HPM视角下“可化为一元一次方程的分式方程”的教学*

栗小妮[1] 贾 彬[2]
(1. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2. 上海市建平远翔学校，上海 200129)

1 引言

分式方程是初中阶段学生在学习了整式方程以及整式相关知识后，必学的一部分知识，而已有的分式方程的教学实践表明，学生在学习过程中存在以下问题[1]：

- 对分式方程相关概念模糊不清；
- 对找分式的最简公分母的方法掌握不太好；
- 去分母时，漏乘情况严重；
- 当去括号前面是减号时，去括号后，括号后的项不变号；
- 搞不清楚分式方程的增根与无解，利用分式方程解应用题时，等量关系找不全.

“可化为一元一次方程的分式方程”是沪教版七年级上册的教学内容，之前学生已学习过一元一次方程、分式以及分式的运算等内容. 本节课的教学目标是理解分式方程的概念，掌握可化为一元一次方程的分式方程的解法；知道解分式方程时可能产生增根的原因，并掌握解分式方程的验根方法. 其中，教学重点是掌握可以化成一元一次方程的分式方程的解法，以及掌握分式方程转化为整式方程的方法及其中的转化思想. 解分式方程过程中产生增根的原因及如何验根是教学的难点. 在教学实践中，对于学生经常发生的增根或失根错误，教师虽然可以予以批评指正，但可能会打击学生的自信心. 同时，数学文化融入数学教学也日益受到人们的关注. 这就给我们提出了以下问题，如何在本节课中培养学生的探究精神？如何在指出学生错误的同时又能培养学生的自信心？如何在本节课中更好地融入数学文化？这些都是教师需要考虑的问题.

HPM视角下的数学教学可以为以上问题的解决提供一定的启示，英国学者福韦尔总结了数学教学中运用数学史的15条理由，其中第2条为“改变学生的数学观”，第3条为“因为知道并非只是他们有困难，所以得到心理安慰”，第10条为“提供探究的机会”[2]. 从情感态度价值观而言，数学史有利于激发学生学习数学的兴趣，让学生亲近数学；可以揭示数学作为人类文化活动的本质，让学生感受数学背后的人文精神. 结合以上思考与启示，我们从HPM的视角设计和实施本节课的教学.

2 历史素材

2.1 分式方程的历史

在东西方数学文献中，分式方程都出现得较晚. 9世纪阿拉伯数学家花拉子米的《代数学》中已经有分式方程，比如“将10分成两部分，第一部分除以第二部分，第二部分除以第一部分，它们的和是二又六分之一”[3]，相应的分式方程为

$$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}.$$

13世纪，意大利数学家斐波那契在《计算之书》中列举了许多用分式方程求解的问题，其中部分问题源于花拉子米. 例如[4]：

若干人平分10第纳尔，每人得若干. 若加上6人，再平分40第纳尔，则每人所得与前面相同. $\left(\frac{10}{x}=\frac{40}{x+6}\right)$

---

*本文是华东师范大学HPM工作室系列课例之一.

13世纪之后至18世纪中叶以前,很少有数学家关注分式方程. 在沃利斯(J. Wallis, 1616-1703)、麦克劳林(C. Maclaurin, 1698-1746)、欧拉等数学家的代数学著作中,都没有分式方程的影子. 美国学者曼宁(K. R. Manning)检查了19世纪出版的1000多种初等和高等代数著作,发现1805年左右以前的绝大多数著作均未涉及分式方程,一些作者甚至还认为分式方程并不属于初等代数内容[5].

在13世纪的中国,数学家李冶(1192-1279)的《测圆海镜》中出现了分式方程的例子. 如第7卷第2题得到

$$-x^2+8640+\frac{652320}{x}+\frac{4665600}{x^2}=0,$$

李冶将其化为

$$-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0.$$

2.2 增根的历史

斐波那契、桑德森等在解分式方程时都没有遇到增根的情形. 法国数学家拉克洛瓦在出版于1800年的《代数基础》中,给出了含字母系数的分式方程的解法,并考虑了当字母系数使得根的分母为零时,方程无解,但他并未发现方程存在特殊根,也没有验根的意识,因而与增根和失根问题失之交臂.

19世纪中叶之后,许多代数教科书中都含有有关分式方程的内容,但并没有给出分式方程的一般解法,编者往往对分式方程和分数系数方程不加区别(如温特沃斯(G. A. Wentworth, 1835-1906)在《代数基础》中将分式方程和分数系数方程统称为"fractional equation"[6]),对不同的分式方程采用不同的技巧,对增根和失根并没有清晰的认识.

1880年左右,分析的严密化运动引发了人们对于"零能否作除数"问题的大讨论,这在一定程度上促进了分式方程理论的发展,数学家们开始将分式方程作为一个专门的课题来研究. 1882年,美国康乃尔大学数学教授奥利弗等人在其《代数专论》中讨论了分式方程的解法,对增根问题已经有了比较清晰的认识. 书中指出[7],方程

$$N(x)\,P(x)=N(x)\,Q(x)$$

与

$$P(x)=Q(x)$$

不一定是同解方程,因为可能存在x的值,使得$N(x)=0$,而$P(x)-Q(x)\neq 0$,因此,这样的x的值是方程$N(x)\,P(x)=N(x)\,Q(x)$的根,但不是方程$P(x)=Q(x)$的根,因此,在方程$P(x)=Q(x)$两边同乘以含x的某个式子$N(x)$后,就可能会产生增根. 如:

$$1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1-x}-6, \quad \cdots\cdots \text{①}$$

方程两边同乘以$N(x)=x-1$后,得到一元二次方程$x^2-7x+6=0$,于是得$x=1$或$x=6$. 其中,$x=1$是增根.

在解释方程①在化为整式方程之后何以会产生增根时,奥利弗等人认为,若将原方程化为

$$7-\frac{1-x^2}{1-x}=0,$$

再化简得

$$7-(1+x)=0,$$

从而得$x=6$,不会产生增根. 这里,奥利弗等人已经有了使分式方程不产生增根的想法,后来,美国数学家费歇尔(G. E. Fisher, 1863-1920)和施瓦特(I. J. Schwatt, 1867-1937)将其总结为分式方程的完美解法.

奥利弗等人似乎相信,在分式方程两边同乘以分母的最小公倍式,所导出的多项式方程与原方程是同解的. 而我们知道,事实并非如此. 如对于方程

$$\frac{-2x^2}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}=-\frac{x}{x+1}-3, \quad \cdots\cdots \text{②}$$

两边同乘以分母的最小公倍式(x^2-1)得

$$x^2-2x-3=0,$$

于是得$x=3$或$x=-1$,显然,$x=-1$是方程②的增根.

1899年,宾夕法尼亚大学的费歇尔和施瓦特在《代数基础》中给出了一种不会失根也不会产生增根的解法,解法如下[8]:通过移项将给出的分式方程的一边化为零,将另一边进行

通分,并化为最简分式,于是得到原方程的同解方程

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

其中 $(P(x), Q(x))=1$,两边同乘以 $Q(x)$,得多项式方程

$$P(x)=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

满足方程③的 x 的值必定满足方程④,因而③的解必定是④的解,从③到④不会失根;另一方面,由于 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是互质的多项式,因此,满足④的 x 值必满足③,因此从③到④也不会产生增根,所以③和④与原方程是同解方程.

利用上述方法,费歇尔和施瓦特将方程②的左边通分,得

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=0,$$

再将左边化为最简分式,得

$$\frac{x-3}{x-1}=0,$$

两边同乘以 $(x-1)$ 得 $x-3=0$,从而得 $x=3$. 费歇尔和施瓦特将 $(x+1)$ 称为多余的因式(unnecessary factor),正是这种多余的因式导致了增根的出现. 新的解法消除了多余的因式,从而避免了增根,故无需对所得结果进行检验. 19 世纪末,分式方程的历史终于有了完美的结局.

3 教学设计与实施

3.1 展示前置学习成果

本节课采用翻转课堂的形式进行,课前教师让学生自行观看有关分式方程的微视频,自学课本知识,并完成课前导学思考题.

课前视频内容包括三部分:

(1) 斐波那契的生平简介. 13 世纪的意大利数学家斐波那契,出生在意大利比萨的一个商人家庭. 他早年随父亲在北非一带受过教育,后来游历于地中海沿岸各国,向当时著名的阿拉伯数学家学习,大约在 1200 年回国. 1202 年,他根据阿拉伯文与希腊文材料编译而成的拉丁文代表著作《计算之书》,是中世纪数学的最重要的著作之一. 它促进了印度数字系统和代数方法在欧洲的广泛传播,并产生了巨大的影响;

(2) 选用《计算之书》的一题:"若干人平分 10 第纳尔,每人得若干;若加上 6 人,再平分 40 第纳尔,则每人所得与前面相同,求第一次分钱的人数."

(3) 介绍分式及分式方程的发展历史(历史素材中 2.1 所述).

选用意图:通过斐波那契的生平简介加深学生对斐波那契的印象,知道《计算之书》是斐波那契编译而成,在学生心中播种一颗对此感兴趣的种子. 在学生心目中,数学著作往往高大上,遥不可及,但《计算之书》中的这个问题学生能够根据题意列出分式方程,因此选用此题不仅可以让学生认识分式方程,而且有利于缩小数学著作在学生心目中的距离,另外很多知识的产生、发展的过程,并不是一蹴而就的,简要介绍分式方程发展的历史有助于学生体会数学家们对分式方程的认识和研究是从发现到逐步完善的过程.

根据"微视频"和"教科书内容",设计的课前导学思考题如下:

(1) 下列式子:① $\frac{x+y}{2}$;② $\frac{2}{x+y}$;③ $\frac{x+y}{2}=5$;④ $\frac{2}{x+y}=5$;⑤ $\frac{1}{3}(x-2)=1$;⑥ $\frac{1}{x}(x-1)=\frac{1}{3}$ 中,整式方程是:________;分式方程是:________;(填写序号)

你判断的依据是:____________.

(2) 写出视频中斐波那契求 x 的方程,并解此方程.

(3) 解分式方程: $\frac{x}{x-2}=3+\frac{2}{x-2}$.

(4) 检查一下,解以上两个方程得到的 x 的值是否是原方程的解? 请说明理由.

第 1 题正确率非常高,班级 37 人中有 36 人答对,其中 1 人将①、②误认为是方程;第 2 题学生都能将此方程写出,并成功解此方程,部分同学将解代入原方程进行了检验;第 3 题大部分同学用两边乘以最简公分母去分母,将分式方

程转化为整式方程求 x 的值,一部分同学将 x 的值代回原方程检验,认为是增根;少部分同学通过移项通分求 x,发现求不出来,认为方程无解.

课上,教师首先和学生一起分享了课前导学思考题的结果,为进一步的探究做好铺垫.

3.2　探究增根产生原因

"增根"对学生来讲是个陌生的新知,为什么解分式方程会产生增根是本节课的难点,所以在前置思考的基础上,教师采用小组合作探究的方式,让学生思考增根产生的原因,体现"组内合作"的力量. 以下为学生小组讨论后师生交流的教学片段.

师:什么是"增根"?"增根"从何而"增"?

生1:在分式方程两边同时乘以最简公分母去分母时,会使本不相等的两边因为乘以"零"而相等了;

生2:分式方程在去分母后未知数的取值范围被扩大了.

师:请说明"本不相等的两边"是什么意思?

生:比如 $\frac{x}{x-2}=3+\frac{2}{x-2}$,移项,得 $\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=3$, $\frac{x-2}{x-2}=3$,左边 $=1$,右边 $=3$. 所以此方程的两边本不相等.

师:"根"与"增根"有什么关系?

生:"增根"不是原分式方程的根,但它是去分母转化后的整式方程的根.

3.3　了解增根发展历史

在此环节,学生根据前置学习中自主解分式方程的步骤和课上通过小组讨论对增根的理解,归纳出解分式方程的一般步骤,通过练习解分式方程: $\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$,熟悉解分数方程的一般步骤,学会验根. 然后,教师通过微视频介绍增根的历史(微视频内容为历史素材中2.2),让学生了解分式方程的增根从发现到解决经历了约一个世纪的漫长历程,让学生了解数学活动的本质 —— 数学是人类的文化活动,数学家也会犯错,数学学习和数学研究都会遇到困难、错误和失败,在学习过程中不要因为出错而失去信心. 通过学生对美国教授费歇尔和施瓦特的不会产生增根的一般解法的好奇,鼓励学生大胆尝试重走数学家的研究之路.

观看视频后,教师向学生展示了一位同学解分式方程

$$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$$

的方法.

$$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{x-2}=0,$$

$$\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}-\frac{16}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{x^2-4x+4-16-x^2-4x-4}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{-8x-16}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{-8(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{-8}{x-2}=0,$$

∴ 原方程无解.

然后,教师向学生解释,这位同学的解法就是美国宾夕法尼亚大学的教授费歇尔和施瓦特在他们编写的《代数基础》中给出的分式方程的一般解法,用这个一般解法解分式方程不会产生增根,被称为"完美解法",并让学生小组研究一下他的解题步骤,学生得到用"完美解法"解分式方程的一般步骤为:先将方程移项通分,化为最简分式,根据分子为零,可得到分式方程的解,若分母为常数,则原分式方程无解.

3.4　对照目标自主评价

本环节教师设置了两个问题,问题1目的在于引导学生对照学习目标小结本节课的知识,养成学习—总结—学习的习惯,培养学生的反思整理的能力. 问题2的目的是呼应前置学习中关于斐波那契和他的分式方程的历史线索,让学生发挥想象,大胆与历史中的数学家对话.

问题1:请对照学习目标自我检查,本节课你的学习达成度怎样?

问题2:若斐波那契通过时光隧道来到我们的课堂,你想对他说什么?

生1:我很想知道当时是怎样学习数学的?

生2:那时交通不发达,你们是怎么交流数学问题的?

4 学生反馈

本节课结束,共有34位同学参与了问卷调查.对于问题"这节课你听懂了吗?",100%的同学选择"完全听懂".对于问题"你喜欢这节课吗?无论是否喜欢,都请你说明理由,或者用具体教学情节举例说明",33位同学表示喜欢,其中21位同学的理由是这节课既有分式方程的概念,又有分式方程解法,还知道了分式方程的历史和增根的渊源,内容丰富,有趣味;10位同学的理由是喜欢这节课的互动形式,有小组讨论,有观看微视频;1位同学的理由是喜欢这节课是因为和数学考试有关.1位同学不喜欢,理由是用太多时间讲历史和由来,是在浪费时间.

对于问题"你希望教科书里介绍分式方程的由来和发展概况吗?为什么?",30位同学表示"希望",可以了解更多的知识,拓宽视野,增加兴趣,促进理解.4位同学表示"不希望",其中2位同学认为课堂上听故事更有趣;1位同学认为自己去寻找这方面的知识更快乐;1位同学认为由来和发展不重要.

5 小结反思

本节课以介绍历史人物开篇,以历史上的原题或改编后的历史问题作为研究的载体,在学生自行探究如何解分式方程的基础之上,借助数学史讨论增根产生的原因,介绍分式方程增根研究的历史,强化学生对增根的认识,实现了"知识之谐",营造了"探究之乐".

分式方程的出现和增根的发现都不是一蹴而就的,都经历了很长的时间,将这段历史展示在学生面前,一是将静态的数学知识转化成动态发展的故事,激励学生保持好奇之心,大胆发现,主动探究;二是在冰冷的数学中融入人文的知识,让数学变得温暖,容易亲近.向学生充分展示了历史上数学家也会犯错误,说明了错误并不可怕,只要知错能改即可;与历史上数学家解同一问题,学生得以亲近数学,也促进了学生对数学本质的认识,通过课堂观察和问卷及访谈,我们看到,学生的良好表现不是仅仅停留在知识(与技能)的掌握这样一个层面,数学史的融入还使绝大多数学生在感受数学悠久的历史、古人的智慧以及数学知识的传承的同时,对古代数学问题及数学家产生了浓厚的兴趣,确实将"冰冷的美丽"转化成了"火热的思考",培养学生学会数学的思维,实现了数学史的"文化之魅"、"德育之效".

教师利用学生对微视频中美国宾夕法尼亚大学两位教授的一般解法的好奇心,展示一位学生解分式方程的另一种解法,这种解法和去分母的解法相比虽然较为繁琐,但这种方法竟然与两位教授的一般解法相同,增加了这位学生自信心的同时也让其他学生认识到分式方程的解法并不唯一,体现了数学史的"方法之美",学生对方式方程不同解法的认识和理解,也可促使学生从不同角度认识数学问题,训练学生的思维,体现了数学史的"能力之助"价值.

参考文献

[1] 张清亮.八年级学生在学习分式方程中的困难与教学策略研究[D].贵州:贵州师范大学,2016.

[2] Fauvel, J. Using history in mathematics education [J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 11(2): 3-6.

[3] Al-Khwarizmi. The Algebra of Mohammed Ben Musa [M]. London: J. L. Cox, 1831: 44.

[4] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017.

[5] Manning K R A. A history of extraneous solution [J]. Mathematics Teacher, 1970, (2): 166.

[6] Wentworth G A. Elements of Algebra [M]. Boston: Ginn & Company, 1891: 130-136.

[7] Oliver J E, Wait L A, Jones G W. Treatise on Algebra [M]. Ithaca: Dudley F. Finch, 1887.

[8] Fisher G E, Schwatt I J. Elements of Algebra [M]. Philadelphia: Fisher & Schwatt, 1899: 380-390.