使用否定属性策略的问题提出

汪晓勤，柳 笛

（华东师范大学 数学系，上海 200062）

摘要：数学问题提出具有重要的教育价值. 使用否定属性策略的问题提出可以帮助教师分析学生数学知识的理解状况. 研究发现：在给定的解析几何情境下，中学生能够运用否定属性策略来提出各种各样的新数学问题；学生所提问题包括保留所求项和改变所求项两大类，每一类又包括改变数据和改变曲线类型两种情形；相当多的学生在否定属性时，未能考虑新旧属性之间的相容性，因而提出了无效的问题. 总体上看，学生在属性列举、属性否定和问题提出上表现欠佳.

关键词：问题提出；解析几何；否定属性策略

中图分类号：G424 **文献标识码**：A **文章编号**：1004–9894（2008）04–0026–04

早在 20 世纪上叶，问题提出已经开始受到心理学家的关注. 80 年代以后，众多学者开始研究并强调问题提出的教育价值. Silver 总结了数学问题提出在 6 个方面的意义[1]：（1）问题提出是创造性活动或特殊数学才能的特征；（2）问题提出是探究性教学的特征；（3）问题提出是数学活动的特征；（4）问题提出是改进问题解决的手段；（5）问题提出是了解数学理解状况的窗口；（6）问题提出是改善学生数学情感的手段.

1969 年，美国学者 Brown 和 Walter 提出一种否定属性（若非－则如何）的问题提出策略，他们将这种策略分为 5 级水平[2]：水平 0——选择出发点（如定理、具体材料、问题等）；水平 1——列出各属性；水平 2——否定各属性，列出相应新属性；水平 3——根据新属性，提出新问题；水平 4——分析、解决所提新问题. Lavy 和 Bershadsky 曾以两道立体几何问题为出发点，让师范生利用上述策略来提出新问题[3]，据此研究问题提出对师范生的教育价值.

近年来，问题提出日益受到国内学者的关注[4~8]，否定属性这一十分有效的问题提出策略也随之进入人们的视野（国内已有文献称之为“否定假设”[4]），但针对该策略所进行的调查研究尚不多见，况且 Lavy 和 Bershadsky 的研究对象只是师范生. 我们关心的是：给定一个问题作为出发点，利用否定属性策略，我们的高中生能提出什么样的新问题？在 Brown 和 Walter 的 1～4 级水平上，他们的表现如何？Silver 所总结的问题提出的第 5 个意义能否得到印证，即教师是否可以通过学生所提出的问题来了解他们的数学理解状况？本研究正是围绕这些问题展开的.

1 研究过程

本研究采用测试的方法. 选择高中解析几何问题作为问题提出的出发点，问题采自 2002 年上海高考卷. 题目为“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点，问线段 DE 的长度为多少？”改变一个或若干个已知条件，或改变所求项，尽可能多地编制出新的题目. 例如，你可以写出如下问题：“已知点 $A(-2,0)$ 和 $B(2,0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点，问线段 DE 的长度为多少？”

选择该问题作为出发点的理由是：(1)圆锥曲线与直线相交，是历年高考解析几何问题的典型情境，在解析几何中具有代表性；(2) 学生已经有了解决这类问题的一定经验；(3) 该问题的属性很多，以下所列为其中一部分：①给定点 A 和 B；②点的个数为 2；③点 A 和 B 在 x 轴上；④点 A 和 B 关于原点对称；⑤点 A 和 B 的横坐标的绝对值为 $\sqrt{3}$；⑥点 A 和 B 的坐标是具体的数值；⑦已知动点 C 到 A、B 的距离之差；⑧点 C 到 A、B 的距离之差的绝对值等于 2；⑨点 C 到 A、B 的距离之差的绝对值是个具体的数值；⑩问题涉及一条直线；⑪直线的斜率为 1；⑫直线的斜率为一个具体数值；⑬直线在 y 轴上的截距为–2；⑭直线在 y 轴上的截距为一个具体数值；⑮ C 的轨迹与直线有两个交点；⑯动点的轨迹为双曲线；⑰本题要求的是线段的长度；⑱本题是一个计算题…….

在水平 2 上，我们对所列属性进行否定，列出新的属性. 例如，对于属性①，我们问：“如果已知的不是两个点 A 和 B，情形将如何？”用 Brown 和 Walter 的记号（(~ 1) 表示对属性①的否定，以下类推），可以部分列出如下新的属性. ① $(\sim 1)_1$：给定一点 A 和一直线 l；② $(\sim 1)_2$：给定两条直线 l_1 和 l_2. 对于属性⑦，我们问：“如果已知的不是距离之差的绝对值，情形将如何？”可以部分列出如下新的属性：① $(\sim 7)_1$：已知 C 到 A、B 距离之和；② $(\sim 7)_2$：已知 C 到 A、B 距离之积；③ $(\sim 7)_3$：已知 C 到 A、B 距离之比；④ $(\sim 7)_4$：已知 C 到 A、B 距离之平方和. 对于属性⑭，我们问：“直线在 y 轴上的截距不是一个具体的数值，情形

收稿日期：2008–03–07
作者简介：汪晓勤（1966—），男，浙江开化人，博士，教授，主要从事数学史与数学教育研究.

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将如何？”可以部分列出如下新的属性：①$(\sim 14)_1$：直线在 y 轴上的截距为 m；②$(\sim 14)_2$：直线在 y 轴上截距的范围是$[-1，1]$．对于属性⑰，我们问：“如果所求的不是线段的长度，情形将如何？”可以部分列出如下新的属性：①$(\sim 17)_1$：求线段 DE 的中点；②$(\sim 17)_2$：求线段 DE 的垂直平分线方程；③$(\sim 17)_3$：求三角形 ADE 的面积；④$(\sim 17)_4$：求 OD^2+OE^2（O 为坐标原点）；⑤$(\sim 17)_5$：判断△DOE 的形状．

在水平 3 上，我们基于一个或若干个新属性提出新问题．例如，根据$(\sim 14)_2$，我们可以提出如下问题：“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，点 C 的轨迹与直线 $y=x-m$ 交于 D、E 两点，当 $-1\le m\le 1$ 时，求线段 DE 长度的取值范围．”根据$(\sim 1)_1$、$(\sim 7)_4$ 和 $(\sim 17)_2$，我们可以提出如下问题：“已知点 $A(\sqrt{3},0)$ 和直线 L：$x=-\sqrt{3}$，动点 C 到点 A 和直线 L 的距离平方之和等于 12，点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点，求线段 DE 的垂直平分线的方程．”

选择上海市某中学 3 个高二班级共 169 名学生作为被试，测试时间为 30 分钟．被试均已学过圆锥曲线知识．收回有效卷 169 份．

2　学生所提问题的分类

所有的 169 名被试都至少提出了一个新的数学问题．如果去掉和原题一模一样的题目，以及两道没有写完的题目，那么，169 名被试总共提出 604 个数学问题．我们将 604 个问题分成（I）所求项不变、（II）所求项改变两大类．

2.1　所求项不变

该类问题又分成（I.1）只改变已知数据和（I.2）改变曲线类型两个子类．既改变了数据又改变了曲线类型的问题归于 I.2 类．

第 I.1 类包括：(1) 将原数据换成另一特殊数据．这里，被试主要对属性③~⑥、⑧、⑪、⑬进行否定后提出新问题．如：“已知点 $A(0,-\log_2 5)$ 和 $B(0,\log_2 5)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，点 C 的轨迹与直线交于 D、E 两点，问线段 DE 的长度为多少？”(2) 将原数据换成某个数据范围．如：对属性⑧作出否定，即 $\left|CA-CB\right|<2$；(3) 将原数据一般化（以参数表示）．对属性⑥进行否定：“已知点 $A(\cos\alpha,\sin\beta)$ 和 $B(\sin\alpha,\cos\beta)$（α、β都是锐角），动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 5，动点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D、E 两点，求线段 DE 的长度．”

第 I.2 类“改变曲线类型”包括：(1) 将原曲线类型换成另一特殊类型．否定属性⑦、⑩和⑯．如“动点 C 到 A、B 两点的距离之和为 9”；(2) 将原曲线类型一般化．否定属性⑩和⑯，将双曲线或直线换成其他不同类型的曲线，曲线方程中的常数用字母来表示．

2.2　所求项改变

该类问题又分成 3 个子类：(II.1) 已知条件不变；(II.2) 改变已知数据；(II.3) 改变曲线类型．既改变了数据又改变了曲线类型的问题归于 II.3 类．

第 II.1 类指的是只否定属性⑰和⑱，提出新问题．新的属性包括：①动点 C 的轨迹方程；②D 和 E 的坐标；③DE 的中点；④线段 AD、AE 和 BD 的长度；⑤△ODE、△ADE、△BDE、四边形 $ABDE$ 的面积、以双曲线上一点 P 和焦点 A、B 为顶点的三角形；⑥DE 的中垂线方程；⑦与双曲线只有一个交点的直线；⑧DE 在 x 轴上的射影；⑨已知直线与渐近线的交点；⑩已知直线与渐近线的夹角；⑪DA 和 DB、DE 和 DB、BD 和 BE、AD 和 AE、AD 和 BE 的夹角；⑫以 DE 中点为圆心的圆；⑬与双曲线共焦点的椭圆；⑭与双曲线有共同渐近线的轨迹方程；⑮与已知双曲线相关的椭圆或抛物线方程；⑯ΔCDE 面积的取值范围；⑰双曲线上满足一定条件的点等．最引人注目的是否定属性⑱所提出的问题：“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，直线 $y=x-2$ 交点 C 的轨迹于 D、E 两点，交其渐近线于 F、G，且在直线上的顺序为 D、F、G、E，求证：△DOF 与△EOG 的面积相等．”全部 607 个问题中只出现两道证明题．

第 II.2 类指的是既否定属性⑰，又否定其它属性，提出新问题．包括：(1) 将原数据换成另一特殊数据．在否定若干其它属性的情况下，属性⑰被替换为新属性，如直线方程、直线与双曲线的交点、双曲线上满足特殊条件的点、△ADE 面积，等．如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2．点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D_1、E_1 两点，与直线 $y=-x-2$ 交于 D_2、E_2 两点，与直线 $y=x+2$ 交于 D_3、E_3 两点，与直线 $y=-x+2$ 交于 D_4、E_4 两点．推断 D_1E_1、D_2E_2、D_3E_3、D_4E_4 的大小关系．”(2) 将原数据一般化．将属性⑨、⑫、⑭代以字母，属性⑰代以某个对象（如斜率 k）的取值范围、DE 的最值、DE 中点的轨迹，等等．如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，点 C 的轨迹与直线 $y=kx+b$（$k\neq 0$）交于 D、E 两点，$DE=4\sqrt{5}$，求 $y=kx+b$ 的解析式．”

II.3 类包括 (1) 将曲线类型换成另一类型．否定属性⑦或⑩，将属性⑰代以最值、直线的斜率与截距的取值范围、轨迹、切点等．如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之和为 4，点 C 的轨迹与直线 $y=ax-2$ 有两个交点，求 a 的范围．”又如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之和为 10，点 C 的轨迹与直线 $y=x$ 交相切，问切点在哪儿？”(2) 将原曲线类型一般化．否定属性⑦或⑩，代以另一类曲线，但曲线方程中的常数以字母表示．如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之和为 4，若曲线 $x^2-y^2=r^2$ 与

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

C 的轨迹相切，求 r.”

各类问题的分布见表 1. 从表 1 可见：(1) 虽然在前面所列的 18 个属性中，共有 16 个被列举，但多数学生只列举了属性⑤、⑧、⑪和⑬. 总的来说，大多数被试在水平 1 上表现较差.（2）在所有 604 个问题中，将原数据换成其它特殊数据的问题共有 346 个，占总题数的 57.28%. 多数被试在否定原属性后，所替换的新属性十分单一，仅为不同数据而已. 将原曲线类型换成另一特殊类型的问题共有 114 个，占总题数的 18.87%. 这类问题中，新属性同样十分单一，将“差”替换为“和”占了绝大多数. 将数据或曲线一般化（包括数据范围）的问题共有 53 个，只占总题数的 8.78%. 因此，从总体上看，被试在水平 2 上表现欠佳.

3　无效的问题

尽管所有的被试都至少提出了一个数学问题，但这些问题中有不少是错误的、无解的或缺少条件的. 错误的数学问题主要是指否定部分属性之后，新属性与其它属性之间相互矛盾的问题，包括实轴大于或等于焦距，焦距小于或等于实轴，以及直线与双曲线或椭圆没有交点等情形.

表 1　被试所提问题的类型及其频数

问题类型			被否定的属性	题数	百分比(%)
所求项不变	改变已知数据	将原数据换成另一特殊数据	③～⑤、⑧、⑪、⑬	229	37.91
		将原数据换成某个数据范围	⑧	1	0.17
		将原数据一般化	⑥	1	0.17
	改变曲线类型	将原曲线类型换成另一类型	⑦、⑩、⑯	74	12.25
		将原曲线类型一般化	⑩、⑯	3	0.50
所求项改变	已知条件不变		⑰、⑱	91	15.07
	改变已知数据	将原数据换成另一特殊数据	③～⑤、⑧、⑪、⑬、⑰	117	19.37
		将原数据一般化	⑨、⑫、⑭、⑰	42	6.95
	改变曲线类型	将原曲线类型换成另一类型	⑦、⑩、⑮、⑰	40	6.62
		将原曲线类型一般化	⑦、⑩	6	0.99
总计				604	100

3.1　双曲线的实轴大于或等于焦距

对于双曲线来说，如果保持半焦距 $c=\sqrt{3}$ 不变，那么实半轴 a 的范围是 $0<a<\sqrt{3}$，因而“C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值”的范围是 $(0,2\sqrt{3})$；如果保持实半轴 $a=1$ 不变，那么半焦距的范围 $(1,+\infty)$，因而 A、B 横坐标绝对值的范围是 $(1,+\infty)$；如果半焦距和实半轴都改变了，那么前者必须大于后者. 不少被试在改变数据时并没有考虑到这一点，如：保持其它属性不变，将属性⑧替换为“C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 4”.

3.2　椭圆的焦距大于或等于长轴

对于椭圆来说，如果保持半焦距 $c=\sqrt{3}$ 不变，那么长半轴 a 的范围是 $(\sqrt{3},+\infty)$，因而“C 到 A、B 两点的距离之和”的范围是 $(2\sqrt{3},+\infty)$；如果保持长半轴 $a=1$ 不变，那么半焦距的范围 $(0,1)$，因而 A、B 横坐标绝对值的范围是 $(0,1)$；如果半焦距和长半轴都改变了，那么前者必须小于后者. 部分被试在替换属性时没有考虑到这一点. 如：保持其它属性不变，将属性⑦替换为“C 到 A、B 两点的距离之和为 2”.

3.3　直线与双曲线或椭圆没有两个交点

原题中双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$. 若保持焦距、实轴不变，则要使直线 $y=kx+b$ 与它有两个交点，k 和 b 必须满足 $|k|<\sqrt{b^2+2}$. 对于椭圆，也可作类似的判断. 如，若保持焦距不变，长轴设成 4，则椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，要使直线 $y=kx+b$ 与它有两个交点，k 和 b 必须满足 $|k|>\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2-1}$. 少数被试未能考虑到这个制约条件，结果导致所提问题无效. 如，保持其它属性不变，将属性⑪替换为直线 $y=3x-2$.

3.4　其它错误问题

这类错误主要是由于概念不清引起的. 如“将已知的曲线说成是抛物线”、将所求项改为 D、E 所在直线的解析式”、“线段 DE 中点的轨迹”、“DE 与 x 轴正半轴所围成的面积”、曲线的焦点，等等. 还有一些问题毫无意义，如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 2，D、E 分别为 x 轴正半轴和负半轴上的点，问 D、E 的横坐标分别取何值时，DE 的长度最小.”

3.5　缺少条件问题

由于数据一般化，所提的问题条件不够. 如“已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A、B 两点的距离之差的绝对值为 3，动点 C 的轨迹与直线 $y=kx-b$ 交于一点，求该直线的方程.”

各类问题中各类错误的分布如表 2 所示. 从中可见，双曲线或椭圆的实（长）半轴、虚（短）半轴与半焦距之间的矛盾关系所导致的错误占了近 7 成.

表 2　无效的数学问题统计

类别	特征	所求项不变		所求项改变			题数
		数据改变	曲线改变	数据不变	数据改变	曲线改变	
Ⅰ	双曲线的实轴大于或等于焦距	39	2	0	4	2	47
Ⅱ	椭圆的焦距大于或等于长轴	0	34	0	2	11	47
Ⅲ	直线与双曲线或椭圆没有两个交点	6	0	0	0	0	6
Ⅳ	概念不清导致的其它错误	1	1	10	11	2	25
Ⅴ	条件不足的问题	0	2	2	5	1	10
	总数	46	39	12	22	16	135

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

4 结　论

从给定的解析几何问题出发，利用否定属性策略，高中生能够提出一些新的数学问题，学生所提问题包括所求项不变和所求项改变两大类，每一类又包括改变数据和改变曲线类型两种基本情形．总体上看，问题提出的水平并不高，主要表现在属性列举（水平 1）和新属性的选择（水平 2）单一，多局限于于具体数据的更改，多局限于双曲线与椭圆，很少将数据一般化，或扩大动点轨迹的种类，导致多数问题水平不高（水平 3）；相当一部分学生在否定属性时，未能考虑新旧属性之间的相容性，因而提出了错误的或无效的问题．从被试所提的数学问题可以看出，他们中大多数人对椭圆和双曲线定义掌握较好，但一部分人对实（长）半轴、虚（短）半轴与半焦距之间的关系缺乏理解，对动点轨迹问题了解不多．答卷时，绝大多数学生只是为提问而提问，并没有对所提问题作出分析的意识，因而，学生在否定属性策略的水平 4 上表现最差．学生在 1～4 级水平上不如人意的表现也折射出他们问题提出经验的缺乏．

测试结果表明，提出问题与解决问题一样，也为教师了解学生对数学概念的理解和掌握情况提供了一扇窗口．虽然仅仅一次测试未能让学生在概念理解上获益，但如果教学中经常安排基于否定属性的问题提出活动，让学生学会列举、否定属性、选择新属性，提出并分析、解决新问题，必能加深学生对有关概念的理解．

[参 考 文 献]

[1] Silver E A. On Mathematical Problem Posing [J]. For the Learning of Mathematics, 1994, 14(1): 19–28.

[2] Brown S I, Walter M I. The Art of Problem Posing [M]. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1983.

[3] Lavy I., Bershadsky I. Problem Posing Via “What If Not” Strategy in Solid Geometr—a Case Study [J]. Journal of Mathematical Behavior, 2003, 22: 369–387.

[4] 郑毓信．努力培养学生提出问题的能力[J]．数学教学研究，2000，(6)：1–4．

[5] 聂必凯．数学问题提出研究综述[J]．数学通报，2003，(1)：9–10．

[6] 聂必凯．关于数学问题提出的若干思考[J]．数学教育学报，2003，12（2）：24–26．

[7] 夏小刚．国内外数学问题提出教学研究的回顾与反思[J]．数学教育学报，2005，14（3）：17–20．

[8] 李祥兆．数学问题提出的实证研究述评[J]．数学教育学报，2005，14（4）：63–66．

Problem Posing Based on What-if-not Strategy

WANG Xiao-qin, LIU Di

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: Problem posing was of great value in mathematics. The problem posing based on “what-if-not” strategy could help teachers know about students’ understanding situation of mathematics knowledge. It was revealed from a problem posing test that senior middle school students were able to pose a variety of new mathematics problems using this strategy under the situation of analytic geometry; that the problems posed by the students consist of two types, namely keeping and changing problem questions, each of which consisted of two subcategories, namely changing the data and changing the type of curves. Quite a lot of subjects were ignorant of the consistency of attributes while negating the original ones and thus posing invalid problems. Generally speaking, the subjects’ performance of listing attributes, negating attributes and posing new problems was poor.

Key words: problem posing; analytic geometry; “what-if-not” strategy

[责任编校：陈隽]

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net