=p_3$　　（D）$p_1=p_2+p_3$

题源：本题图形为希波克拉底（Hippocrates，约公元前 460~前 370 年）月牙形，源于人们在解决“化圆为方”问题时，发现某些除圆以外奇妙的曲边图形的面积会和某个多边形面积相等。他首先发现了如下的结论：“以直角三角形两直角边向外作两个半圆，以斜边

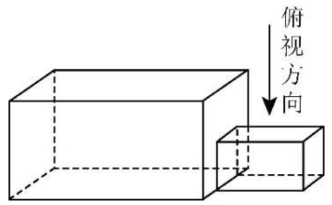
向内作半圆，则三个半圆所围成的两个月牙形（希波克拉底月牙）面积之和等于该直角三角形的面积。”本题以希波克拉底定理为情境，自由式地提出问题，巧妙地将面积问题转化为概率问题，渗透化圆为方思想。

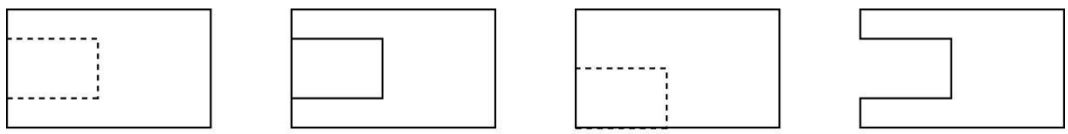
试题 3（2018 年全国理科卷Ⅱ第 8 题）我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果。哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$。在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{1}{14}$　　（C）$\frac{1}{15}$　　（D）$\frac{1}{18}$

题源：哥德巴赫猜想因其形式简单，内容通俗易懂且内涵深刻，被列为近代数学史三大数学猜想之一。该猜想源自 1742 年 6 月 7 日哥德巴赫给欧拉的信中的一个命题：“任何大于 5 的奇数都是三个素数之和。”欧拉回信说这个命题看来是正确的，但他也无法给出严格的证明。同时，欧拉又提出了另一个命题：任何一个大于 2 的偶数都是两个素数之和。本题基于哥德巴赫猜想，自由式地提出问题，对概率计算公式进行了考察。

试题 4（2018 年全国理科卷Ⅲ第 3 题）中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫棒头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是棒头。若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是（　　）





A　　B　　C　　D

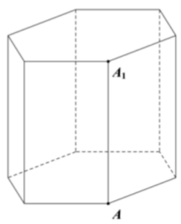
题源：榫卯，是古代中国建筑、家具及其它器械的主要结构方式，在力与力相互平衡的状态下，完美地构建出一个空间结构。而榫卯也因其功能专一性与形态多样性而最大可能地满足家具设计领域。本题以中国古建筑为背景，源于棒头与卯眼的几何图形，自由式地提出问题，对三视图进行了考察。

试题 5（2018 年浙江卷第 11 题）我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题：“今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱，买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？”设鸡翁，鸡母，鸡雏个数分别为 x，y，z，则 $\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100, \end{cases}$ 当 $z=81$ 时，$x=$__________，$y=$__________。

题源：本题选自《张丘建算经》中的卷下三十八题-百鸡问题，是世界数学史上的著名问题。本题将古文转化为数学符号语言，将不定方程的问题特殊化，巧妙地转化为二元一次方程组的求解。然而，百鸡问题源自《张丘建算经》，而非《张邱建算经》，该题在数学史料

的科学性上略差一迟。

试题 6（2018 年上海卷第 15 题）《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马。设 AA_1是正六棱柱的一条侧棱，如图，若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点，以 AA_1为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是（　　）



（A）4　　（B）8　　（C）12　　（D）16

题源：本题源自《九章算术》“商功”章中的“阳马”。“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也”，今称为刘徽原理。在阳马术中，阳马的形状是方锥的一个角隅，而该题通过给出阳马的定义，链接式地提出问题，让学生寻找正六棱柱中阳马的个数。形式较为新颖。

纵观 2018 年的高考，史料来源大多来自中国古代传统文献，如《张丘建算经》、《九章算术》，以及中国大家的一些伟大成就，如朱载堉的“十二平均律”理论，最早用数学方法计算出半音比例，以及陈景润在哥德巴赫猜想的研究中的领先成果。而史料的类型也较为丰富，涉及几何图形、数学问题、数学命题等。这些史料能够在一定程度上弘扬中国传统文化，培养学生爱国情怀的作用。同时，2018 年的高考题体现了数学跨学科的特点，如音乐中的数学、建筑中的数学，彰显了文化之魅。而问题提出的策略，2018 年此类高考题大多采取自由式策略，基于相应史料改编，以此对相关知识点进行考察。

数学文化与高考题的结合，无疑能在一定程度上促进教师在课堂上对数学文化的渗透，提高教师与学生的数学史素养，改变数学教育对数学史“高评价、低应用”的现象。基于对 2018 年数学文化高考试题的分析归纳，也期望今后的数学命题能继续注重数学文化的渗透。有效考察学生在数学文化情境下对知识的理解，起到传播数学文化、提高学生的人文素养的作用。将立德树人真正落于实处，应不仅仅基于形式。同时，对于此类高考题的编制，应注重史料的科学性，史料素材的多样性与问题提出策略的多样性。而数学文化在高考题中的渗透，也引领与预示着数学文化与模拟题、训练系统的结合，让我们一起期待数学文化与训练系统、高考题更加绚丽的火花！

目 录

CONTENT

理论探讨

基于数学史的数学探究活动设计课例分析*

王 鑫[1] 汪晓勤[1] 岳增成[2]

（1. 华东师范大学教师教育学院，上海，200062；

2. 华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

1 引言

“探究式教学”（inquiry-based teaching）最早由美国芝加哥大学施瓦布（J. Schwab）教授在 20 世纪 50 年代的“教育现代化运动”中提出，该理论倡导学生应当像科学家一样去发现问题、分析问题和解决问题，在探究的过程中建构知识[1]。2003 年颁布的《普通高中数学课程标准》将“数学探究”列为贯穿于整个高中数学课程始终的重要内容之一[2]。自此，数学探究式教学逐渐受到我国数学教育界的关注。2017 年新颁布的《普通高中数学课程标准》仍将“数学探究”作为一条内容主线贯穿于整个高中数学课程中，明确指出：“教师要把教学活动的重心放在促进学生学会学习上，积极探索有利于促进学生学习的多样化教学方式，不仅限于讲授与练习，也包括引导学生阅读自学、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等。”[3]研究表明，在数学教学中开展探究活动有助于增强学生数学学习的动机，促进学生对数学的理解，同时也有助于培养学生更加积极的数学学习态度和数学信念，加强数学与生活、数学与社会之间的联系[4]。

福韦尔（J. Fauvel, 1951-2000）在总结数学史的教育价值时指出，数学史为学生提供了探究机会[5]。Tzanakis 和 Arcavi 则指出，通过数学史，教师可以理解“做数学”的创造性过程，认识到数学是一门不断演进、人性化的学科，而非僵化的真理系统[6]，因而数学史可以帮助教师建立动态的数学观。这种动态的数学观，正是数学探究学习的认识论基础[7]。美国数学史家和数学教育家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）曾指出，“数学史是教学的指南”[8]。实际上，一个数学主题的发生和发展过程，往往就是前人解决问题的探索和研究过程，因而数学历史为数学探究式教学提供了参照。

近年来，HPM 视角下的数学教学日益受到数学教育界的关注，教学实践中产生了许多 HPM 课例。那么，在这些课例中，教师是如何设计探究活动的？数学史在探究活动中起什么作用？本文试图通过对部分高中 HPM 课例的分析来回答上述问题。

* 本文是上海市“立德树人”数学教育教学研究基地系列论文之一。

2 分析框架

目前学术界不乏关于数学探究式教学的理论探讨，一般而言，数学探究式教学有以下几个成分[9]：

- 学生对与数学主题（如概念、方法或问题）相关的可能结果进行预测；
- 在没有教师指导的情况下，学生围绕主题进行自由探究；
- 教师通过提问或特定的探究任务，引导学生进行聚焦式探究；
- 数学主题的应用；
- 对学习进行比较、评价和反思；
- 将主题拓展至其他情境或相关主题。

美国哥伦比亚大学的西格尔（M. Siegel）教授早在 1998 年就提出了数学探究式教学的四阶段模式[10]，该模式涵盖了数学探究式教学的所有上述成分，被广泛应用于有关数学探究的研究中，具体关系见图 1。

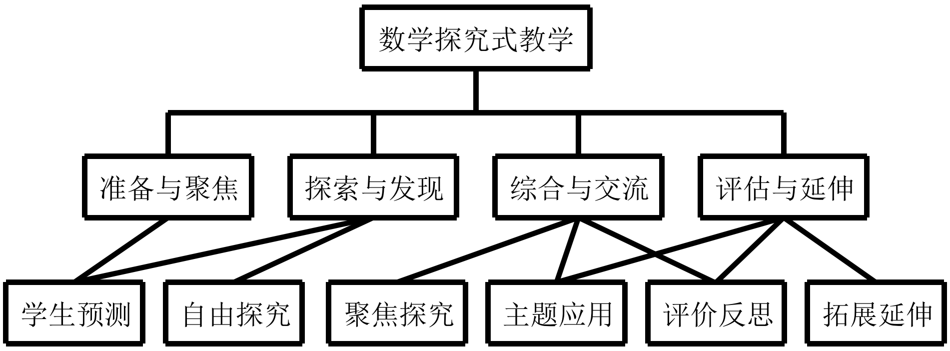


图 1 数学探究式教学四阶段与诸成分之间的关系

以下是四个阶段所涉及的具体活动。

（1）准备与聚焦：教师对活动进行介绍，唤起学生的初始想法，激活所探究主题之知识基础，并且挑战学生的原始想法，将学生的注意力聚焦在需要讨论的课题上，激发学生的学习动机，确定问题与探究的方向。

（2）探索与发现：教师鼓励学生猜想、分析、推理与试验，并经讨论后获得初步的结果。

（3）综合与交流：教师协助学生进行讨论，借由辨析、论证、研讨的过程，获得最后结果，在此过程中，学生阐述自己的想法（如运用表格、图形、证明等），回应他人的意见，教师适时引导或帮助学生得出结论。

（4）评估与延伸：教师整理、归纳学生的数学发现，对学生的学习进行比较、评价和反思，利用否定属性策略提出新问题，借以发现其他更系统化的探究问题的方法。

围绕基于数学史开展的数学探究活动，本文选取 3 个高中 HPM 课例[11-13]作为研究对象，涉及立体几何、解析几何与微积分中的基本概念。这些课例中的数学探究都与相关概念在历

史上的发生、发展过程有关，且包含了数学探究式教学的所有四个阶段。我们利用西格尔的四阶段框架，分别对四个课例中的探究环节进行分析。

3 课例分析

3.1 棱柱的概念

数学史上，棱柱定义经历了四个发展阶段[14]：

（1）欧几里得的静态定义

公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》中最早给出了棱柱的定义：“棱柱是由一些平面构成的立体图形，其中有两个面是相对的、相等的、相似且平行的，其余各面均为平行四边形。” 该定义只关注了棱柱底面及侧面的特征，在其后的两千多年里，人们一直认为欧氏定义是正确的，未曾有人提出过质疑。

（2）棱柱的动态定义

18 世纪，法国数学家瓦里格农（P. Varignon, 1654-1722）在《数学基础》中首次采用了动态定义：“若平面直线形（如 *ABF*）按照平行于自身的方向从点 *A* 移动到点 *C*，则该直线形画出一个界于两个相似且全等的图形 *ECD* 和 *ABF* 以及所有以图形 *ABF* 的边为一边的平行四边形之间的立体 *CB*，该立体称为棱柱。”如图 2 所示。

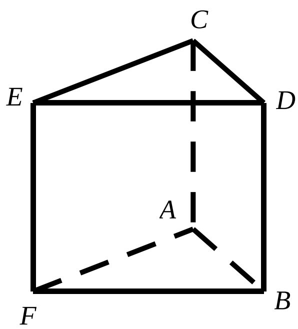


图 2 瓦里格农的棱柱动态定义

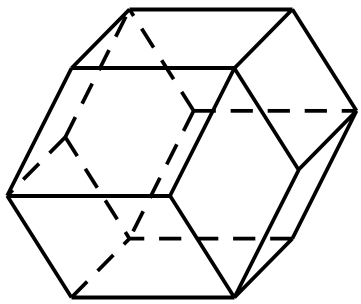


图 3 斯顿的欧氏定义反例

（3）欧氏定义的改进

舒伊勒（A. Schuyler, 1828-1913）、斯顿（J. C. Stone, 1867-1940）等进一步关注侧棱的特征，相继对欧氏定义进行了改进，其中，斯顿在其教科书中给出了欧氏定义的反例（如图 3 中的十二面体）；

（4）棱柱定义的多元化

之后，数学家们又相继给出了棱柱的多种定义，如基于棱锥的定义、基于棱的定义、基于棱柱面以及基于棱柱空间的定义，这些定义避免了欧氏定义在侧棱属性上的疏漏。

在课例“棱柱的概念”中，教师根据棱柱定义的历史设计了如下教学过程：让学生对各种空间几何体进行归类，以加深对棱柱的直观认识；从多个角度观察棱柱，给棱柱下定义；辨析定义的严谨性，必要时举出反例；改进完善并精简定义，提炼出教科书上的静态定义。

其中探究环节的具体设置如下：

（1）准备与聚焦：让学生从点、线、面等角度观察棱柱，尝试用自己的语言来定义棱柱。学生给出的定义大多与欧氏定义如出一辙，如“两个底面是平行且全等的多边形，侧面都是平行四边形的多面体叫做棱柱。”教师针对上述定义提出问题：该定义是否严谨？是否真正刻画了棱柱的本质特征？

（2）探索与发现：学生对欧氏定义的严谨性进行考察和分析，经过不断尝试，构造出由两个四棱柱“拼接”而成的十面体（为凹多面体）反例①，从而证明欧氏定义是不严谨的。

（3）综合与交流：教师引导学生思考：假如欧几里得来到我们的课堂中，他对上述反例是否感到满意？学生展开激烈辩论，部分学生认为该反例不能让欧几里得感到信服，因为它可以分割成两个棱柱。教师给出斯顿的十二面体反例，学生一致认为该反例能让欧几里得

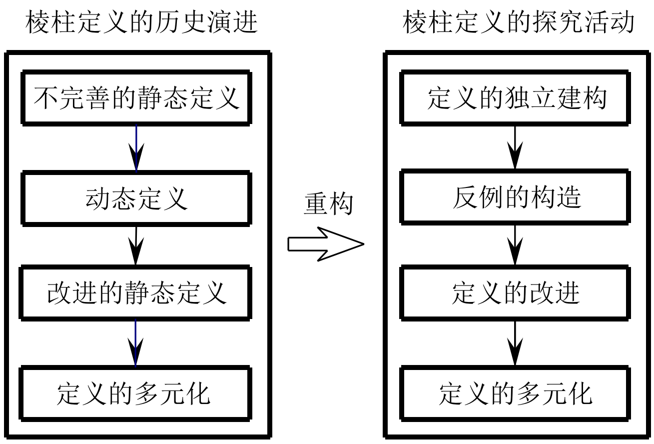


图 4 棱柱定义的历史与探究活动的设计

心服口服。最终，在教师引导下，学生对欧氏定义进行了改进，得到人教版教科书上的静态定义。

（4）评估与延伸：教师对学生给出的其他定义给予了充分肯定，如个别学生学生采用了动态定义，教师指出，该定义与法国数学家瓦里格农的定义不谋而合。最后，教师还展示了历史上棱柱的其他若干定义。

图 4 给出了棱柱定义的历史演进过程与课堂上棱柱定义探究过程的对比。

3.2 椭圆的定义

椭圆的定义经历了以下几个阶段[15][16]：

（1）截线定义

古希腊数学家最早从圆锥或圆柱的截口上发现了圆锥曲线，梅内克缪斯（Menaechmus，公元前 4 世纪）用垂直于母线的平面去截顶角分别为锐角、直角和钝角的圆锥，相应的得到

① 最近，在上海某中学实施的棱柱概念教学实验中，一名学生利用磁力片拼出了斯顿的十二面体，这说明，在提供教具的情况下，斯顿的反例对于学生来说并非不可企及。

椭圆、抛物线和双曲线。

（2）焦半径性质

阿波罗尼斯（Apollonius, 公元前 3 世纪）在《圆锥曲线》中将同一圆锥被不同位置的平面所截得的曲线定义为圆锥曲线，并用了 7 个命题才推导出椭圆焦半径之和等于常数这一性质，且已经完全脱离了圆锥。

（3）轨迹定义

法国数学家和天文学家拉希尔（P. de Lahire, 1640-1719）在《圆锥曲线新基础》中抛弃了古希腊人的截线定义，将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹（即椭圆的第一定义）。

（4）截线定义与轨迹定义的统一

1822 年，比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794-1847）利用圆锥的两个内切球，直接在圆锥上导出椭圆的焦半径性质，证明了截线定义与轨迹定义的统一性。

在课例“椭圆的定义与方程”中，教师运用发生教学法，重构历史上椭圆定义发展过程中的关键环节，设计了如下教学过程：观察在太阳照射下，球在水平地面上影子轮廓的形状，并用手电筒进行模拟实验，再用几何画板演示，抽象出数学模型；当一点在椭圆上运动时，探究其中不变的等量关系，发现椭圆的焦半径性质，进而得到椭圆的第一定义。其中探究环节的具体设计如下：

（1）准备与聚焦：教师从“阳光斜照下球在水平地面上的影子具有椭圆形轮廓”这一学生熟悉的现象出发，引导学生将该现象抽象成图 5 中的旦德林单球模型，从而得出“用平面斜截圆柱，得到的截线为椭圆”的结论。图 5 中，P 为椭圆上任意一点，椭圆与平面相切于点 F，点 P 所在母线与球相切于点 Q。教师提出问题：当点 P 在椭圆上运动时，PQ 和 PF 有怎样的关系？如何刻画椭圆的本质特征？

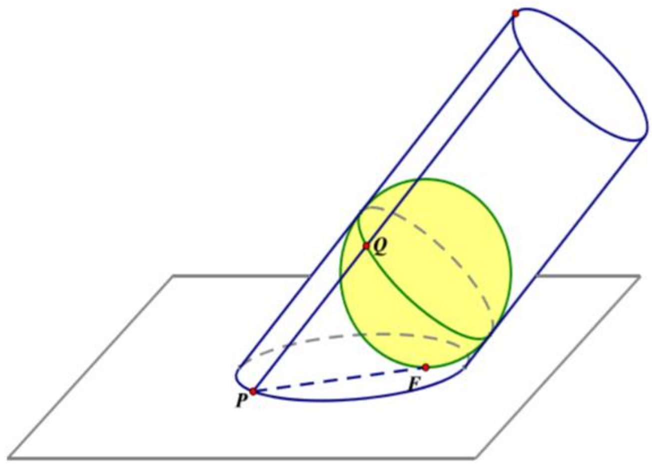


图 5 旦德林单球模型

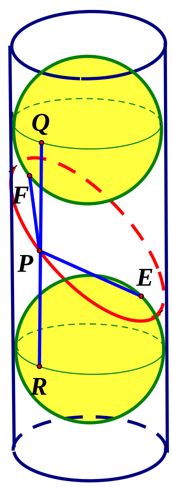


图 6 圆柱内的旦德林双球模型

（2）探索与发现：学生类比切线长定理，发现 $PQ = PF$。为了探究椭圆的性质，教师

将图 5 中圆柱面介于椭圆和球的大圆之间的部分展开成两个对称的平面图形，让学生分组拼图。学生找到三种拼图方案，并由长方形拼图方案联想到椭圆所在平面另一侧的对称的圆柱面，从而得到旦德林双球模型（图 6）。类似地有 $PR = PE$。

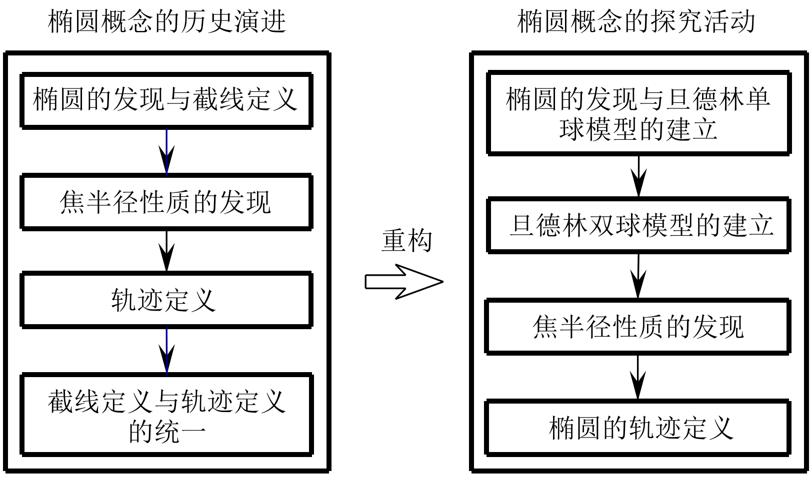


图 7 椭圆概念的历史与探究活动的设计

（3）综合与交流：教师通过几何画板让学生观察，当点 P 在椭圆上运动时，变中是否含有不变的规律？学生发现 $PF + PE = PQ + PR = QR$ 是一个定值。最后，教师引导学生得到了椭圆的第一定义①。教师指出，椭圆所在平面与旦德林双球的切点正是椭圆的焦点。

（4）评估与延伸：教师追溯椭圆定义从截线定义到轨迹定义的演进历史，让学生感悟数学概念发展过程的曲折与艰辛；对学生的发现给予积极的评价，称他们在短短 15 分钟时间内跨越了两千年的历史；同时，引导学生比较截线定义和轨迹定义的优劣，让学生理解轨迹定义对于学习解析几何思想的意义。

图 7 给出了椭圆概念的历史与课堂探究活动的对比。

3.3 导数的概念

从历史上来看，人们对切线的研究促进了导数概念的诞生。古希腊数学家对切线的认识停留在静态阶段，欧几里得、阿波罗尼斯、阿基米德（Archimedes, 287 B.C.-212 B.C.）等都将曲线的切线定义为与曲线只有一个公共点、且落在曲线外的直线。到了 17 世纪，法国数学家费马和笛卡尔将切线看作割线的极限位置，这种“逐渐逼近”的动态定义逐渐被数学家们所认可，洛必达（G. L’Hospital, 1661-1704）在《无穷小分析》中将曲线的切线定义为曲线的内接“无穷边形”一边的延长线，便集中反映了这种观点[17]。

在课例“导数的概念"中，教师由切线引入导数，让学生沿着数学发展的足迹，展开对切线定义的探索，教学过程如下：阅读章引言，了解微积分的起源及其广泛应用；探索圆和抛物线上一点处的切线定义，展现三次函数和三角函数在某些点处的切线，创造认知冲突，凸

① 这里，教师并试图去解决“满足焦半径性质的点一定在椭圆上”的完备性问题。

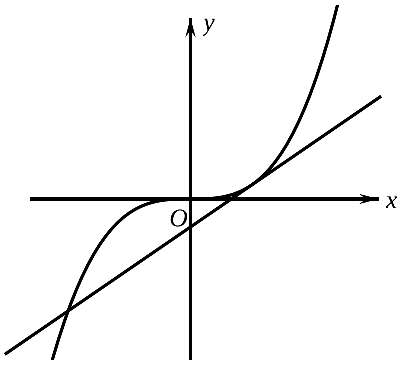
显改进切线定义的必要性；通过《几何原本》中的一个命题展现逐渐逼近的思想，得到切线的动态定义；由“形”与“数”引入导数的概念。其中探究环节的具体设置如下：

（1）准备与聚焦

让学生分组讨论并写出圆和抛物线上一点处的切线的定义，教师当场统计结果。学生的典型答案有“与圆只有一个公共点的直线”、“连圆心与圆上一点，过该点作垂直于连线的直线”,“与抛物线只有一个交点，且其上任何一个点均不在抛物线内的直线”。教师提出问题：上述切线定义是否适用于更一般的曲线？

（2）探索与发现

教师让学生聚焦三次曲线和正弦曲线。学生分别在两种曲线的不同点处尝试作切线（如图 8），发现：用“与曲线只有一个公共点的直线”或“位于曲线外部的直线”来定义切线是有局限性的，不能适用于更一般的曲线。也就是说，我们需要寻找曲线切线的更具有普适性的定义。



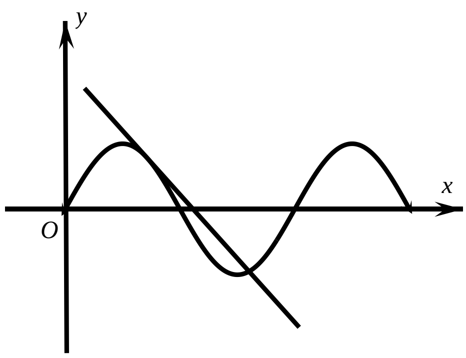


图 8 三次曲线和正弦曲线在某些特殊点处的切线

（3）综合与交流：教师借助《几何原本》卷三中有关圆的切线命题：“过圆的直径的端点作直线与直径成直角，则该直线落在圆外，且在直线和圆周之间不能再插入别的直线”（命题 16），结合图形（图 9）直观地展现逼近思想，引导学生得出圆的切线的动态定义。在此基础上，师生归纳出一般曲线的切线动态定义。

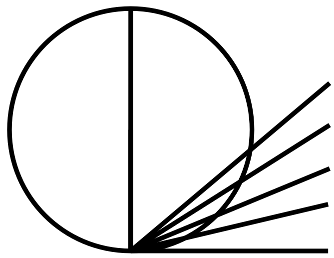


图 9 从欧氏命题到圆的切线的动态定义

（4）评估与延伸：教师指出，从静态定义到动态定义，切线概念经历了两千年的漫长历史，让学生感悟数学概念发展过程的曲折与艰辛，并感悟数学学习的历史相似性；同时，

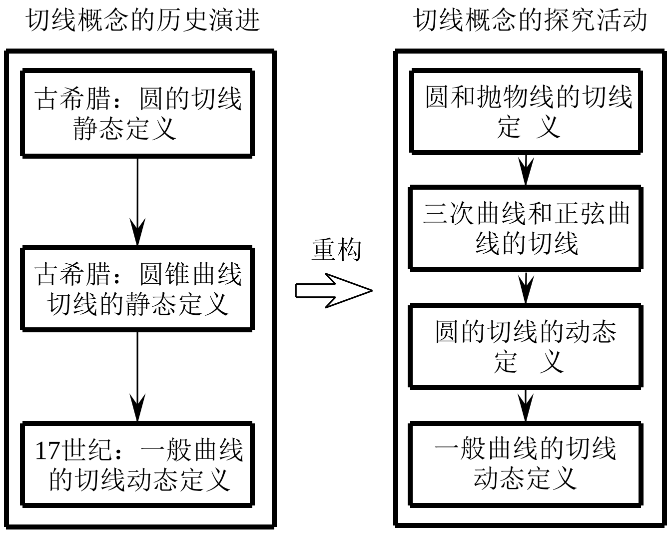


图 10 切线概念的历史与探究活动的设计

让学生思考切线静态定义和动态定义之间的差异；最后，教师对学生在探究活动中的表现给予了积极的评价。

图 10 给出了切线概念的历史与课堂探究活动的对比。

4 结 语

通过对棱柱、椭圆、导数三个概念的 HPM 课例的分析可见，总的来说，各课例所设计的探究活动均满足西格尔的探究教学四阶段。在准备与聚焦阶段，学生在教师的引导下，基于已有的认知基础，初步构建对概念意义的理解，在此基础上，教师提出问题，确定探究的目标；在探索与发现阶段，学生对他们自发给出的定义进行辨析、推理，或构造反例，或探寻性质，得到初步结论；在综合与交流阶段，教师搭建脚手架，引导学生进一步进行深入探究，最终得到严谨的概念定义，体现了弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）所倡导的“有指导的再创造”。这一阶段通过师生以及生生之间的交互，实现了历史与现实的精彩交锋。在评估与延伸阶段，教师对学生的发现做出总结、评价，并让学生进行反思，同时，让学生感悟数学的历史，并获得跨越历史的成就感，体现了“探究之乐”。但在数学思想的升华、探究方法拓展方面，诸课例还有很大的完善空间。

在基于数学史开展的数学探究活动中，一方面，教师根据数学概念的历史发展脉络来设计和实施数学探究活动，历史是教师设计课堂探究活动的重要参照；另一方面，课堂上的探究活动是历史的再现与重构，因此，数学史成了沟通历史与现实的一座桥梁，基于数学史的数学探究活动，乃是实施“再创造”的有效途径，也是 HPM 视角下数学教学的显著特点之一。

参考文献

[1] Pedaste M, et al. Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle[J]. *Educational Research Review*, 2015, 14: 47-61.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京：人民教育出版社, 2013.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京：人民教育出版社, 2018.

[4] Chin, E. et al. Analyzing changes in four teachers' knowledge and practice of inquiry-based mathematics teaching[J]. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 2016, 25(5): 845-862.

[5] Fauvel, J. Using history in mathematics education[J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.

[6] Tzanakis, C., Arcavi, A. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen（Eds.）, *History in Mathematics Education*[M], Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 201-240.

[7] 宁连华. 动态数学观：数学探究学习的本体论基础[J]. 徐州师范大学学报(自然科学版), 2006, 24(2): 46-49.

[8] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社, 2017.

[9] Chapman, O. Elementary school teachers' growth in inquiry-based teaching of mathematics[J]. *ZDM*, 2011, 43(6): 951-963.

[10] Siegel, M., et al. Supporting students' mathematical inquiries through reading[J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1998, 29(4): 378-413.

[11] 陈锋. 基于历史相似性的棱柱定义教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (05): 52-57.

[12] 陈锋, 王芳. 基于旦德林双球模型的椭圆定义教学[J]. 数学教学, 2012, (04): 5-8+40.

[13] 孙冲. 导数概念：借鉴数学史,融合数与形[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016, (7): 42-46.

[14] 洪燕君, 汪晓勤. 美国百年几何教科书中的棱柱概念[J]. 数学教育学报, 2016, 25(5): 67-72.

[15] 汪晓勤等. HPM 视角下的数学教学：以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(5): 20-23.

[16] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的[J]. 中学数学月刊, 2017, (6): 28-31.

[17] 汪晓勤, 殷克明. 高中生对切线的错误理解[J]. 数学通报, 2013, 52 (10): 14-17.

教学实践

HPM 视角下的“等腰三角形性质（第一课时）”教学*

汤雪川 [1]　　栗小妮 [2]

（1 徐汇区长桥中学，上海，200444；2 华东师范大学,上海,200062）

1　引言

等腰三角形的性质是沪教版七年级第二学期第十四章三角形的内容。在该章节中，等腰三角形的性质被安排在全等三角形的性质与判定之后，由于等腰三角形的“等边对等角”是边与角互相联系和转化的重要依据，同时也是平面几何体系中支柱性定理之一，因此教科书将其作为运用全等三角形的性质与判定进行推理论证的载体，给出了严格的说理，加强了逻辑推理的渗透，也为今后进入论证几何的定理系统打下基础。教科书从直接提出问题“等腰三角形的两个底角具有怎样的大小关系？”引入，通过学生折纸、动手操作直观地得到两底角可能相等，再让学生进行说理加以确认，然后得到“等边对等角”的结论，通过反思等边对等角的说理过程，引导学生关注等腰三角形中的特殊线段，进而得出“等腰三角形三线合一”的性质，这些性质简明地体现了等腰三角形轴对称性的内涵，从而揭示了等腰三角形的轴对称性。

在已有的教学设计中，大多数教师采用了类似教科书中的设计，从剪纸折叠引出等腰三角形的对称性和性质，侧重点略有不同。现实中任何一个事物都有形式和内容这两个侧面，虽然数学的研究对象是形式化的思想材料[1]，但是脱离其来源与根本的过分去内容化的教学不符合初中学生心理特点，数学形式和内容脱节的教学会令人感到枯燥且无用。为了增进学生的学习兴趣，同时揭示数学知识来源于生活、服务于生活，在新授课时，揭示等腰三角形性质学习的目是有必要的、有意义的。其次，利用已有的操作性经验（折纸），学生得出通过添加顶角平分线来构造全等三角形来进行说理的方式是顺理成章的，但是对于为什么不能添加底边上的高或底边上的中线？等问题，教材并未给出明确的答案。所以，我们追溯历史，寻找等腰三角形发展的历史踪迹，在 HPM 视角下设计本节课。

2　历史素材

历史上有关等腰三角形的材料主要可以分为“等腰三角形三线合一”的实际运用以及“等

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

边对等角”的若干种证明方法两大类，本文等腰三角形的性质（第一课时）只涉及“等腰三角形三线合一”的运用。

2.1 古埃及、巴比伦时期

在古代埃及和巴比伦，新庙址的测量乃是按照严格的几何和天文方法进行的，而且是法老和僧侣阶级的特权。在埃及神话里，还有专门掌管测量的女神。一些测量工具和基本的几何图形，往往成了神圣的符号而被人们用作护身符，如图 1 是埃及古墓中出土的形如测量工具的护身符。显然，这是测水准的工具[2]。

古代的水准仪由一个等腰三角形及悬挂在顶点处的铅垂线组成，如图 2 所示。测量时，调整底边的位置，如果铅垂线经过底边中点，就表明底边垂直于铅垂线，即底边是水平的。

水准仪中三角形底边猜测是用绳子做成的，绳子的中点非常容易确定，古代人通过生活经验的积累找到了这种判定水平的方法，实际用到的即是等腰三角形三线合一的性质。

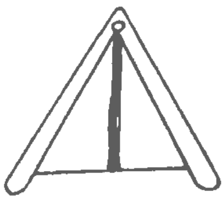


图 1

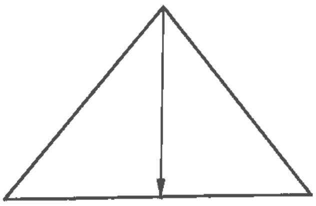


图 2

图 3

2.2 古罗马时期

图 3 为古罗马的一块墓碑。我们或许不认识墓碑上刻着的名字，也不知道长眠于地下的人生前经历了怎样跌宕起伏的人生，但从墓碑顶上的等腰三角形和中间的铅垂线可以断定，墓碑的主人是一位土地丈量员[3]。也许生前的他并不精通数学，但是他却每天都在使用着等腰三角形三线合一的性质。

2.3 文艺复兴时期

在文艺复兴时期，水准仪这种工具也被广泛的应用着。17 世纪意大利数学家博默多罗的《实用几何》一书的插图（图 4）告诉我们，那个时代的测量员正是利用水准仪来测量山的高度[3]。由于山的高度是竖直方向高度的累加，需要在斜坡上找到水平线作为每次测高的基准，因此要用到水准仪。

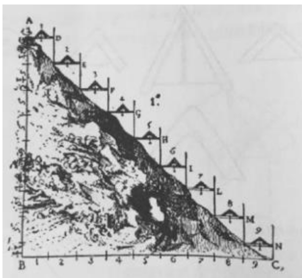


图 4

3 教学设计与实施

在了解了相关历史之后，结合教科书与学生实际情况，进行了本节课的教学设计与实施。制定教学目标如下：

（1）通过观察、操作、说理等活动，发现并归纳等腰三角形两个底角相等的性质。

（2）经历用逻辑推理方法推导等腰三角形两个底角相等的性质，体会实验归纳和逻辑推理这两种研究方法的联系与区别，感受化归、类比等数学思想。

（3）理解等腰三角形两个底角相等及等腰三角形三线合一的性质，能运用等腰三角形的性质解决有关的简单问题，发展基础性的逻辑推理能力。

（4）通过对数学史的融入，感悟数学来源于生活、数学与实际的密切联系。

3.1 引入史实，激发思考

等腰三角形性质在古代用于测量，我们基于这一史实，在数学史融入数学教学五项原则之一趣味性的指导下，利用古罗马时期的墓碑设置问题引入，激发学生求知的好奇心。而教师利用学生已知的一些工具制作的简单水准仪，吸引了学生的注意力，也引起了学生探究的欲望。

师：猜一猜图中的是什么（图 3）？有没有和数学学科相关的内容？

生：等腰三角形、铅垂线、直尺、梯形。

师：什么是等腰三角形？

生：有两边相等的三角形叫做等腰三角形。

师：等腰三角形作为特殊的三角形，其边与角有特殊的名称，分别是？

生：等腰三角形中，相等的两条边叫做腰，另一条边叫做底边，相等两边的夹角叫做顶角，另两个角叫做底角。

师：非常好！这其实是一块墓碑。图中等腰三角形和铅垂线的组合是一种测量、检验水平线（水平线：与水平面平行的直线）的工具。今天老师也模仿古人，做了一个简单的水准仪。

教师演示：取一把等腰三角形的直尺，在其底边中点上做一个记号，在顶角的顶点系上一条铅垂线，利用教具（45°三角尺与铅垂线）展示水平线与非水平线的检验。

师：这一工具究竟具体的能够做什么呢？老师先卖一个关子，带着这个疑问来进行今天的学习。本节课我们就来研究等腰三角形的性质。

3.2 类比旧知，确定方向

前面学生已经学过了平行线相关知识、三角形以及全等三角形的相关知识，有一定的几何推理基础，本环节教师通过回忆三角形相关知识的学习过程，帮助学生利用类比的方式得到研究等腰三角形性质的几个方向，感受类比的数学思想，。

师：对于普通三角形性质的研究，我们是从哪几个角度去研究的？

生：边、角、特殊线段。

师：对于特殊的三角形--等腰三角形，我们也可以类比之前的学习过程，从这几个角度去研究其特有的性质。所谓的特有性质，即普通三角形不具备的性质。

3.3 动手操作，猜想结论

七年级是实验几何阶段，学生通过观察、操作等得到直观的几何结论，并进行必要的几何推理。所有我们准备了三角形纸片作为教具，让学生通过观察（直观感受）得到等腰三角形特有的性质，为后续进行逻辑推理提供经验支撑和思考的基础。初步感受实验归纳与逻辑推理两者之间的联系与区别。

学生活动：利用课前准备好的等腰三角形纸片，观察、操作并猜想等腰三角形可能具有哪些性质。

师：等腰三角形的边有哪些特有的性质？

生：等腰三角形的两腰相等。

师：你是如何得到这一性质的？

生 1：看出来的。

生 2：用直尺量一下。

生 3：对折等腰三角形纸片，两边重合。

师：等腰三角形的角有哪些特有的性质？

生：等腰三角形的两个底角相等。

师：你是如何得到这一性质的？

生：目测、叠合、度量都能得出。

同样根据直观感受、度量或叠合，可以得出两底角相等的猜想。然后教师通过几何画板课件演示：图形在运动，等腰三角形的元素——底角和腰的大小在相应变化，但是两个底角之间、两条腰之间的等量关系没有变化，这种图形中元素与元素之间不变的数量或位置关系就是图形的性质。

3.4 归纳验证，感悟思想

通过观察、操作活动，得到结果只是第一步，眼见不一定为实，观察、操作的结果不一定正确。而且，通过度量、叠合（操作实验）不可避免的会有误差，即使我们的操作实验没有误差，也仅仅是实验验证了有限多个结果，并不能说明所有的等腰三角形（无限个）都是成立的。因此，我们可以用逻辑推理（理性认识）的方法来验证这一性质。本环节教师和学生一起通过符号语言表达等边对等角的说理，在此过程中，让学生感受实验几何与论证几何的区别。辅助线的添加体现了化归的数学思想，也为后续等腰三角形三线合一的得出提供基础。通过小故事，帮助学生初步感受循环论证的问题所在，解释为何不能使用底边上中线的方法。

师：刚才大家通过观察、操作得到的结论可以用符号语言表达为，在$\triangle ABC$ 中，已知

AB=*AC*，说明∠*B*=∠*C*。如何通过几何说理的方式说明这个结论正确呢？

生 1：取 *BC* 中点，构造三角形全等说明（图 5）。

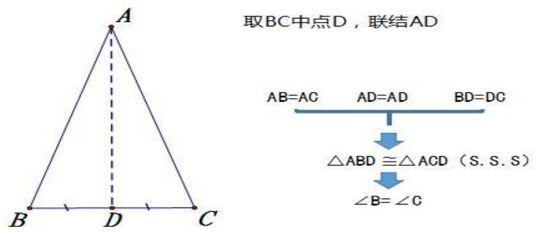


图 5

师：想出这种方法很棒！通过添加辅助线构造出可说明全等的三角形，将等角的问题转化为全等的问题。但是，老师这里有这样一个故事：瘦子问胖子：“你为什么这么胖？”胖子回答：“因为我吃得多。”瘦子又问胖子：“你为什么吃得多？”胖子回答：“因为我胖啊。”请大家想一想这里犯了一个怎样的错误？

生：形成了一个循环。

师：说理的前提就是说理的结论，成了一个循环，是无意义的，逻辑上有错误。请大家回忆我们前面在学习全等三角形的“S.S.S”判定方法时，有对这个方法进行说理吗？

生：没有。

师：其实，“S.S.S”的说理需要用到等腰三角形的底角相等。或者说，我们需要用等腰三角形的底角相等来说明“S.S.S”是正确的。因此，不能用 S.S.S 来说明等腰三角形的底角相等。

生 2：那我们可以作∠BAC 的平分线，构造全等（图 6）。

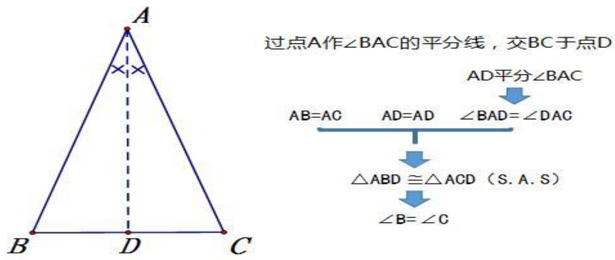


图 6

生 3：作高也可以（图 7）。

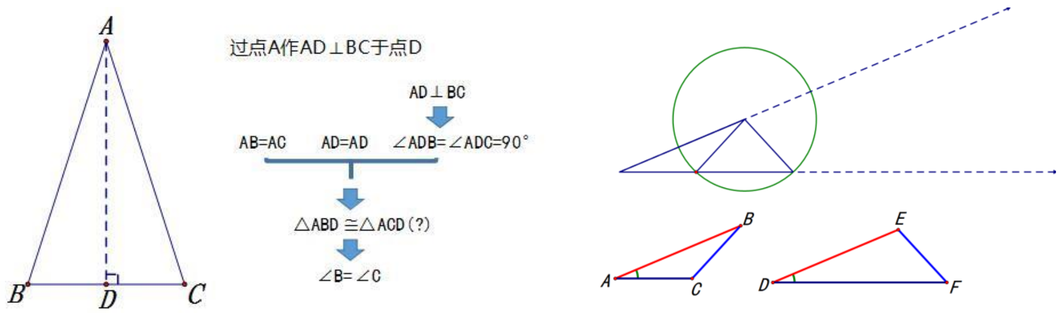


图 7

教师和学生通过作高探究后发现，要说明△ABD 和△ACD 全等，可以找到的条件是两边及其中一边的对角，教师通过几何画板课件演示告诉学生两个有两边及其一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等，但是通过改变内角度数，两个三角形是可以全等的，此时的∠C 与∠F 由原来的钝（锐）角变成了相等的直角，这是后续我们将要学习的一种特殊的判定两个三角形全等的方法，为后续学习埋下伏笔。

3.5 回顾反思，获取新知

通过前面的探究和分析，等腰三角形的第二条性质已经呼之欲出。所以，本环节教师借助前面对“等边对等角”的说理过程，和学生一起探究得出等腰三角形的第二条性质。

师：回顾刚才的说理过程，等腰三角形中，哪几条线段十分特殊，特殊在哪里？

生：高、中线、角平分线。

教师通过几何画板课件演示展示等腰三角形三线合一的过程，揭示特殊线段间不变的位置关系（图 8）。

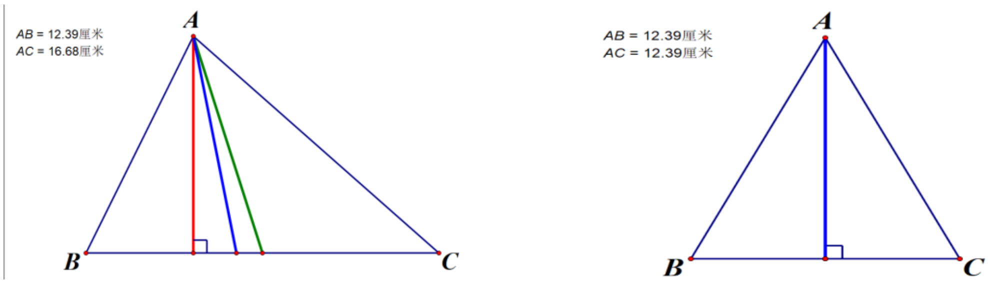


图 8

师：等腰三角形各有三条高、中线、角平分线，它们都重合吗？

生：是底边上的高、底边上的中线、顶角的平分线

师：我们得到等腰三角形的性质 2，等腰三角形的顶角平分线、底边上的高、底边上的中线互相重合。(简称“等腰三角形的三线合一”)，如何对这条性质进行说理？

教师与学生一起回顾上述在说明“等边对等角”时的三种思路，在顶角平分线的条件下，可以利用全等三角形的性质，说明顶角平分线平分底边且垂直于底边。类似的，等腰三角形底边上的中线垂直于底边、且平分顶角。等腰三角形底边上的高平分顶角和底边。最后，结合前面的折叠操作以及推理，得到等腰三角形的第三条性质。

师：等腰三角形的边、角、特殊线段都是其局部的性质，从图形整体来看，有怎样的特有性质（对称性）？

生：等腰三角形是轴对称图形。

师：其对称轴是哪条直线？有几条对称轴？

生：底边上的高所在直线，有一条对称轴。

3.6 运用新知，解决问题

本节课的教学目标之一是让学生感受等腰三角形性质在现实生活中的用途，与今日发达高科技相比，虽然这个水准仪非常简陋，但在历史上，水准仪确实曾广泛应用着，甚至成为一个人职业的象征。所以，本环节教师让学生利用刚学习的“等腰三角形三线合一”这一性质解释水准仪的原理，并介绍了历史上水准仪的用途，渗透数学应用于生活。另外，前面在探究“等边对等角”时，教师曾介绍过“S.S.S”判定三角形全等的方法需要用等腰三角形的性质来说明。所以，我们尝试改变教科书中的安排，将说明“S.S.S”判定三角形全等作为本节课的例题。

师：大家还记得我们刚上课时看到的那个墓碑吗？我们不认识墓碑上刻着的名字，也不知道这位长眠于地下的人，生前经历了怎样的跌宕人生，但从墓碑顶上的等腰三角形和中间的铅垂线，我们可以猜测他其实是一位土地丈量员。在文艺复兴时期，这种工具也被广泛的应用着。17 世纪意大利数学家博默多罗的《实用几何》一书的插图（图 4）告诉我们，那个时代的测量员正是利用水准仪来测量山的高度。你能用所学的知识，猜猜博默多罗是如何测量山高的吗？

生：先把水准仪放在山脚处，使底边的一个端点贴在山上某点。我还需要一个铅垂线，系在另一个端点上，使铅垂线指向山脚最低处，当水准仪的铅垂线指向底边中点时，说明底边为水平线，记录下此时的铅垂线长度（竖直方向的高度）。然后改变水准仪的位置，使底边端点处的铅垂线指向刚才山上的那个点，调整水准仪使其水平，记录下水准仪底边与山的交点以及此时铅垂线的长度。然后重复这样的操作，将竖直方向的高度加在一起就可以得到山高。

师：回答得非常棒！由于山的高度是竖直方向高度的累加，需要在斜坡上找到水平线作为每次测高的基准，因此我们要用到水准仪。这里还运用了图形平移的知识，将求山高的问题转化成了求若干竖直方向线段长的问题（图 9）。

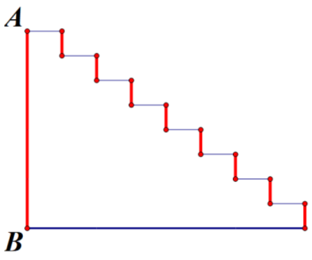


图 9

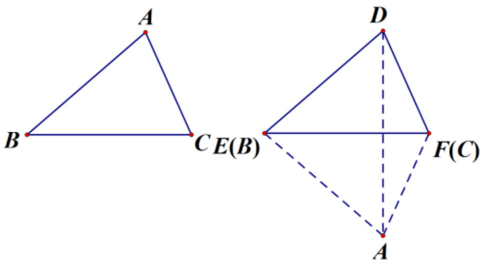


图 10

师：为什么这一工具能判断是否为水平线呢？能否用所学的等腰三角形的性质来解释水准仪测水平线的合理性？

生 1：当铅垂线指向底边中点时，铅垂线与底边上的中线叠合，根据等腰三角形的三线合一，底边上的中线垂直与底边。

生 2：因为铅垂线与水平线是垂直的，这样就保证了与水准仪底部紧贴的线为水平线，

从而保证了竖直方向的高度是准确的。

例题：如图 10，在△*ABC* 与△*DEF* 中，已知 *AB*=*DE*，*BC*=*EF*，*AC*=*DF*。试说明△*ABC* 与△*DEF* 全等的理由。

师：本题是说明 S.S.S 判定方法的合理性，不能使用 S.S.S 判定方法。另三种全等的判定方法都与角有关，因此要找到一组对应角相等。题目条件中等线段在分散的两个三角形，因此考虑通过图形运动，将它们组合成一个图形。

不妨设 BC 最长，把两个三角形拼在一起，使边 BC 与 EF 重合，并使点 A、D 在公共边两侧，再联结 AD，通过运用两次等边对等角说明∠EDF=∠BAC，再由 S.A.S 可得结果。

本例题说明了之前在学习 S.S.S 判定全等时，为何没有对其进行说理，因为当时还未学习等边对等角，当时缺少说理的依据。同时也再一次说明了为何不能用辅助线——底边上的中线来说理等边对等角。

3.7 回顾历程，总结心得

最后，教师和学生一起对本节课所学进行了简要的总结。

本节课类比之前三角形的学习过程，从图形的局部到整体，从边、角、特殊线段、对称性四个维度学习了等腰三角形的有关性质；经历了操作实验、归纳、猜想、验证这样一个研究几何图形性质的过程；在对性质的说理过程中体现了化归思想、在利用水准仪测高问题中体现了建模思想；在对性质的探索过程中，可以大胆假设，但需小心求证，初步了解了何为循环论证，感受到了说理的环环相扣（公理化体系），增进了数学的理性思维能力；通过对古罗马墓碑上数学内容的观察、文艺复兴时期水准仪测山高问题的思考，感受了数学不仅是有用的，更是有趣的，同时是有“人性化”的。

4 学生反馈

课后，结合本节课的教学目标，从收获、感受与疑惑等几个维度对学生进行了问卷调查。91.3%的学生对等腰三角形的两条性质表示完全理解。65.2%的学生表示十分喜欢水准仪测量山高的环节，觉得很有趣。26.1%学生表示钦佩古人的智慧，对很久以前就有现在所学的知识感到很惊奇。17.4%的学生仍不理解为什么不能用 S.S.S 来证明等边对等角。

从问卷调查结果来看，绝大部分学生都认可了古人测山高的教学环节，激发了学习的兴趣，也感受到了古人的智慧与科学探索的不易。同时，虽然本节课教师强调了不能使用 S.S.S 来证明等边对等角，并且用小故事解释了何为循环论证，但是不少学生还是只知其然，不知其所以然，归根结底还是学生缺少几何公理体系的认知，需要教师在后续学习进程中不断渗透。

5 结语

结合教学中实际存在的问题与现象，本节课尝试了融入数学史的教学。在史料的适切性方面，古罗马墓碑中的数学元素体现了数学的人文特点，水准仪测山高的问题体现了数学的趣味性，从后测以及作业结构来看也体现了有效性。在方式的多元性方面，水准仪的内容采用了顺应式的融入方式，依据史料提出数学问题，而例题通过等边对等角证明 S.S.S 采用了复制式的融入方式，也对为何不能用 S.S.S 证明等边对等角进行了解释。在融入史料的自然性方面，测山高这一实际问题的解决是以图形的平移为认知基础的，符合学生心理认知顺序。在价值的深刻性方面，类比三角形性质的学习历程，探究等腰三角形的性质的过程体现了知识之谐与探究之乐，通过添加辅助线将等角问题转化为全等问题体现了方法之美与能力之助，古罗马墓碑中的数学元素以及说理过程中不断克服一个个困难，打通思路的历程体现了文化之魂与德育之效。

当然本节课还是有许多不足之处的。由于探究性质以及对水准仪原理和应用的介绍，学生对于等腰三角形三线合一的运用练习是不足的，需要通过后续课时补足。同时，对于缺少几何公理体系认识的七年级学生而言，无论是理解说理的环环相扣还是循环论证，都不是一蹴而就的，需要通过后续相关学习螺旋往复不断加深理解。

参考文献

[1] 佟胜海. “等腰三角形”教学设计及评析[J].教育实践与研究, 2010(6): 63-64.

[2] 王桂英. 初中数学解题教学设计——以“等腰三角形的性质”为例[J].新疆教育学院学报, 2015,31(2): 71-72.

[3] 林晴岚,杨勤春. 基于中学数学课堂教学中例题“有效”设计的实践研究——以“等腰三角形的性质定理”为例[J].福建教育学院学报, 2014,(2): 59-62.

[4] 卓敏亚. 基于“过程教育”的教学探索及反思——以“等腰三角形的性质定理”为例[J].中学数学（初中版）, 2014,(8): 14-16.

[5] 魏晓丽,王冰. “等腰三角形的性质”教学设计及点评[J].中国数学教育, 2013,(7-8): 36-38.

[6]张奠宙. 数学方法论稿[M].上海：上海教育出版社,2012.

[7] Schreiber P. Art and architecture. [A]. Grattan-Guinness I.*Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*[C]. London: Rourledge,1994.1594-1595.

[8]汪晓勤.数学文化透视[M].上海:上海科学技术出版社,2013.

HPM 视角下的“等腰三角形性质（第二课时）”教学*

孙丹丹[1]，汤雪川[2]

（1. 华东师范大学数学科学学院，上海，200241；2. 徐汇区长桥中学，上海，200444）

1 引言

等腰三角形的性质是沪教版七年级第二学期第十四章三角形的内容。在该章节中，等腰三角形的性质被安排在全等三角形的性质与判定之后，由于等腰三角形的“等边对等角”是边与角相互联系和转化的重要依据，同时也是平面几何体系中支柱性定理之一，因此教材既用其作为运用全等三角形的性质与判定进行推理论证的载体，又通过添加顶角平分线的方式，给出了“等边对等角”严格意义的说理，加强了逻辑推理的渗透，也为今后进入论证几何演绎系统打下了基础。

在学习等边对等角之前，学生已经学习过全等三角形“边边边”的判定及角平分线的作图方法，但是需要注意的是，教材只给出了全等三角形“边边边”的判定命题及角平分线尺规作图程序，并没有对其原因进行说理，而且均指出说理会在以后学习，实际上两者的说理均与此节“对边对等角”有关，其逻辑推理线索如图 1 所示，由等边对等角可以对“边边边”全等三角形判定进行说理，而运用“边边边”全等三角形判定可以对角平分线的尺规作图进行说理。教材采用角平分线作图和“边角边”三角形全等的判定，是因为受制于中学生思维发展水平，中学教科书无法严格按照逻辑顺序编排。但本节课要对等边对等角进行说理，采用“边边边”全等三角形判定角和平分线作图，难免有循环论证之嫌，很多对此课例进行的研究也并没有很好的解决这一问题（如文献[1]-[4]），因此笔者不仅想到历史上等边对等角到底如何证明的呢？学生又能否理解呢？为此，笔者查阅了相关史料。

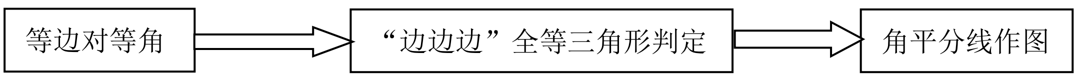


图 1 逻辑推理线

2 历史材料及其运用

历史上有关“等边对等角”的证明方法有若干种，最早的证明方法出自于《几何原本》，《几何原本》第一卷第五个命题为“在等腰三角形中，两个底角彼此相等，并且若向下延长两腰，则与底角相邻的两个角也彼此相等。”

---

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

欧几里得的证明方法如下（图 2）：分别延长等腰三角形两腰 AB 和 AC，在 AB 的延长线上任取一点 E，在射线 AC 上截取 AD，使得 $AE=AD$，联结 CE、BD。先证明 ΔABD 和 ΔACE 全等（边角边），可得 $BD=CE$，$\angle ADB=\angle AEC$，$\angle ABD=\angle ACE$；由 $AE=AD$，$AB=AC$ 可得 $BE=CD$，再证明 ΔBDC 和 ΔCEB 全等（边角边），可得 $\angle BCE=\angle CBD$，$\angle EBC=\angle DCB$；由 $\angle ABD=\angle ACE$，$\angle CBD=\angle BCE$，根据公理 3（等量减等量，差相等）得 $\angle ABC=\angle ACB$[1]。

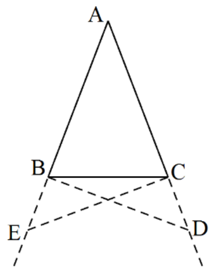


图 2 欧几里得证法

欧几里得（Euclid；公元前 330 年—公元前 275 年），古希腊人，数学家，被称为“几何之父”，他最著名的著作《几何原本》是欧洲数学的基础，被广泛认为是历史上最成功的教科书。中世纪时，欧洲数学水平很低，学生初读《几何原本》，学到第五命题“等腰三角形底角必相等”时就觉得很困难，因此这个命题也被谑成为“驴桥”（Asses’Bridge, 意为笨蛋的难关）定理，也有人推测这个名字来源于欧几里得的图，十分像最简单的桁架桥[5]。

欧几里得的《几何原本》的最大特色在于演绎体系的建立，即新命题证明过程中的依据只能来源于之前的公理公设或已经得证的命题。由于此命题之前只出现了全等三角形“边角边”的判定方法，所以在欧几里得的演绎体系中，此命题的证明不能用除“边角边”以外的其他三角形全等的判定方法。此外，由于“两条直线相交所成的角中，相邻两个角或者是两个直角，或者它们的和等于两个直角”是《几何原本》中的第 13 个命题，因此不能由 $\angle EBC=\angle DCB$ 直接得出 $\angle ABC=\angle ACB$。

公元 5 世纪的普罗克拉斯（Proclus）也曾对“等边对等角”进行过证明（图 3），他的证明方法与欧几里得类似，也是利用三角形全等的“边角边”判定方法，但是普罗克拉斯不通过延长两腰 AB 和 AC，而是直接在两腰 AB 和 AC 上取点 E 和点 D，使得 $AE=AD$，然后联结 EC、DB，类似的，再利用“边角边”两次证明三角形全等[6]。

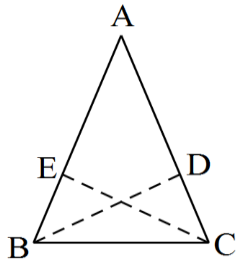


图 3 普罗克拉斯证法

除此之外，古希腊数学家帕普斯也曾对此命题进行过证明，其证明方法很巧妙，将等腰 $\triangle ABC$ 想象成两个三角形，由 $AB=AC$，$AC=AB$，$\angle BAC=\angle CAB$，可得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACB$ 全等（边角边），从而得到 $\angle ABC=\angle ACB$[2]。

在以上三种“等边对等角”的证明方法中，两种都取了点 D 和点 E，使得 $AE=AD$，欧几里得在 AB 和 AC 的延长线上取，普洛克拉斯在 AB 和 AC 上去取，帕普斯虽然没有取点 D 和点 E，但是可以视为其所取的点 E 和点 D 分别与点 B 和点 C 重合，如此一来，以上三种证明方法便可以由一条“动点”线索串联起来，点 E 和点 D 可以分别在线段 AB 和 AC 上，端点 B 和 C 及 AB 和 AC 的延长线上移动。继续让点 E 和点 D 在 AB 和 AC 所在的直线上移动，自然会猜想到点 E 和点 D 或许也可在线段 AB 和 AC 的反向延长线上，试证明之，“等边对等角”也可得证，且证明方法中也用到了利用“边角边”全等两次判定三角形全等。

以上“等边对等角”的证明方法一脉相承又极富创造性，所用到的基本知识是同学们刚刚学过的全等三角形的判定之“边角边”，学生基本可以掌握，所以选择以上史料，一方面可以让学生感受证明方法的多样性，体会欧氏几何公理体系的严密性；另一方面可以通过证明方法之间的紧密联系，启发学生用运动的视角看待问题，加深对动点问题“变中有不变”的理解。

3　教学设计与实施

结合教材分析及对学生现有认知水平的了解，在查阅相关历史之后，笔者进行了本节课的教学设计与实施，教学目标如下：

（1）通过对复杂图形中边、角数量关系的分析，提高对图形的解读能力。

（2）通过使用多种方法对“等边对等角”进行说理，巩固全等三角形的判定与性质，体会说理表达的严密性。

（3）通过对几种说理思路的反思，感悟动点问题解决过程中的特殊到一般、变化中的不变。

（4）在“等边对等角”的说理过程中，感受数学与数学家间的联系，体会数学背后的人文精神。

3.1 另辟新径

为了引出本节课要学习的等边对等角的其他证明方法，从上节课作顶角平分线出发，教师提示学生尝试作底角平分线，进而学生可以自己想到尝试作其他特殊线段：两腰上的高和中线，最后在教师的引导下过渡到更一般的情形：截取相同线段。虽然以上辅助线做法不同，但证明方法类似，均需通过两次说明三角形全等。在证明过程中，一方面巩固全等三角形的

判定和性质，另一方面感受“变化中的不变”。

师：为了说明等腰三角形的两个底角相等，我们利用等腰三角形的特殊线段，构造了可说明为全等的两个三角形，并且两个底角为对应角。有没有其他的方法来对等腰三角形的两个底角相等来进行说理呢？

上节课中添加了顶角平分线构造了两个全等三角形，那么底角平分线能否构造所需的全等三角形吗？

生 1：我按老师的提示进行了作图，但是没有证明出来，感觉无处下手（图 4）。

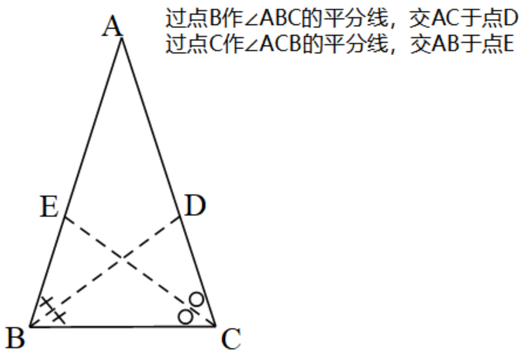


图 4 作两底角平分线

师：好，其实通过作角平分线的确可以对等边对等角进行说理，但图形更复杂，还需要作其他辅助线，用到一些同学们目前没有学到的东西。既然添加两个底角平分线的方式暂时行不通，能否考虑其他特殊线段呢？

生 2：我尝试了作两条腰上的高，证法如下（图 5）：

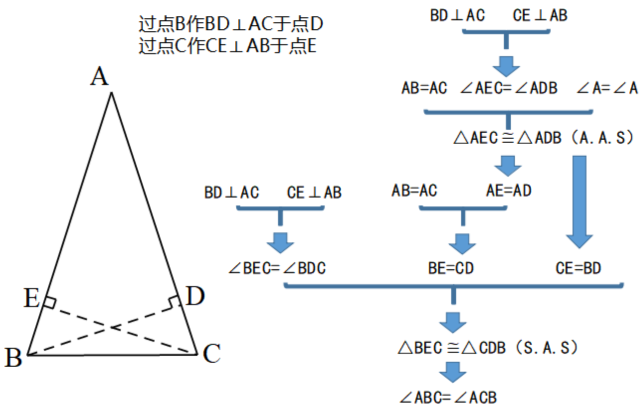


图 5 作两腰上的高

师：很好，上节课我们已经介绍过此前“边边边”三角形全等判定并没有给出证明，其实“边边边”三角形全等判定的证明需要用到“等边对等角”，为了避免循环说理，在证明“等边对等角”时便不能使用“边边边”三角形全等判定，该同学在此题证明过程中就没有使用 $BC=CB$ 这组公共边，由“边边边”进行说理。此外，当从结论出发，找需要的条件（分

析法）受阻时，可从条件出发，看看能够得到哪些结论（综合法），对接已知与未知，这是数学问题解决中的常用思考方式。

师：除了作两条腰上的高，还有没有同学添加了其他类型的辅助线？

生 3：我尝试了作两条腰上的中线，证法如下（图 6）：

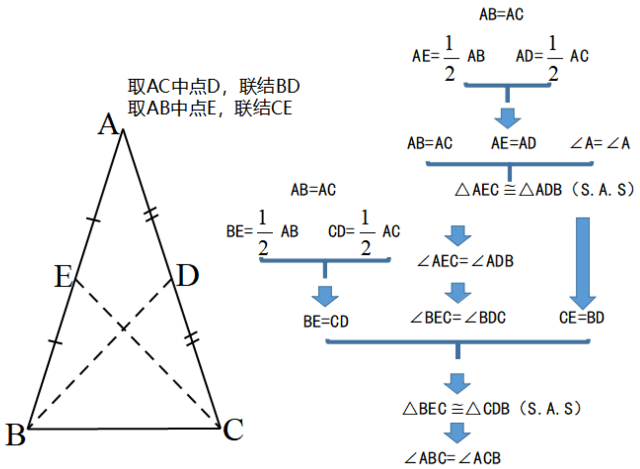


图 6 作两腰上的中线

师：很好，为了避免循环说理，该生也没有使用 $BC=CB$ 这组公共边，由“边边边”进行说理。

师：现在请同学们思考下，从辅助线的结构来看，上述三种方法有无共同特点？

生：都通过辅助线的添加构造了新的三角形，都无法通过一次全等直接证得答案，需要借助另一组的全等得到边等或角等。

师：很好，我们都首先证明了 ΔABD 全等于 ΔACE，一种通过作高，利用“角角边”证全等，一种通过作中线，利用“边角边”证全等，请大家思考一下要想用“边角边”证全等，除了作两腰上的中线，是否还有其他辅助线做法？

生：是不是可以直接在 AB、AC 上直接截取两条等线段来试试。

师：很好，大家可以尝试一下，具体证明方法跟前面非常类似（教师展示，如图 7）。

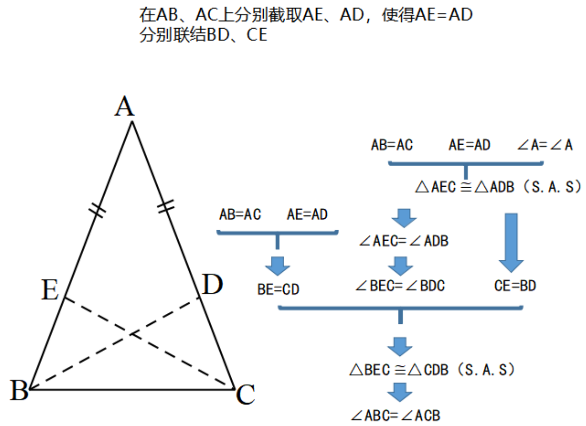


图 7 在两腰上截取等线段

师：此种方法正是古希腊数学家普罗克拉斯（Proclus）说理等边对等角的方法。他于 410 年生于君士坦丁堡（今土耳其的伊斯坦布尔）；485 年 4 月 17 日卒于雅典[7]。

3.2 化静为动

以运动的视角来看以上 D 点和 E 点的选择，点 D 和点 E 相当于在线段 AB 和 AC 上运动，既然可以在线段上运动，教师启发学生大胆猜测并尝试点 D 和点 E 能否在线段所在直线上运动，进而引出了欧几里得的证明方法，教师趁机简单介绍了欧几里得的生平和“驴桥定理”。

师：如果以运动的视角来看待 D 点和 E 点的选择，上述情况只不过是点 D、E 在边 AB 和 AC 上移动过程中的三种特殊位置，当点 E 和点 D 在边 AB 与 AC 上移动时，ΔAEC 全等于 ΔADB 是始终成立的，因此在运动过程中，$\angle AEC$ 也始终等于 $\angle ADB$，那么试想当点 E 运动到点 B 时（点 D 运动到了点 C），你能得出什么结论？

生：当点 E 与点 B 重合时，点 D 与点 C 也重合，$\angle AEC$ 仍然等于 $\angle ADB$，此时的 $\angle AEC$ 就是 $\angle ABC$，$\angle ADB$ 就是 $\angle ACB$

师：很好，此种方法正是古希腊数学家帕普斯的方法，即将等腰三角形看作两个三角形，用“边角边”说理。

师：刚才若干种方法中的点 E、点 D 均在两腰上移动，除了在两腰移动，同学们大胆猜想下还可以移动到哪儿？

生：能否让点 E、D 在两腰所在直线上运动呢？

师：有创意！那在 $AE=AD$ 的前提下，当点 E 与点 D 运动到 AB 与 AC 延长线上时，你能否对“等边对等角”进行说理？

生：果真可以。（图 8）

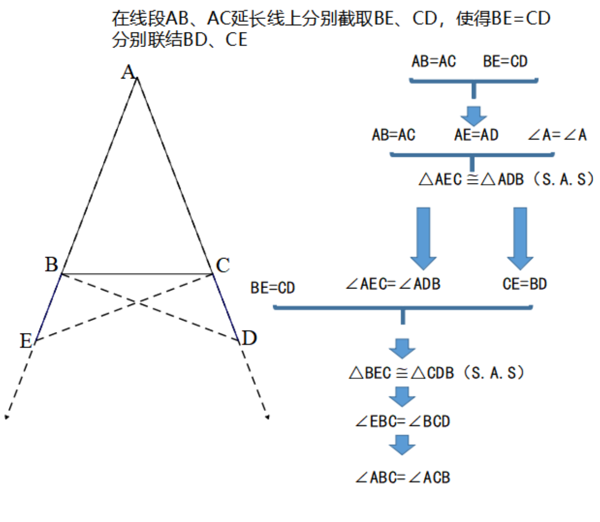
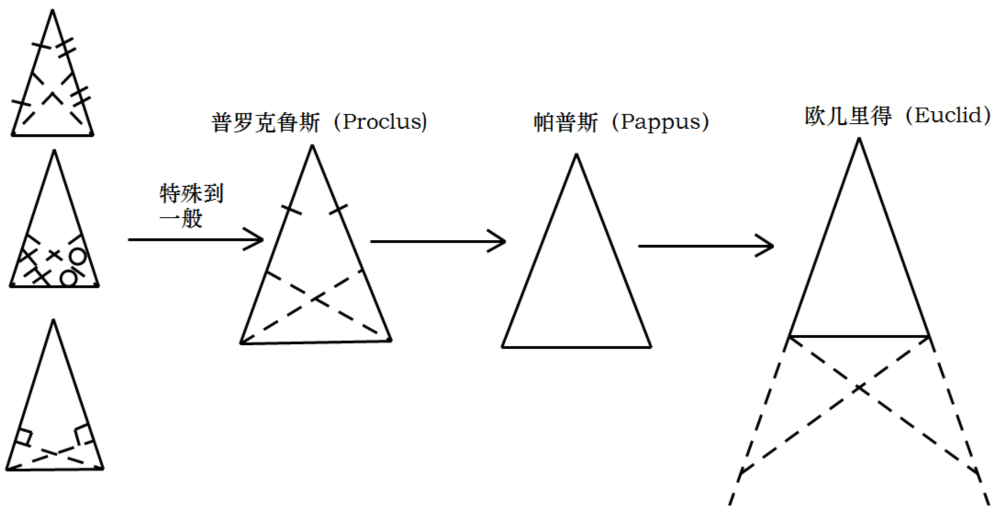


图 8 在两腰延长线上截取等线段

师：很好，这位同学的说理非常类似古希腊著名数学家欧几里得对“等边对等角”的说理方法！

3.3 课堂小结

上节课已经学习过等边对等角的证明方法，而且相对这节课的方法更加简单，为什么还要学习新的证明方法？小结部分在总结梳理本节课主要内容的同时，倾听学生的解释，跟学生一起探讨此问题的答案。



师：本节课跟随者历史上几位著名数学家的脚步，对“等边对等角”进行了多种不同方法的说理。既然我们通过上节课的学习已经会用简单方法对等边对等角进行说理，那为什么我们还要“舍近求远”呢？

生 1：因为可以掌握更多的“等边对等角”的说理方法。

生 2：而且这些方法之间联系密切。

师：很好，老师希望同学们能通过等边对等角的其他证明方法进一步熟练掌握全等三角形的判定与性质，体会数学的严密性，学着用运动的眼光看待问题，感悟其中变化中的不变（动中取静），这在很多数学问题解决过程中是非常重要的。此外，不知道同学们有没有注意到除了全等三角形“边边边”判定外，六年级下册角平分线的尺规作图也没有给出做题原理的说理，这两者的说理其实都需要用到“等边对等角”，所以严格地说，等边对等角的说理不能用全等三角形“边边边判定”及“角平分线的尺规作图”，我们用来证明所用的命题必须是已经证明过的。在中学，很多时候无法严格按照这种严密的演绎体系，所以教材采取的处理方式也是可以的，但老师相信同学们有能力去理解其他证明方法，同学们也做到了。

4 学生反馈

课后，结合本节课的教学目标，从收获与疑惑以及后测题两个维度对学生进行了问卷调查。后测题为类比欧几里得证明等边对等角的方式，通过反向延长两腰的方式来证明等边对

等角。全班 61%的学生能够完整的通过两次全等正确进行说理。

通过对不能正确完成的学生答题情况的分析，可以发现：(1)有四位学生在说理过程中，出现了循环论证的错误。对于还未明确认识何为证明的七年级学生而言，循环论证的理解尚存在困难，还需在今后的几何证明教学中选择合适的时机进行渗透，在问卷中也有个别学生提及为什么不能用底边上的中线（边边边）辅助线来说理等边对等角。(2）除一位学生时间不够之外，有四位学生没有使用教师预设的方法，而采用了上课已经呈现过的方法。说明未正确理解后测题的题意，亦或是举一反三的能力不足，无法类比所学内容进行延伸。

从问卷调查的结果以及之后的作业情况来看，绝大部分学生都能理解利用两次全等来证明等边对等角的若干种方法。其中 34.8%的学生表示本节课的内容虽然开始时难以理解，但是随着学习的深入，逐渐从不懂到弄懂。26.1%的学生表示本节课学习的过程有些累，但是比较有趣，古代数学家们的故事也很吸引人，要向他们学习不断进取的精神。43.5%的学生提到了原来等边对等角的说理有这么多不同的方法，感受到了说理方式的多样性。13%的学生提到了思考的过程比结果更重要，能够锻炼自己思维。

5 结语

结合教学中实际存在的问题，本节课尝试了融入数学史的教学。本节课中的数学史素材体现了方法之美：首先，承接第一课时添加顶角平分线，本节课从添加两底角平分线入手，复制及顺应式地用了历史中的等边对等角证明方法，不同位置的辅助线对应于历史中不同的等边对等角证明方法；其次用运动的观点将古人证明等边对等角的若干方法串联为一个整体，由静至动，由特殊到一般，乃是数学研究中非常重要的方法。本节课也体现了德育之效：古代数学家的方法是静态的，零碎的，孤立的，可谓“只见树木不见森林”，而在本节课，我们站在古人的肩膀上，融会贯通，超越了古人实现了创新。这样的设计一方面可以让学生感受古代数学家并不满足于某一种方法，他们有对于真善美的追求，同时也揭示数学和数学活动的本质：数学是一门动态的、演进性的学科，而非一潭死水；只要深入探索，都会有所创新。此外，数学史是本节课一系列环环相扣的探究活动的设计依据，正是因为数学史，学生才有了本节课这样的探究数学、做数学的机会。

当然，对于初次接触动点问题的学生来说，意图通过一两节课达到最终教学目的是不现实的，要帮助学生形成“动中取静”的方法与意识，还是需要教师今后抓住机会，不断分阶段的加以渗透和落实。此外，在初中阶段，几何证明的公理化意识是被弱化的，教材也是考虑到学生的认知水平（不足以理解公理化思想与循环论证），才会采用添加顶角平分线方法来证明等边对等角的。虽然课程标准中并未对此进行重点要求，但是为了学生数学逻辑推理能力的逐渐提升，需要教师把握好每一个合适的教学内容切入点，适时地加以渗透。

参考文献

[1] 张维强. “等腰三角形性质”教学的再发现——“同课异构”课题研究之反思[J]. 中小学数学（中学版）, 2011 (10) : 40-42.

[2] 魏晓丽, 王冰. “等腰三角形的性质”教学设计及点评[J]. 中国数学教育, 2013, (7-8): 36-38.

[3] 林晴岚, 杨勤春. 基于中学数学课堂教学中例题“有效”设计的实践研究——以“等腰三角形的性质定理”为例[J].福建教育学院学报, 2014, (2): 59-62.

[4] 卓敏亚. 基于“过程教育”的教学探索及反思——以“等腰三角形的性质定理”为例[J]. 中学数学（初中版）, 2014, (8): 14-16.

[5] 欧几里得著, 兰纪正, 朱恩宽译. 几何原本[M]. 陕西：陕西科学技术出版社, 2003: 6-7.

[6] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's elements*[M]. Cambridge: at the University Press, 1968: 251-255.

[7] 吴文俊. 世界著名科学家传记 数学家 II[M]. 北京：科学出版社, 1992: 267.

HPM 视角下的“两角和与差的余弦公式”教学*

张益明[1] 丁倩文[2]
（1.奉贤中学，上海，201404；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

“两角和与差的余弦公式”是沪教版高一第二学期第 5 章“三角比”中重要的三角恒等式之一。在引入部分，教科书指出，在三角比的计算和化简中，常用角 α 和 β 的三角比来表示（α+β）或（α-β）的三角比，由此引入两角和与差的正余弦公式。这里，教科书并未清晰地揭示出知识的必要性，难以激发学生的学习动机。关于公式的证明，教材中利用单位圆，通过旋转，再根据两点间的距离公式推导出两角差的余弦公式，此法适用于任意角的情形，成了教学中常用的推导方法，但该方法不易为学生所想到，显得不够自然。正因为如此，许多教师都尝试对两角差的余弦公式的教学进行改进（如文献[1-10]），然而，人们很少从数学史的视角来设计教学。

美国数学史家和数学教育家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）认为，数学史展现了不同方法的成败得失，因而今人可从中汲取思想养料，少走弯路，获取最佳教学方法[11]。虽然有关和、差角公式的历史素材丰富多彩[12]，但只有极少数教师采用了数学史的视角来设计教学（如[13-15]）。另一方面，HPM 视角下的教学实践表明，数学史有着多方面的教育价值，可以呈现“知识之谐”、展示“方法之美”、营造“探究之乐”、成就“能力之助”、揭示“文化之魅”、达成“德育之效”。在已有的少数教学设计中，数学史的上述价值未得到充分的体现。

有鉴于此，我们采用 HPM 的视角来设计本节课的教学，具体的学习目标如下：

（1）能够正确运用两角和与差的余弦公式进行简单的化简和求值；

（2）经历两角和与差的余弦公式的推导过程，理解两角和与差的余弦公式的两种推导方法，感受方法之美；

（3）进一步体会数形结合、转化等数学思想方法，培养学生直观想象等核心素养。

（4）激发学生的学习兴趣，感悟数学文化，体会数学背后的人文精神。

2 历史材料及其运用

两角和与差的正余弦公式被称为平面三角学的基本公式，这些公式伴随着三角学的诞生而诞生。历史上，不同时代时空的数学家相继给出了丰富多彩的证明[3]。本节课从学生的认知基础出发，选取合适的方法，用多种方式将相关历史素材融入教学之中。

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

2.1 帕普斯模型

公元 3 世纪末，古希腊数学家帕普斯（Pappus，约 290-约 350）在《数学汇编》中提出一个几何命题，其中蕴含了丰富的三角学知识，为三角公式的教学提供了几何模型[3]。如图 1 所示，设 $\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\beta$（$0<\beta<\alpha<\pi, 0<\alpha+\beta<\pi$），$OA=OB=OC=1$，过 C 作 $CH\perp OB$，垂足为 H，交半圆于 E。过 H 作 $HG\perp OA$，$HM\perp CD$，垂足分别为 G 和 M，又过 E 作 $EF\perp OA$，垂足为 F。于是有 $CH=\sin\beta$，$OH=\cos\beta$，$OD=\cos(\alpha+\beta)$，$OF=\cos(\alpha-\beta)$，$OG=\cos\alpha\cos\beta$，$MH=DG=\sin\alpha\sin\beta$，$OD=OG-MH$，$OF=OG+MH$，得公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

和

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$ 。

该模型的核心思想是用线段的长度去表示和、差角公式中的三角比的值，进而得到锐角情形下的和差角公式。再利用诱导公式，将公式推广到任意角的情形。

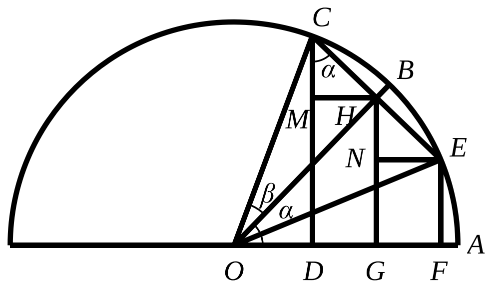


图 1 和角公式的帕普斯模型

该模型的证明方法一方面符合数学史上三角的发展历史，另一方面符合学生的认知规律。因此本课将利用帕普斯模型进行引入。当然，帕普斯模型中角的始边不在 x 轴正半轴，这一点与学生的认知规律是冲突的，将帕普斯模型作出三点改进。第一，由于直接给出帕普斯模型有一定的构造痕迹，我们可以先让学生猜测公式，这样有目的去利用三角函数线表达三角比的值；第二，将两个角的始边同时与 x 轴正半轴重合，从差角公式入手降低认知难度；第三，为了突出三角代换的重要性，仅仅利用该模型得到差角公式，其他公式利用三角代换得到。本节课针对以上改进使用问题串让学生经历帕普斯模型的构建过程，此处数学史的使用方式是重构式。

2.2 麦克肖恩的方法

1941 年，美国数学家麦克肖恩（E. J. Mcshane, 1904-1989）在《美国数学月刊》上发表论文，避开弦长公式，重新对公式$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$进行推导[16]。如图 2，在单位圆 O 中构造$\angle AOB=\alpha$ ，$\angle AOC=\beta$，将$\triangle BOC$沿顺时针旋转，使得 OC 与 OA 重合，OB 与 OD 重合，由 AD＝CB，利用两点之间距离公式即得差角的余弦公式.

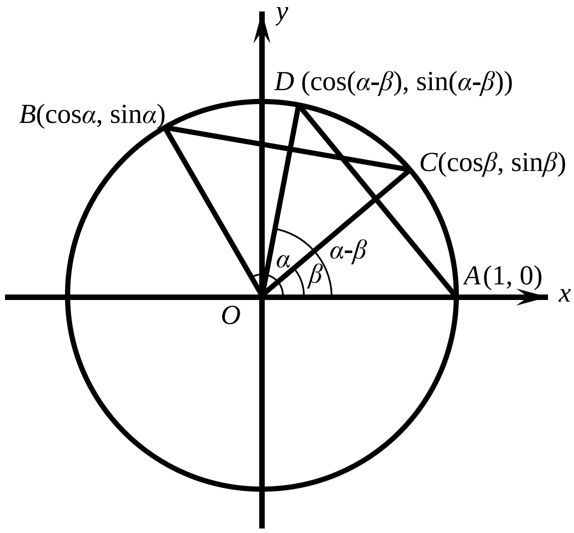


图 2 麦克肖恩的证明方法

该模型是课本上证明和角公式的方法，也称麦克肖恩方法，此法简洁明了，学生容易掌握，但是很难想到，因此，本节课通过微视频介绍课本方法的历史背景，然后让学生打开教材学习这种证明方法，再让学生谈谈感悟，体会麦克肖恩当时的想法。该处数学史的使用方式是复制式。

历史上其它的证明方法如托勒密定理、克雷斯维尔的单位圆方法、相似三角形、面积法、投影法等对于平面几何的证明技巧要求较高，而正、余弦定理出现在和角公式之后，考虑到学生的实际情况，通过微视频，附加式地对这些方法加以介绍。

3 教学设计与实施

3.1 问题引入，猜想公式

教师从古代天文学中的一个测量问题引入：

公元前 3 世纪，古希腊著名天文学家阿里斯塔克斯（Aristarchus, 310 B.C. - 230B.C.）观测得到，在月亮半圆时，日、地、月的中心 S、E 和 M 恰好为一个直角三角形的三个顶点，且$\angle SEM=87°$，如图 3 所示。阿里斯塔克斯想知道的是：地日距离（ES）是地月距离（EM）

的几倍？当时，人们还不知道 87°的余弦或正弦值，阿里斯塔克斯通过冗长的几何推理，才得出这个倍数在 18 和 20 之间的结果[11]。显然，倘若我们能算出 $\cos 87°$ 的值，也就知道准确的倍数了！可见，我们仅仅知道初中里学过的特殊角（$30°$，$45°$，$60°$，$90°$）的三角比是不够的，我们需要计算任意角的三角比。

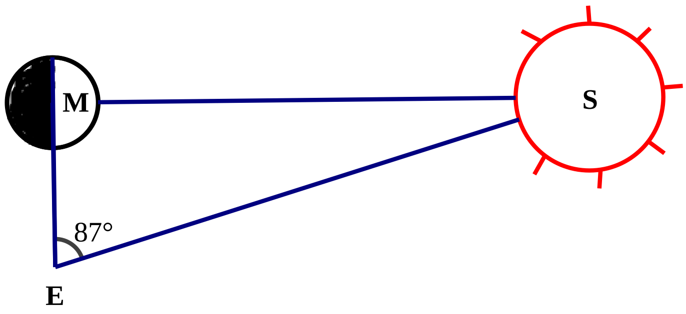


图 3 月亮半圆时刻日、地、月的位置关系

在阿里斯塔克斯之后，古希腊天文学家（如托勒密）在制作弦表时，采用了一个新的方法，用今天的话来说，就是根据已知的角的正余弦值来求未知的角的正余弦值。这便是我们今天要研究的课题。

接着，就是让学生利用同角三角比的关系，由 $\cos 30°$ 求 $\sin 30°$ 和 $\tan 30°$，再利用诱导公式，由 $\cos 30°$ 求 $\cos 150°$ 和 $\cos 390°$。进而提出问题：能否用 $45°$ 和 $30°$ 的正余弦来求 $\cos 15°$？根据计算器上读出的结果，学生猜测：

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30°,$$

或

$$\cos 15° = \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$$

教师进一步提出问题：对于一任意角α和β，是否成立 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 或 $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$？究竟哪一个等式成立？

3.2 建立模型，验证猜想

假设 α,β 为锐角。如图 4 所示，两个角的终边与单位圆分别交于点 A 和 B，教师让学生在该图上找出与 $\cos\alpha,\cos\beta,\sin\alpha,\sin\beta$ 相等的线段。

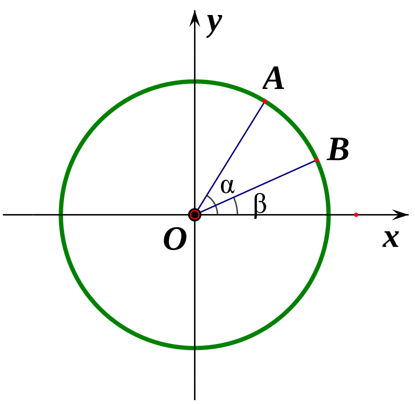


图 4 单位圆模型

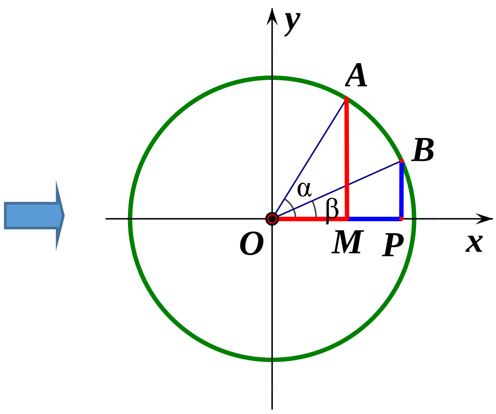


图 5 学生添加辅助线（一）

生：分别过点 A 和 B 作 x 轴垂线，交点分别为 M 和 P（图 5），则 $AM=\sin\alpha$，$OM=\cos\alpha$，$BP=\sin\beta$，$OP=\cos\beta$。

师：严格地说，正弦线是 MA 而不是 AM，但我们有个前提，即 α 是锐角，所以问题不大。三角函数线的作用就是利用有向线段的长度来表示三角比。我们今天也利用这种方法来证明差角余弦公式。请同学们在图中找到一条线段，使其长度等于 $\cos\left(\alpha-\beta\right)$。

生：过点 A 作 AN⊥OB，垂足为 N（图 6），因为 $OA=1$，所以 $ON=\cos(\alpha-\beta)$。

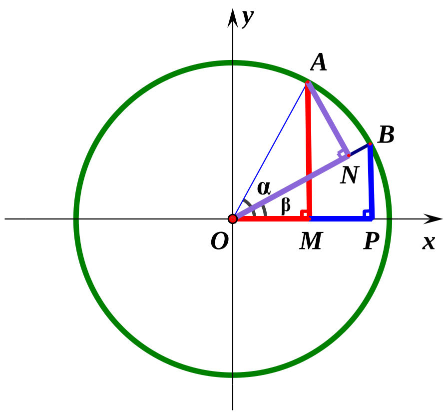


图 6 学生添加辅助线（二）

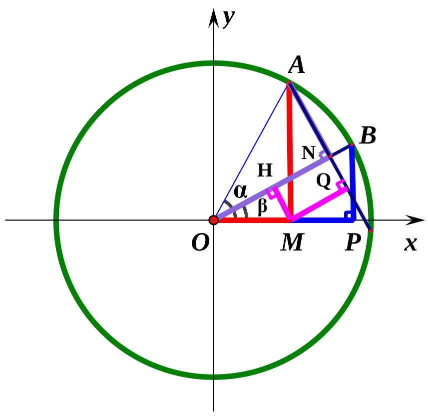


图 7 学生添加辅助线（三）

师：请同学们利用他的方法用一条线段表示 $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$。

生：把 $\cos\alpha$ 看成斜边，以 β 为一个内角构造直角三角形。过 M 作 OB 的垂线，垂足为 H（图 7），则 $OH=\cos\alpha\cos\beta$；图中 $MA=\sin\alpha, \angle MAN=\beta$，过 M 作 AN 的垂线，垂足为 Q，在 ΔAMQ 中，斜边长为 $\sin\alpha$，$MQ=HN=\sin\alpha\sin\beta$。因此，$ON=OH+HN$，公式得证。

师：所以 $ON=OH+HN$。我们回头看证明过程，证明的思想是用线段的长度表示三角比。当然我们的证明有个前提，α,β 为锐角。那么如果角的范围变化了结论还成立吗？

比如，设$\alpha\in\left(2\pi,\dfrac{5}{2}\pi\right)$，$\beta$为锐角，请问如何计算$\cos(\alpha-\beta)$？

生：$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-2\pi-\beta)$，再展开，即可得到公式，我们发现公式也成立。因此，当α,β在其他范围内时，可以利用诱导公式证明公式对于任意角角都成立。

师：这里，我们用到了一种思想，即用$\alpha-2\pi$去代换α，这种思想在三角中非常重要。请同学们利用代换思想计算$\cos(\alpha+\beta)$。

生：$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

我们这样就得到了两角和的余弦公式。我们今天学会了一种解决问题的方法，先猜想，再证明。

接着，播放时长 4 分钟的微视频，视频呈现了两角和与差的公式推导数学史简介。视频由两角和与差的余弦公式引入，指出公式所呈现的对称美，历代数学家不遗余力地去证明它，体现了他们对方法之美的追求。接着，视频追溯了公式的历史：

公元 2 世纪，古希腊数学家托勒密为编制弦表提出托勒密定理，运用托勒密定理可以推导出两角和与差的正余弦公式。公元 3 世纪末，古希腊数学家帕普斯在《数学汇编》中提出了一个几何命题，为许多三角公式提供了模型。20 世纪中叶以前，绝大多数西方三角教科书上都采用帕普斯的几何模型来推导锐角情形下的和、差角正余弦公式，再用诱导公式得出任意角的情形。同学们的思想和数学家们的思想差不多，可见，只要在数学中付出更多努力，在数学上就能取得更大的成就。18-19 世纪，意大利数学家卡诺里（A. Cagnoil, 1743-1816）、美国数学家伍德豪斯（R. Woodhouse, 1773-1827）、瑞士数学家哈斯勒（F. R. Hassler, 1770-1843）、英国数学家克雷斯维尔（D. Cresswell, 1776-1844）、法国数学家萨吕斯（P. F. Sarrus, 1798-1866）相继给出各自的证明。到了 20 世纪，美国数学家麦克肖恩对前人的证明仍感到不满意，他对萨吕斯的证明作出了改进，他的方法就是课本上给出的方法。

看完课本上的证明后，教师提出问题：麦克肖恩为什么会想到将图形进行旋转？

生：将角$\alpha-\beta$的始边旋转到x轴正半轴上。

师：非常好，这个也是我们将角推广到任意角常见的方法。那么他又是怎么样想到用线段长度来计算的呢？旋转过程中，图形位置发生变化，也有一些不变的量。

生：角与线段长度不变。

师：利用了$|AB|=|A'B'|$，再利用两点间距离公式再展开，即可得到公式。

3.3 练习巩固，深化认识

首先，利用以下练习，进行公式的简单应用。

【例 1】利用两角和与差的余弦公式求值：（1）$\cos 75°$；（2）$\cos\dfrac{\pi}{12}$。

其次，通过练习，让学生熟练运用公式，并体会三角代换的思想。

【例 2】证明下列恒等式：（1）$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$；（2）$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$。

3.4 盘点收获，总结回顾

首先，总结本节课主要运用两种方法推导两角和与差的正余弦公式。帕普斯模型方法的核心思想是利用三角函数线去表示三角比的值，而麦克肖恩的方法是利用图形的旋转以及两点间距离公式。

其次，这节课中我们学到数形结合、代换等数学中非常重要的数学思想。

最后，历史上数学家们孜孜不倦地改进和、差角公式的证明，反映了数学家们对于真善美的不懈追求，体现了他们的创新精神；只要我们深入思考、努力探究，我们也能想数学家之所想，从而穿越时空，与数学家对话；不知不觉中，我们已成了课堂上的一名小小的数学家。

4 学生反馈

课后，我们收集全班 40 名同学对本节课的反馈信息。全班同学表示同意听懂了这节课，其中 70%的同学完全同意。95%以上的同学表示挺喜欢数学史融入课堂的教学方式。

关于学生对两角和的余弦公式的推导，喜欢帕普斯模型的学生给出的理由如下：

- 直观、清晰；
- 由锐角的情形推广到任意角的情形，可以对公式理解得更深刻一些；
- 与初中知识结合，更易想到；
- 有引导性，能带动大家的思考，可以培养思维。

喜欢麦克肖恩方法的学生给出的理由如下：

- 巧妙运用图形的旋转、两点间距离公式等常见数学方法，通俗易懂且适用于任意角；
- 该方法建立在前人众多证明方法的基础之上，达到完美的地步。

绝大多数学生能正确运用公式。关于本节课所体现的数学思想，学生的回答有数形结合思想、代换思想、化归思想，另外还有学生提到“学贵有疑”的思想。

关于本节课中印象最深的内容，大部分学生提到了数学文化，例如：

- 让人愉悦的小视频，追溯了公式的历程，推导方法由繁至简，从而对公式来源有一定了解，从中找到了自己喜欢的证法；
- 较深入地引入数学史作为公式理解的辅助，能比较直观地了解余弦公式的精神；
- 数学家们勇于质疑，不断改进的精神，从难以理解的方法到最后通俗易懂的方法，这一转变都应归功于数学家们的精神，凭着这一精神，人们对数学家的理解越来越深，也方便我们学习；两角和与差的正余弦公式，它十分整齐且有对称美，蕴含了数学家的精髓；

5 结 语

任何数学公式都不是凭空产生的，都有其漫长的历史；其背后都蕴含着精彩的思想方法和丰富的人文元素。如果仅仅让学生去机械地记忆公式，那么，公式是静态的、冷冰冰的、无生命的、枯燥无味的。从历史的视角来呈现和角公式，实际上赋予了公式以鲜活的生命。本节课不仅沟通了历史和现实这座桥梁，还沟通了数学和人文这座桥梁。

本节课中，借鉴历史，从猜想到证明、从几何到三角、从锐角到任意角的过程，实际上再现了和角公式自然发生和发展的过程，体现了“知识之谐”。而在知识的发生和发展过程中，教师给予学生探究机会，引导他们最终解决问题，从而获得成功的体验，体现了“探究之乐”。除了帕普斯几何模型方法，微视频还展现了数学史上多样的精彩证明，最后利用麦克肖恩的证明来衔接课本上的证明，体现了“方法之美”。几何模型彰显了几何与代数之间的联系，有助于培养学生的直观想象和逻辑推理等核心素养以及表征转化能力，体现了“能力之助”。和角公式的起源揭示了数学与天文学之间的密切联系，而不同时空的数学家都对和、差角公式作出自己的证明，揭示了数学文化的多元性以及公式背后数学家追求真善美的人文精神，因而数学史体现了“文化之魅”。引导学生穿越时空，走进数学家的心灵之中，亲近数学，建立自信，因而数学史体现了“德育之效”。

参考文献

[1] 胡晓莉. “两角差的余弦公式”教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2009, (7-8): 47-49.

[2] 杨育池. 多一点精心预设, 融一份动态生成——“两角差的余弦公式” 教学设计[J]. 数学通报, 2009, 48(11): 34-38; 41.

[3] 臧立本. 两角和与差的余弦公式教学实录与反思[J]. 中学数学月刊, 2010, (4): 5-7.

[4] 刘次律, 张维忠. “两角差的余弦公式”教学设计研究[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2015, (12): 17-19.

[5] 朱胜强. 两角和差余弦公式的探究性教学[J]. 数学通报, 2013, 52(9): 49-50; 55.

[6] 李杰平. 让课堂生成变得更高效——以“两角差余弦公式”的教学为例[J]. 中国数学教育, 2013, (12): 26-28.

[7] 高洪武. 基于学情, 关注学法的数学公式课设计——“两角差的余弦公式”的教学与反思[J]. 中小学数学(高中版), 2014, (5): 6-10.

[8] 魏韧. 追求自然朴实的数学教学——以两角和与差的余弦公式教学为例[J]. 数学通报, 2014, 53(11): 16-18.

[9] 吕兆勇. 追求自然、发展的探究式教学——以“两角和与差的余弦”教学为例[J]. 中小学数学(高中版), 2015, (4): 29-31.

[10] 戴圩章. “以生为本”从新课导入开始——以两角和与差的余弦公式教学为例[J]. 数学通报, 2015, 54(9): 38-41.

[11] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[12] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式[J]. 数学通报, 2016, 55(6): 4-8.

[13] 张小明. 两角和差的三角公式推导一数学史融入数学教学的实例研究[J]. 数学教学, 2007, (2): 42-44.

[14] 张海强. 基于数学史“两角和与差的余弦”的教学设计[J]. 数学通讯, 2014, (6): 14-17.

[15] 陈清华, 徐章韬. 既基于历史, 又与时俱进——高观点下“两角和与差的正、余弦公式”教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2013, (9): 28-31.

[16] Mcshane, E. J. The addition formula for the sine and cosine[J]. American Mathematical Monthly, 1941, 48(10): 688-689.

HPM 视角下的"线面垂直判定定理"教学*

胡佳婧[1] 张亚琦[2]

（1.上海市久隆模范中学，上海，200435；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

"线面垂直"是沪教版第 14 章第 3 节前半节的内容。教材通过旗杆与地面的位置关系，引出线面垂直问题，接着给出定义。再根据如何确保旗杆垂直于地面，得到其判定定理，但教材并未给出定理的证明。这样的设计，使抽象的数学问题生活化，便于学生理解。但在教学实践中发现，学生心目中存在疑惑：真的能通过判定定理判断一直线与平面垂直吗？这一结论是如何得到的？该如何加以证明呢？已有的教学设计中，绝大多数通过实验操作来验证定理的正确性，包括：动态观察旗杆与影子的关系（如文献[1-2]）和折纸实验（如文献[3-8]）；只有极少数设计在操作的基础上给出严格的定理证明（如文献 9）。我们很少看到 HPM 视角下的教学设计。

历史上，关于线面垂直的判定定理有许多精彩的证明，有些证明对于高中学生来说是易于理解与掌握的。另一方面，普通高中新课程标准提出，要在数学教学中落实逻辑推理素养，并要求适当渗透数学文化。数学史恰恰能帮助我们达到这些目标，正如当代 HPM 学者 Jankvist 所言，历史提供的不同观点和不同表征方式，可以改善教学，也可以让学生认识到数学是经历演进过程的学科，而不是天上掉下来的。[10]

因此，我们可以从 HPM 的视角来设计与实施线面垂直的教学，加入线面垂直判定的证明，培养学生的逻辑推理素养；同时，利用数学史来揭示线面垂直判定定理背后的人文元素。此外，介绍中国古代的立体图形，让学生感受数学文化的同时，激发学生的民族自豪感。

为此，我们拟定本节课的教学目标如下：

（1）掌握线面垂直的定义、性质与判定定理；

（2）会利用线面垂直的性质与判定进行一些简单的推理、解决空间距离问题；

（3）了解历史上精彩的线面垂直判定的证明方法，培养逻辑推理素养，增加数学学习的自信心，树立正确的数学观；

（4）了解中国古代的立体图形，渗透数学文化，培养爱国主义情怀。

2 历史材料及其运用

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室实施的高中数学系列课例之一。

2.1 历史上线面垂直判定定理的证明

西方早期几何教科书给出了线面垂直判定定理的许多严格证明。这些证明分属两个传统，一是欧几里得传统，二是引理法传统[11]。本节课采用的历史素材有克莱罗的直观解释、对称法、勒让德证法、运用引理法的错误证明以及中国古代的基本立体图形。

（1）克莱罗的直观解释

法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut, 1713-1765）并未给出线面垂直判定的严格证明，但他在《几何基础》（1741）给出的直观解释，如图 1 所示，AB 为长方形 $CDEF$ 对折后的折痕，将所折线段 BC、BD 分别与平面上过点 B 且垂直于 AB 的两条已知直线贴合，则 AB 与平面垂直。这一解释为本节课的设计提供了借鉴。本节课将利用克莱罗的折纸模型引出主题，并借助模型带领学生一起来探究线面垂直的定义。

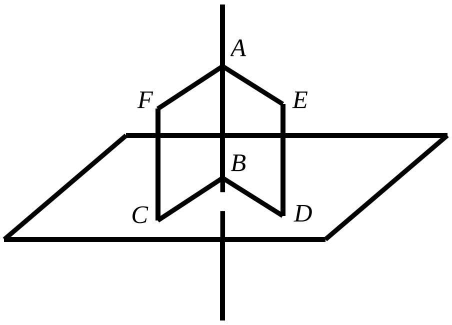


图 1 克莱罗的直观解释

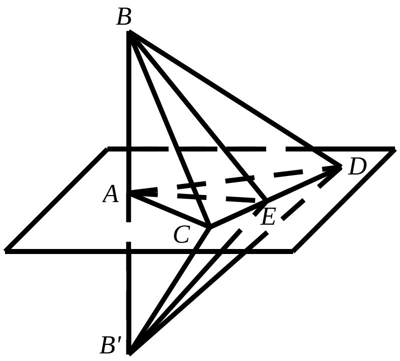


图 2 对称法

（2）对称法和勒让德法

对称法出现于美国数学家泰班（E. T. Tappan, 1824-1888）的《平面与立体几何》（1864）中[12]。如图 2，已知直线 $AB\perp AC$，$AB\perp AD$，在 AC 和 AD 上各取点 C 和 D，连接 CD，过点 A 在 AC 和 AD 所在平面上任做一条直线，交 CD 于点 E。为证明 $AB\perp AE$，延长 BA 至 B'，使 $AB=AB'$，连接 BC，BD，BE，$B'C$，$B'D$ 和 $B'E$，根据中垂线定理可知，$BC=B'C$，$BD=B'D$，故 $\Delta BCD\cong\Delta B'CD$，$\angle BCE=B'CE$，从而 $\Delta BCE\cong\Delta B'CE$，$BE=B'E$，即可得到 $AB\perp AE$，由 AE 的任意性可知，AB 垂直于 AC 和 AD 所在平面。

最原始的欧氏证法，繁琐冗长，涉及五组三角形全等。之后虽有数学家对其进行简化，但简化后的证明并不严谨，不适合课堂教学。本节课选择同样采用纯几何逻辑推理证明的对称法，作为线面垂直判定定理的主要证明方法。

虽然都是用代数思想解决几何问题，但介绍法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）证明，不仅能把中线定理介绍给学生，还可以让学生了解数学史知识。但由于内容比较多，决定录制微视频，让学生课后自学。

2.2 线面垂直判定定理的错误证明

美国数学家斯图尔特（S. T. Stewart, 1850-1913）在《平面与立体几何》（1891）中给出过一个利用反证法的证明[13]，如图 3：已知 $AB \perp CK$，$AB \perp EF$，HS 是 CK 和 EF 所在平面上任意一条过点 A 的直线，假设 AB 不垂直于 HS，作 $BI \perp HS$，则 $BI < AB$，我们知道，过平面外一点向平面内任一点所引线段中，最短的一条为平面的垂线段，因 AB 是垂线段，故 BI 不能短于 AB，所以 $AB \perp HS$，从而与平面垂直。这里，斯图尔特将要证明的结论当成条件来用，是错误的。

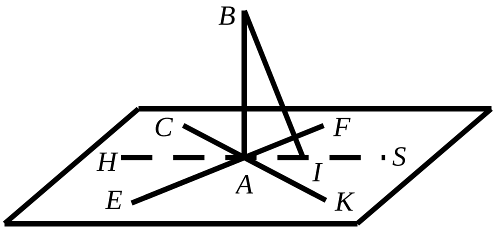


图 3 引理法的错误证明

引理法传统的证明方法就是教科书中所提到的，从公理出发的证明方法，但无论是引理法还是阿达玛证法都比较抽象，对于有些学生而言难以理解，因此不选择这两种证明方法作为课堂教学内容。但引理法所用到的反证法，是立体几何证明中比较常用的一种方法，是学生需要掌握的。课堂上，向学生展示此错误证明，让学生进行辨析。

2.3 《九章算术》中的立体图形

堑堵、阳马、鳖臑是中国古代三个重要的立体图形。如图 4，堑堵是两底面为直角三角形的棱柱；如图 5，阳马是底面为长方形，两个三角面与底面垂直的四棱锥；如图 6，鳖臑是四个面均为直角三角形的三棱锥。斜解一个堑堵，可以得到一个阳马与一个鳖臑，其中阳马和鳖臑的体积之比恒为 2:1，这就是刘徽原理[14]。

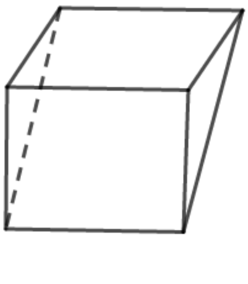


图 4 堑堵

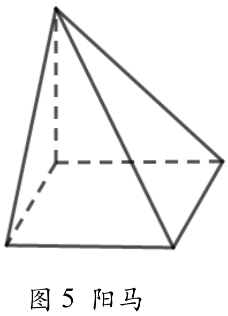


图 5 阳马

图 6 鳖臑

为了提升学生的学习兴趣，我们利用这几个立体图形来编制空间距离问题，并介绍中国古代的阳马术。

3 教学设计与实施

3.1 引入新知

为引起学生兴趣，由电影《唐人街探案》的一个小片段引入。先请同学们帮助视频中的小女孩完成“如何把一张纸给立起来”这个奇怪的作业。一位女生采用如图 7 所示的方法，成功地将一张纸给立在了桌面上。再提出问题：此时折痕与桌面有怎样的位置关系？引入本节课的学习主题：线面垂直。

图 7 电影片段

3.2 探究定义

请同学们列举了一些生活中线面垂直的例子，如墙角线与地面、旗杆与地面等等。

师：我们再来看刚刚的折纸模型（如图 8），在桌面上是不是有两条边？我们就盯着一条边看，折痕所在直线与这条边所在直线有怎样的位置关系？

生：垂直。（全班异口同声）

师：如果我以折痕为轴，将这个折纸进行旋转，我们盯着的那条边在桌面上的位置发生变化，随着这条边位置的变化，折痕所在直线与这条边所在直线的位置关系？（同步展示图 9）

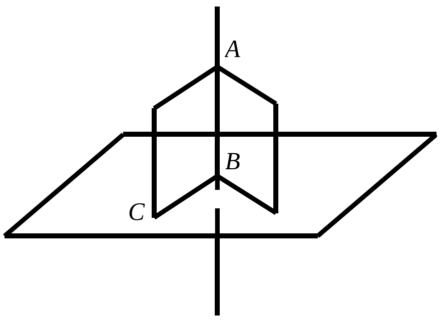


图 7 折纸模型

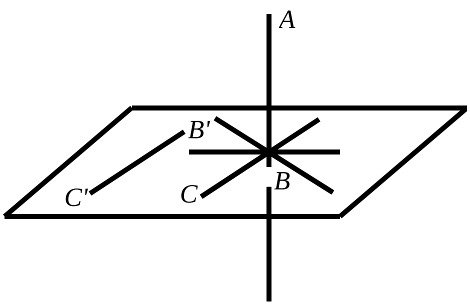


图 8 折纸模型抽象图

生：还是垂直。

师：如果在平面上任意找一条不过折痕所在直线 AB 与平面交点 B 的直线 $B'C'$，直线 $B'C'$ 与直线 AB 的位置关系是什么？

生：还是垂直。

师：为什么？

生：因为这条线还是在平面上。

师：非常好！在平面上就可以进行平移。可将这条线平移到过折痕所在直线与平面的交点，那么这条线也就一定与折痕所在直线垂直。

师：由此，大家能得到怎样的结论？

生：垂直于平面的直线，垂直于平面上的任何一条直线。

师：所以同学们能不能给出线面垂直的定义？

生：如果一条直线与平面上的所有直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。（同步 PPT 呈现）

3.3 总结性质

接着，教师让学生判断 2 个命题的真假。

命题 1：如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，那么这条直线与这个平面垂直；

命题 2：如果一条直线垂直于平面，则与这条直线平行的直线也与平面垂直。

师：大家觉得命题 1 成立吗？

生：不成立。

师：为什么不成立？

生：当直线 AB 倾斜时，在平面上能找到与直线 AB 垂直的直线，甚至是无数条，但无数不等价于所有！

师：对，再来看命题 2。

生：正确。

师：那能不能请你说明一下，为什么正确？

生：与已知直线平行的直线，可以通过平移与已知直线重合，就说明与平面也是垂直的。

性质总结：

性质 1：一条直线垂直于平面，则与平面上任意一条直线垂直。

性质 2：一条直线垂直于平面，则与这条直线平行的直线也与平面垂直。

3.4 证明定理

总结完性质之后教师继续追问，定义是否可以作为判定，从而引出判定定理。

师：能不能直接用线面垂直的定义作为线面垂直的判定，也就是说，你要证明直线与平面垂直，你就要证明直线与平面上所有的直线都垂直。所谓“所有”，究竟有多少条？

生：无数条。

师：但是无数条数量太多了，我们接下去的想法就是能否把数量减少？减少到几条比较合适呢？

生：减少到 2 条。还要是 2 条不平行的直线。

师：为什么是 2 条？还是 2 条不平行的直线呢？

生：因为 2 条相交直线确定一个平面。

师：老师认为，你能确定将直线减少到两条这一点非常好！那我们就按平行与相交两种情况来进行考虑。如果直线垂直于平面上两条平行的直线，能说这条直线垂直于这个平面吗？

生：不行，前面举过反例，垂直于无数条平行线都不能说明直线垂直于这个平面。

师：说得太好了！排除了平行的情况，接下去思考，如果直线垂直于平面上两条相交的直线，能说这条直线垂直于这个平面吗？

师：所以我们现在要研究的问题是，如果一条直线垂直于平面上两条相交的直线，那么这条直线与平面上的任意一条直线都垂直吗？

（PPT 给出条件：已知 $AB\perp AC$，$AB\perp AD$，在 AC 和 AD 上各取点 C 和 D，连接 CD，过点 A 在 AC 和 AD 所在平面上任做一条直线，交 CD 于点 E。）

首先，教师带领学生理清证明思路，根据已知条件，明确要证的结论是 $AB\perp AE$。然后引导学生回忆，要证明两条直线互相垂直的基本方法，如勾股定理逆定理、相似全等、等腰三角形三线合一等。并决定利用等腰三角形三线合一的性质，当场来进行证明。借助几何画板，提示学生添辅助线构造三角形，最后由一位女生顺利完成证明，大致思路如下：

证明：延长 BA 至 B'，使 $AB = AB'$，连接 BC，BD，BE，$B'C$，$B'D$ 和 $B'E$。由中垂线定理可知，$BC=B'C$，$BD=B'D$，故 $\Delta BCD\cong\Delta B'CD$，$BE=B'E$，即可得 $AB\perp AE$，由 AE 的任意性可知，AB 垂直于 AC 和 AD 所在平面。

师：刚刚这位同学很厉害，她完成了美国数学家泰班于 1864 在《平面与立体几何》中所提出的证法，这种方法简称对称法。此处应该有……

（全班响起了热烈的掌声。）

师：其实利用勾股定理的逆定理也可以对这一命题进行证明，法国数学家勒让德就是这样来证明的，简称勒让德证法。老师给大家做了一个微视频，希望大家能课后去学习一下，再将对称法与勒让德证法进行比较，看看你自己更欣赏哪种证法。

师：我们再一起来看一个不太一样的证明，请大家思考，证得对不对。

证明：如上图 3，已知 $AB\perp CK$，$AB\perp EF$，HS 是 CK 和 EF 所在平面上任意一条过点 A 的直线，假设 AB 不垂直于 HS，作 $BI\perp HS$，则 $BI<AB$，我们知道，过平面外一点向平面所引线段中，最短的一条为平面的垂线段，因 AB 是垂线段，故 BI 不能短于 AB，所以 $AB\perp HS$，即 AB 垂直于 CK 和 EF 所在平面。

师：这种证明方法正确吗？

生：不正确，他在证明过程中用到了“AB 是垂线段”，那是要证的结论。

师：非常好，他把结论当成条件来用，是一个错误证法，然而这个证明却是由一个叫斯图尔特的美国数学家于 1891 年在《平面与立体几何》中所给出的。可见数学家也会犯错误，

今后大家在数学学习方面偶尔犯错误、遇到挫折也千万不要气馁，要对自己有信心哦！

师：其实在历史的长河中，对于线面垂直判定的证明，除了刚刚提到的那些，还有很多不同的证明方法，不同的数学家都在为找到更完美的证明方法而努力，从不准确到准确，从繁琐到简洁，数学家们这种精益求精的精神是值得我们学习的！

请一位同学总结线面垂直的判定定理，并向学生说明，无需保证这两条相交直线与已知直线有公共点。

3.5 应用练习

例 1 如图 10，已知ΔABC中，$\angle ACB=90°$，$SA\perp$ 面 ABC。求证：$BC\perp$ 面 SAC。

学生顺利完成了证明，并能推断该图形的四个面都是直角三角形。教师指出，在中国古代，该立体图形被称为鳖臑；鳖臑意为甲鱼前肢下半截的骨头，该图形因与鳖臑相像而得名，全班学生发出感叹声。

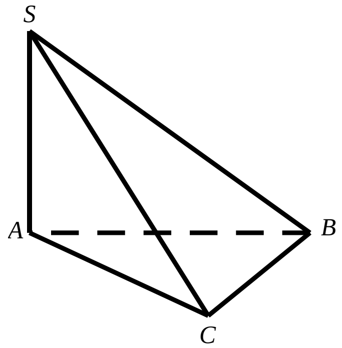


图 9 例题一

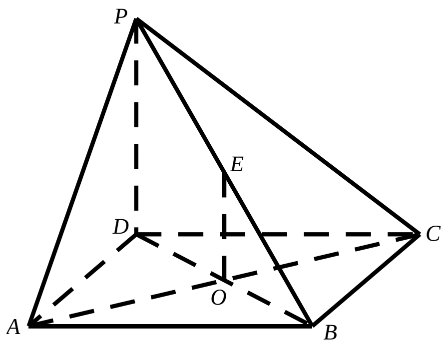


图 10 例题二

例 2 如图 11，四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PD=4$，点 E 是 PB 的中点，连接 E、O。求：

（1）求证 EO 垂直于平面 $ABCD$，并求 EO 的长；

（2）EO 与平面 ADP 有怎样的位置关系？求 EO 到面 ADP 的距离；

（3）直线 PC 与直线 AD 有怎样的位置关系？能求它们之间的距离吗？

在解决例 2 的同时，介绍几种空间距离，如：（1）EO 垂直于平面 $ABCD$，故正是点 E 到平面 $ABCD$ 的距离；（2）线面距离问题可转化成点面距离问题，面面距离问题也是如此；（3）给出公垂线的定义，并引导学生找到异面直线的公垂线，解决异面直线的距离问题。用 PPT 呈现空间距离，比文字定义更易让学生接受；将新知识融入例题讲解，也节约了大量教学时间。

接着，教师指出，例 2 中的立体图形在中国古代被称为阳马。播放微视频，介绍中国古代三个重要立体图形——堑堵、阳马和鳖臑；用动画演示刘徽原理，揭示中国古代数学家在几何学领域的重要成就。

3.6 课堂小结

最后，教师引导学生回顾本节课学习的内容，点明本节课的重要思想。

师：今天我们这节课学了哪些内容？

生：线面垂直的定义、性质与判定定理，求空间距离，阳马、鳖臑、堑堵……

师：好的，以上内容希望大家可以掌握并熟练运用。本节课还与大家分享了一些国外数学家对线面垂直判定的证明方法，以及中国古代数学家对立体几何领域所做出的贡献，希望大家能学习数学家精益求精的精神，并为中国文化的博大精深感到自豪。

学生们纷纷点头。

4 学生反馈

课后我们收集全班 33 名同学对本节课的反馈信息，主要从概念、应用、思想方法和思想情感等方面对学生进行了调查。

在问及线面垂直的数学概念时，学生想到了数学史相关的内容（如鳖臑）、生活中的线面垂直（如旗杆与地面的位置关系） 以及相关的数学知识（如线线垂直）。关于所学知识在问题解决中的应用，大部分同学没有填写，填写正确的同学能思路清晰地解答问题，解答错误的原因包括两种：一种是解题思路正确，但书写中存在问题；另一种是解题思路不正确。

18.18%的学生觉得线面垂直判定定理的证明方法难，不太理解；45.45%的学生觉得有点难度，大概能理解；36.36%的学生觉得不难，可以理解。所有学生都认为，有必要在本节课中讲授线面垂直判定定理的证明；84.85%的学生挺喜欢在课上讲的那种错误证明方法与中国古代的特殊立体图形。

大部分学生都体会到了化归的数学思想，其他如数形结合、由繁化简以及空间逻辑思维等思想也有被学生提到。

从反馈中可见，学生对于中国古代的特殊几何体（阳马、鳖臑）特别感兴趣，一位学生提到，古代数学家证明线面垂直的方法是错误的，让他了解到数学的另一面，相信自己能够正确对待学习中出现的错误，树立数学学习的自信心。

5 结语

本节课中，教师引导学生运用对称法证明了线面垂直判定定理，又通过微视频，向学生展示了勒让德的证明，数学史揭示了“方法之美”。追溯线面垂直判定定理的历史，让学生了解不同时空数学家的贡献，凸显人文元素，数学史展现了“文化之魅”。历史上的证明方法有助于培养学生的逻辑推理、直观想象素养，达成了“能力之助”。引导学生证明定理，

穿越时空与数学家对话，让学生树立数学学习的自信心；再现数学家的错误，让学生正确认识数学研究作为一种文化活动的本质，改变他们对于数学课本知识一成不变的刻板印象；数学家不断探求定理的新证明，让学生感悟数学背后的人文精神；介绍中国古代的数学，激发学生的名族自豪感，数学史彰显了“德育之效”。

考虑到教学内容，为了能够完全达成教学任务，本节课的定理证明环节基本上按照预设展开，教师没有给予学生更多的探究机会和思考空间，从而未能完全实现数学史的“探究之乐”这一教育价值。探究活动的设置与教学任务之间的平衡，正是未来 HPM 视角下的数学教学需要解决的重要问题之一。

参考文献

[1] 郭佩华, 陈光立. 关注概念生成, 发展学生思维——“直线与平面垂直”的教学设计与反思[J]. 中学数学月刊, 2014, (6): 29-31.

[2] 郭虹宾. “直线与平面垂直的判定”的教学难点及教学设计[J]. 数学教学通讯, 2013, (11): 9-11.

[3] 窦楚翘.“直线与平面垂直的判定”课堂实录[J]. 中学数学教学参考, 2016, (22): 9-12.

[4] 方志平. “直线与平面垂直的判定”教学设计[J]. 中小学数学 (高中版), 2014, (10): 31-34.

[5] 蒋明建. 谈新课程中面面平行、线面垂直判定定理教学的困惑与思考[J]. 中小学数学(高中版), 2013, (3): 14-16.

[6] 宫前长. “厘清”思路抓本质, “讲究”逻辑炼能力——新课程“线面垂直”一课的教学思考及感悟[J]. 中学数学, 2016, (5): 13-17.

[7] 费丽靓, 杨光伟. 线面垂直判定的实验教学[J]. 数学教学研究, 2011, 30(03): 63-65.

[8] 蒋秀梅, 黄海生. 感知探究重过程,明义辨析扬理性——“直线与平面垂直的判定”教学与反思[J]. 中小学数学(高中版), 2018, (3): 34-38.

[9] 许金松. 探索发现创新[J]. 数学教学通讯, 2001, (6): 18-19.

[10] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[11] 沈中宇, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊, 2017, (1): 44-47.

[12] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864.

[13] Stewart, S. T. *Plane & Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1891.

[14] 郭书春. 九章算术译注[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2009.

活动信息

HPM 工作室学术沙龙会议纪要

李卓忱

（华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

2018 年 6 月 26 日与 28 日，数学史与数学教育（HPM）工作室学术沙龙在华东师范大学教师教育学院举办，本次活动分为两期，分别对应高中和初中两个学段。工作室中的各位优秀中学数学教师与高校的 HPM 研究者汇聚一堂，总结反思、展望未来。

HPM 工作室学术沙龙旨在搭建一个 HPM 工作室教师的学术交流平台，其主题涵盖了 HPM 课例研究展示、荣誉证书颁发、学期工作总结以及未来工作计划等。参与本次学术沙龙活动的有来自华东师范大学 HPM 研究团队的汪晓勤教授、博士与硕士研究生，还有 HPM 工作室的各位优秀一线中学数学教师。

本学期中，无论是高中还是初中学段，HPM 工作室的教师们都积极参与了 HPM 课例设计、研讨与实施。学术沙龙的第一部分，就是分别由初高中的各位开课教师进行课例微报告。

图 1　HPM 课例研究成果展示及反思

在 6 月 26 日高中学段的活动中，六位高中数学教师汇报了这学期所做的 HPM 课例成果，并分享自己的收获和反思。这六位教师分别选择了四个高中课程主题，尝试从 HPM

的视角开展教学。其中，行知中学的高振严老师与久隆模范中学的胡佳婧老师共同选择了“线面垂直判定定理”，奉贤中学的张益明老师和华东师范大学第二附属中学的蔡东山老师则选择了“两角和的正余弦公式”，HPM 工作室也在不断进行着同课异构的尝试，融入教师自己的想法与风格，碰撞出更多思维的火花。建平中学的杜金金老师以“皮”为主题，以诙谐生动的方式报告了 HPM 视角下的“棱柱的概念”这一课题，而致远高级中学的袁芳老师则开辟了 HPM 视角下高三复习课的先河。

在 6 月 28 日初中学段的活动中，亦有六位初中教师汇报了 HPM 课例研究成果，与大家交流了自己的体验和心得。上师大附属经纬实验学校的顾海萍老师分享了“邻补角、对顶角”教学实践与反思，月浦中学的蔡颖慧老师和杨思中学的张翼翔老师分别分享了二元一次方程组的概念与解法的 HPM 课例研究，世界外国语中学的于骏老师以七巧板为媒介探讨了出入相补的思想，同济大学第二附属中学的黄蓓老师的汇报主题是“全等三角形的判定”，长桥中学的汤雪川老师将“等腰三角形的性质（一）（二）”两节课都尝试着融入了数学史并做了细致的反思。

学术沙龙的第二个环节是由汪晓勤教授为各位优秀的开课教师颁发荣誉证书，这份荣誉证书见证了各位教师的辛勤努力与他们的专业成长。

接下来，HPM 工作室秘书公布了工作室各位教师对本学期课例活动的参与情况，以考勤带动教师的专业发展，鼓励教师们更多地参与到工作室的课例研究中，各位老师也提交了本学年的 HPM 工作室学员学习记录册。

第四个环节是各位工作室的中学教师与高校的 HPM 研究者们一起计划下个学期课例研究活动。课例的实施依赖于工作室的一线教师与高校研究者双方发挥各自优势，进行深度的合作。老师们积极报名，根据自己所处年级与实际教学进度，选定出了下学期即将实施的课例主题。

图 2　工作室的教师与 HPM 研究者热烈讨论

活动的最后一个环节，是高校研究者们从学术角度对各位教师进行课例研究与论文写作的指导，规范教师做课例研究的方式方法及框架，强化教师们的成果意识，促进教师进行课例实施后的深度反思，鼓励教师将课例实施经验与反思结果发表分享。

本次活动是 HPM 工作室自 2018 年 3 月 6 日成立以来首次学术沙龙活动，展示了工作室成立后一个学期的集体成果。HPM 工作室本着“充分发挥基地的示范、引领和辐射作用，加大培养名优骨干教师力度”的宗旨，为落实“立德树人”的教育根本任务而做着努力，在这个学习共同体中，不仅 HPM 课例成果丰硕，更是着重关注于教师的专业发展，为教师们开辟了一条专业进路。未来，高校研究者与一线教师之间会有更广泛更深入的合作，还会有更多的研究成果涌现，传播具有本土特色的 HPM 理论，开出一片数学文化之花。

图 3　HPM 工作室学术沙龙（第一期）合影

图 4　HPM 工作室学术沙龙（第二期）合影