

数学写作在美国

汪晓勤, 柳 笛

(华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 写作与学习的密切关系很早就受到美国教育界的关注, 这反映在 20 世纪 60 年代诞生的“贯穿于课程的写作”运动. 自 20 世纪 70 年代开始, 美国数学教师、数学教育研究者在数学写作方面作了许多尝试、应用和研究, 积累了许多经验和方法, 得出了数学写作在发展数学知识、成就问题解决、培养反思行为、促进情感流露、加强对话交流等方面的重要功能. 数学写作在美国已经较为广泛地被用作数学学习的工具.

关键词: 写作; 数学日记; 教育功能

中图分类号: G40-059.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2007) 03-0075-04

我国普通高中《数学课程标准》指出: 数学课程的评价“既要关注学生数学学习的结果, 也要关注他们数学学习的过程; 既要关注学生数学学习的水平, 也要关注他们在数学活动中所表现出来的情感态度的变化”. 那么, 如何深入了解和客观评价学生数学学习的过程以及数学学习活动中所表现出来的情感态度的变化呢? 数学写作提供了一条途径.

尽管国内很多数学教师和数学教育研究者已经对数学写作(主要限于数学日记)的教育功能进行了理论探讨和实践研究, 但详细介绍国外相关研究的文献并不多见. 本文是美国数学写作实践和研究工作的综述, 供数学写作实践和研究者参考.

1 写作与学习

写作与学习的密切关系很早就受到美国教育界的关注, 这反映在 20 世纪 60 年代诞生的“贯穿于课程的写作”(Writing across the Curriculum) 运动. 70 年代开始, 一些数学教师开始在课堂上引入数学写作活动. 80 年代, 许多学者纷纷提倡将数学写作纳入数学课程^[1]. 90 年代后, 越来越多的数学教师开始在课堂上实施“通过写作来学习”(Writing-to-learn, 简称 WTL) 的活动.

WTL 活动的开展是以有关心理学理论为基础的. Vygotsky 认为, 语言与思维之间有着密切的关系, 而写作需要写作者组织内部语言, 使其完全可以理解, 从而必须对“意义网络”进行主动建构^[1-2]. Bruner 认为, 写作有助于思维^[3]. 据此, 一些美国学者探讨了写作与学习之间的关系. Emig 认为, 写作是一种独特的学习方式, 它能使学生主动地进行意义建构, 使学习者能按自己的步伐前进, 它提供了独特的反馈信息, 因为写作者能马上读到自己写在纸上的思维^[2]; 能促使学生分析、比较事实, 综合相关材料, 深入思考并内化某个重要概念^[4], 因而写作有助于学习. Myers 认为, 在写作活动中, 学生被迫将课上的信息与他们已有的知识联系起来, 进行组织和综合, 从而将概念内化为他们自己的^[3].

就数学学习而言, Countryman 指出, 写作能为学生提供机会, 建构他们自己的数学知识, 能帮助学生解释他们不

熟悉的内容, 理解复杂的系统、探索问题的新解法. Lodholz 则认为^[1], 将口头信息写下来, 乃是学生理解数学的核心. Johnson 认为, 写作之前, 学生必须进行相当多的思考, 组织他们的思想, 并提炼学过的概念; 而写作过程中, 学生得到了表达思想的实践经验. 因此, 写作是一种“极有价值的工具”^[5], 十分有助于数学学习.

2 探索与实践

Geeslin 通过让学生书面描述概率中的 10 对概念(如零与等可能、概率与试验、结果与互斥等)发现, 由于以前没有数学写作的经历, 不同年级学生的表现都很糟糕. 他建议数学教师使用数学写作任务, 认为用书面文字来解释数学概念较之口头讨论有如下优点^[6]:

- 所有学生可同时参与;
- 可以促使学生更加精确地表达;
- 师生可以一起对书面作业进行评论, 并就特定问题展开讨论;
- 提高写作技巧;
- 提供数学与英语课之间的合作活动.

Watson 在代数教学中通过实施数学写作活动发现, 双向对话交流对班级很有益处, 学生感受到教师在倾听、关注他们, 同时学生也在反思, 意识到了自己怎样做才能有助于问题的解决. 结果, 大部分学生的学习成绩得到了提高^[7].

Nahrgang 和 Petersen 进行了为期 10 周的实验^[3], 每周让学生在课内用 3~7 分钟时间完成两次老师指定的日记作业. 如讨论下列陈述: “因式分解与因式相乘是相反的过程”, 并类比上述相反过程, 写一个非数学的关系. 他们发现, 在一则简短的日记中, 学生能够运用大量的技能, 如综合、解释、翻译、分析、评价等. 因此, 他们认为, 不断运用这些技能, 能加深学生对数学概念的理解, 并提高他们表达这种理解的能力.

Mett 在微积分教学中实施了数学写作活动(包括日记、课内写作、项目等形式), 并将学生的数学日记成绩计入期末总成绩中(占 8%). Mett 发现, 数学写作促使学生重构思想、使其更加清晰; 在日记中写出问题, 有助于学生关注

他们不理解的东西,使他们成为自主的学习者;促进师生交流;提高学生的学习成绩^[8]。

Keith 通过让学生写作来暴露和诊断学生的学习问题。他布置给学生的写作内容有:小结(如什么是函数?什么是弧度?)、翻译直观图形(如描述某个函数的图像、函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 和 $y = x^2$ 的图像之间的关系等)、概括解题策略(描述两个分式的加法,排列、组合之间的区别等)、介绍某个算法(如给出距离—时间—速度问题的解法)、给出一个定义或陈述一个定理、向某人传达某个思想(如课本某一页上概念不好理解,按你自己喜欢的方式将该页重写)、编制一个数学问题、推广一个概念、小组研究项目等^[9]。Keith 十分有效地利用了学生的写作作业:或将其展示于课上,供师生讨论;或让学生相互评价,之后让学生对有关内容进行修正;或用于引入一个新的话题等。数学写作活动达到了加深理解、改善学风、增强信任、促进参与、鼓励合作、提高成绩的明显效果。

Havens 在班级开展 WTL 活动时,让学生给小学五年级学生,或一位假想中的朋友或亲戚写一封信^[10],介绍他们所不知道的数学内容(如小数的意义),或者写日记、设计广告、编制文字题等,并给学生的每一篇数学作文评定成绩。Havens 发现,数学写作为学生的学习增加了新的维度,通过数学写作,学生不仅提高了数学能力,而且还提高了理解较难的概念以及与他人交流这种理解的能力。

随着人们对数学写作教学实践探索的深入,写作方式日益丰富,出现了“即兴写作”(Impromptu Writing)这一方式:让学生阅读教师所给的“提示语”(Prompt),按提示语写出自己对数学概念、技能的理解或推广;或让学生写出自己对数学课的看法。如一位代数教师的即兴写作提示语如下:

“记得昨天学过的因式分解吗?想象给自己最要好的朋友写一张条子,说明如何分解因式。写出你的解释,假定你的朋友真的想知道因式分解的方法,他得靠你做出完整的解释。”^[4]

Miller 指出,课内实施“即兴写作”的目的是加强师生之间的对话,通过课堂上 5 分钟的写作活动,每个学生都有机会与教师交流,而教师则有机会了解每一个学生之所想。因此,对于师生来说,即兴写作提示语乃是一种教学策略,它使课堂时间更有价值^[4]。McIntosh 使用了学习记录、日记、解释性写作、创造性写作等多种写作方式^[11]。Elliot 所设置的写作内容有:讨论所学的某个知识点;总结当天的课,谈谈新概念;讨论理解或不理解的内容;给定一个方程,编制一道文字题等^[12]。Legere 设置的数学写作内容有个人的数学经历、难题分析、测验题的类型与解法分析、开放性写作(如对上一次课所学主要内容的总结、对数学课的评论等),他发现,数学写作与合作学习改善了班级环境、消除了学习焦虑;学生对学习更投入,技能得到了提高^[13]。Artzt 则发现,合作学习与数学写作是相互促进的^[14]。Chapman 在代数教学中实施数学写作活动,发现数学日记是引导学生通往自己的思维世界的途径,日记作业对于诊断学生的错误理解、改进教师的教学策略都极有价值^[15]。

Dougherty 采用了指定内容的课内日记写作方式,他设置的提示语有 3 类(如表 1 所示)^[16]:

表 1 提示语的类型

类型	写作内容
数学内容	(1) 描述面积和周长是如何与二项式乘法相关联的。 (2) 菁菁说,具有奇数个因数(因式)的数或单项式具有某些特殊性质。你认为她指的是什么? (3) 我能说出一元二次方程有几种解法,因为…… (4) 如何描述平方根?
过程	(1) 多项式的加减法是_____。 (2) 求一个多项式,使(x+3)为它的一个因式。你是如何求得的? (3) 描述如何快速分解一个三项式。 (4) 我在准备一场考试时……
情感(态度)	(1) 绘出一位数学家的画像,描述一位数学家在干什么。 (2) 给另一学校的一位朋友写信,描述我们的数学课上发生了什么。 (3) 当我看到文字题时,我首先……然后…… (4) 若手头有计算机,你会用它来解方程和不等式吗?为什么?

Barnes 在三角学的教学实践中发现,布置有趣的实际问题,让学生合作完成,写出解决方案,用文字表达自己的思想,可以激发学生思考、探索论证方法,加深他们对问题的理解,减少他们对文字题的恐惧感,将他们置于一个必须运用批判性思维的情境之中^[17]。

Williams 和 Wynne 认为,数学日记乃是数学课不可分割的一部分,原因有 3 个^[18]:

- 日记写作促进学生的概念学习;
- 学生可获得教师的反馈意见,反馈意见澄清了他们的误解;
- 教师能够了解学生的思维过程,同时也能了解学生所关心的问题。

Williams 和 Wynne 采用了指定内容的课内日记写作的方式,每周一篇,一般安排在周五。上课前,在黑板上写下当日的话题,一进教室即可开始写,时间为 5 分钟,写完即交。批阅、评分后,下周一教师把作文发还给学生。Williams 和 Wynne 所用的部分“提示语”见表 2:

表 2 教师使用的提示语

类型	写作内容
情感类	(1) 讨论一个好的教师和学生分别应具备的 3 种品质,并做出解释。 (2) 用自己的话描述或解释“公平”测试的含义。描述你如何为数学考试和小测验做准备的。 (3) 如果分配你来教这个班级的数学,试描述你的课程计划——评分、作业、测验频率、考试或测验的格式等。 (4) 解释你是如何整理数学笔记的,笔记对你有何作用。 (5) 讨论数学日记是否提升你的数学课堂体验?你最喜欢或最不喜欢什么写作内容?为什么?
数学类	(1) 假设你是一位数学教师,要给学生复习有关根式的內容。举 4 个例子,解释每一个问题的解法。 (2) 用自己的话解释勾股定理。讨论应用勾股定理的 3 类问题,解释每一类问题的解法。 (3) 明年你的朋友插到你的班级。你的责任是教他根式的必备知识。 (4) 解释等腰三角形定理,试举数例。 (5) 讨论虚数单位 i 的重要性,列出它的若干用途。 (6) 解释三角形的边角关系,描述考试时可能会遇到的两类问题。 (7) 描述我们已经讨论过的一元二次方程的两种解法。

3 实验与调查

Borasi 和 Rose 对某文科学院修读专业代数课程的 23 名商务专业一、二年级学生进行了为期 3 个学期的数学日记写作实验, 写作内容有: 对某一话题做出回应, 反思数学思想或对数学的情感, 描述最喜爱的数学课, 如何阅读课本, 如何更好地利用课堂时间, 如何解文字题, 数学法则来自何处, 写出可能的测试题, 等等. 研究者开始关注数学日记对教师教学的影响, 他们发现数学日记有 3 个方面的意义^[2].

(1) 学生写数学日记的意义有:

- 表达和反思对课程、数学和学校教育的情感, 可以对学生数学学习中的情感成分起到治疗作用;

- 写课程中的有关材料, 可以促进学生更好地理解该材料并激励他们作进一步探究, 从而增加对数学内容的了解;

- 表达和反思做数学的过程, 可以提高学习和问题解决技能;

- 将自己对数学本质的信念明确地写出来并重新进行评价, 有助于树立更恰当的数学观.

(2) 教师阅读学生数学日记的意义有:

- 通过阅读数学日记, 对每一个学生有更多的了解, 从而可以对每一个学生做出更恰当的评价, 施以更合适的教育;

- 通过学生对课程的反馈信息, 可以迅速对课程做出调整和改进;

- 对于学生、学与教所产生的新的感悟可以导致教学方法的长期改善.

(3) 师生通过日记进行对话的意义有:

- 教师对学生在数学日记中所提的疑难问题和建议直接做出回应, 使得教学更为个性化;

- 日记交流建立师生之间的相互信任, 营造了友爱、和谐的课堂气氛, 为学生主动学习和教师不断改进教学创造了条件.

Stewart 和 Chance 就数学写作的效果对一所中学的 4 个班级进行了调查研究^[19]. 4 个班级中, 两个班级写数学日记, 两个班级不写. 对写作日记的两个班级的安排如表 3:

表 3 数学日记写作安排

时间	写作内容	例子
周一	数学概念与方法	减去一个数即加上该数的相反数, 因为_____.
周三	课程问题	我真正喜欢的数学活动是_____, 因为_____.
周四	自由写作	个人在学习中遇到的问题.

日记在每次课的最后 5 分钟完成, 并交给教师. 教师批阅后返还. 研究者通过前测和后测发现, 参加数学写作的学生的理解评估测试成绩显著提高, 而数学焦虑程度则明显下

降; 进而发现, 数学日记在数学任务、教师在对话中的作用、学生在对话中的作用、促进对话的工具、学习环境、教学分析 6 个方面能很好地满足 NCTM 的数学教学职业标准.

4 概括与总结

以上我们看到, 二十多年间, 美国数学教师、数学教育家在数学写作方面作了许多尝试、应用和研究, 积累了许多经验和方法, 得出了数学写作对于数学教学的许多重要价值. Paugalee 对数学写作的应用作了概括和总结, 并列出了相应的写作内容 (如表 4)^[20].

表 4 数学写作的应用

类别	应用	写作内容
1	发展数学知识	(1) 定义某个重要术语; (2) 解释某个概念; (3) 总结某一节课; (4) 解释作业或考试中的错误; (5) 提供例子, 并说明选择这些例子的理由; (6) 讨论某个法则及其重要性.
2	成就问题解决	(1) 写出问题及其解; (2) 写出怎样求解一道题目; (3) 比较不同的解题方法; (4) 描述如何运用技巧来解决某一问题; (5) 准备一份问题情景的“正式”报告或计划.
3	培养反思行为	(1) 描述一个问题的难易原因; (2) 解释一个答案为何合理; (3) 找出学习中可能遇到的问题并给以解答; (4) 分析作业的质量; (5) 思考不同的思路及其对答案的影响; (6) 讨论两个问题之间的异同.
4	促进情感流露	(1) 写出自己的数学经历; (2) 写出数学对一个人的未来可能起到的作用; (3) 谈谈数学以何种方式改变一个人的生活; (4) 解释帮助或阻碍概念理解的因素; (5) 剖析对自己的数学成绩的感受.
5	加强对话交流	(1) 给教师写条子, 要求老师做更多的解释; (2) 列出课上理解或不理解的思想; (3) 就当天的数学课写一则日记; (4) 总结一下与同学就某一话题的交谈内容; (5) 写出对于某个话题或某节课的想法; (6) 对于某个问题或任务准备一份小组的解答.

1997 年, Silver 对全美数学教师协会 117 名会员的调查表明, 已经有 37% 的教师经常在课堂上进行 WTL 活动^[21]. 今天, 我们在诸如《托马斯微积分》这样的著名数学教材中可以看到大量的 WTL 练习题 (其中上册共含近 170 道!). 由此可见, 数学写作在美国已经较为广泛地被用作数学学习的重要工具之一.

[参 考 文 献]

- [1] Pugalee D K. Connecting Writing to the Mathematics Curriculum [J]. Mathematics Teacher, 1997, 90 (4): 308-310.
- [2] Borasi R, Rose B J. Journal Writing and Mathematics Instruction [J]. Educational Studies in Mathematics, 1989, (20): 347-365.
- [3] Nahrgang C L, Petersen B T. Using Writing to Learn Mathematics [J]. Mathematics Teacher, 1986, 79(6): 461-465.
- [4] Miller L D. Writing to Learn Mathematics [J]. Mathematics Teacher, 1991, 84 (7): 516-521.

- [5] Johnson M. Writing in Mathematics Class: a Valuable Tool for Learning [J]. *Mathematics Teacher*, 1983, 76(2): 117–119.
- [6] Geeslin W E. Using Writing about Mathematics as a Teaching Technique [J]. *Mathematics Teacher*, 1977, 70(2): 112–115.
- [7] Watson M. Writing Has a Place in a Mathematics Class [J]. *Mathematics Teacher*, 1980, 3(2): 518–519.
- [8] Mett C L. Writing as a Learning Device in Calculus [J]. *Mathematics Teacher*, 1987, 80(7): 534–537.
- [9] Keith S Z. Explorative Writing and Learning Mathematics [J]. *Mathematics Teacher*, 1988, 81(9): 714–719.
- [10] Havens L. Writing to Enhance Learning in General Mathematics [J]. *Mathematics Teacher*, 1989, 82(7): 551–554.
- [11] McIntosh M E. No Time for Writing in Your Class? [J]. *Mathematics Teacher*, 1991, 84(6): 423–433.
- [12] Elliott W L. Writing: a Necessary Tool for Learning [J]. *Mathematics Teacher*, 1996, 89(2): 92–94.
- [13] Legere A. Collaboration and Writing in the Mathematics Classroom [J]. *Mathematics Teacher*, 1991, 84(3): 166–171.
- [14] Artzt A F. Integrating Writing and Cooperative Learning in the Mathematics Class [J]. *Mathematics Teacher*, 1994, 87(2): 80–85.
- [15] Chapman K P. Journals: Pathway to Thinking in Second-year Algebra [J]. *Mathematics Teacher*, 1996, 89(7): 588–960.
- [16] Dougherty B J. The Write Way: a Look at Journal Writing in First-year Algebra [J]. *Mathematics Teacher*, 1996, 89(7): 556–560.
- [17] Barnés J A. Creative Writing in Trigonometry [J]. *Mathematics Teacher*, 1999, 92(6): 498–503.
- [18] Williams N B, Wynne B D. Journal Writing in the Mathematics Classroom: a Beginner's Approach [J]. *Mathematics Teacher*, 2000, 93(2): 132–135.
- [19] Stewart C, Chance L. Making Connection: Journal Writing and the Professional Teaching Standards [J]. *Mathematics Teacher*, 1995, 88(2): 92–95.
- [20] Pugalee D K. Promoting Mathematical Learning Through Writing [J]. *Mathematics in School*, 1998, 27(1): 20–22.
- [21] Silver J W. A Survey of the Use of Writing-to-learn in Mathematics Classes [J]. *Mathematics Teacher*, 1999, 92(5): 388–389.

Mathematical Writing in the United States

WANG Xiao-qin, LIU Di

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The intimate relationship between writing and learning was noticed early by educators in the United States, which could be seen from the writing-across-the-curriculum movement in the 1960s. Since 1970s, many American mathematics teachers and educators had introduced writing to learn (WTL) activities into teaching and found many educational functions of mathematical writing, especially of journal writing, such as developing students' knowledge of mathematics, problem solving methods and reflective behaviors, and promoting affective issues and discourse between the teacher and students. Today, writing was widely used as a valuable tool for mathematics learning in the United States.

Key words: writing to learn (WTL); mathematical journals; educational functions

[责任编辑: 陈汉君]