

理论与实践的融通 思想与行动的碰撞

数学史与数学教育关系研究小组(简称HPM)的建立与“新数运动”强烈反对“数学教育的历史观念”的主张密切相关,她主张数学史是“治愈教条主义的一剂良药”,认为数学不仅仅是一种语言,还是一种人类的活动。

21世纪初,HPM传入中国。起初,HPM视角下的教学实践沿着两条路径开展:具有理论智慧、思想智慧的高校研究者从教育取向的数学史研究、历史相似性的调查开始,进行融入数学史的教学设计;具有实践智慧、行动智慧的一线数学教师在史料有限且科学性得不到保证的情况下进行数学史融入课堂教学的尝试。其结果可想而知。

在这样的大背景下,汪晓勤教授领衔的HPM团队经过十余年的尝试,对一百多个融入数学史的课例精心打磨,探索出了共同体支持下的HPM教学实践与案例开发模式,即高校HPM研究团队、教师专业发展指导团队、一线教师团队、职前教师基于“立德树人”的教育根本任务,以HPM视角下的案例开发为载体,遵循一定的流程,在案例开发过程中深入研讨、优势互补、共同成长,借助案例的实施来促进学生的全面发展;在借鉴与吸收国内外优秀研究成果的基础上构建出了具有特色的“一二三四五六”的教学理论,并反哺于教学实践,在“上通数学,下达课堂”“上通理论、下达实践”的路上迈出了坚实的一步。

理念

HPM视角下的小学数学教学

□ 汪晓勤

一、数学史的教育价值

早在19世纪,一些数学家和数学史家就已经开始关注数学史的教育价值了。美国数学史家卡约黎(F. Cajori)称,一门学科的历史乃是“使面包和黄油更加可口的蜂蜜”,认为数学史在课堂上可以激发学生的学习兴趣;又称,“学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难”^[1],这就是我们通常所说的“历史相似性”,历史为教学提供了一

面镜子。卡约黎由此断言:数学史是数学教学的有效工具^[2]。此后,数学家、数学史家和数学教育家们对数学史的教育价值进行了更深入的讨论,数学史与数学教育关系国际研究小组(International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics,简称HPM)由此诞生,使得“数学史与数学教育之间的关系”成为数学教育学科中与数学教育心理学(PME)并列的学术研究领域。通常所说的HPM,指的是“数学史与数学教育之间的关系”这一研究领域本身。

[1] Cajori F. The pedagogic value of the history of physics. The School Review, 1899, 7(5): 278-285.

[2] Cajori F. A History of Elementary Mathematics. New York: The Macmillan Company, 1896.



1991年,英国学者弗福尔(J. Fauvel)基于对已有文献的分析,总结出数学教学中运用数学史的15条理由。十年后,古里克斯和布洛

姆(Gulikers & Blom)建立了关于数学史教育价值的三维分类框架^[1],并且在每个维度上对教师和学生分别作出讨论,见表1。

表1 古里克斯和布洛姆对数学史教育价值的分类

类别	教师	学生
概念视角	(1) 个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展过程(历史发生原理),因而数学历史是数学教学的指南 (2) 学生的错误和认知障碍与数学史上的错误和认知障碍是有关联的,了解历史上的重要时刻可以为教师提供预测学生认知障碍的工具 (3) 丰富教师的知识储备和教学资源 (4) 有助于更好地理解数学的本质	(1) 帮助学生理解数学 (2) 使学生获得心理安慰 (3) 通过古今数学方法的对比,拓宽学生的思维 (4) 帮助学生以非线性方式(即非演绎方式)学习 (5) 提供另类方法,促进学生思考
文化视角	(1) 发展多元文化进路 (2) 加强数学与其他学科之间的联系	(1) 有助于解释数学在社会中的角色以及数学发展的内外因 (2) 展现数学是人类的文化活动 (3) 消除数学学习上的性别差异,鼓励女生学习数学
动机视角	(1) 创造活跃的课堂氛围 (2) 获取有用的史料,激发教师对所教主题的热情	(1) 增加学生的学习兴趣 (2) 创造学生的学习动机 (3) 使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心 (4) 培养优秀生的远见卓识

[1] Gulikers I, Blom K. 'A historical angle': A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, 47: 223-258.

近年来,我们通过数学史融入数学教学的大量实践,印证了数学史的许多教育价值,结合西方学者的讨论和总结,这些价值可以分成六类,即知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效。

知识之谐,指的是借鉴、重构历史的数学教学,使得知识的发生和发展自然而然,符合学生认知基础,易于为学生所理解。方法之美,指的是通过引入历史上的数学思想方法,拓宽学生的视野,让学生在古今不同方法的比较中,体会数学思维的灵活性、丰富性和创新性。探究之乐,指的是一个主题的历史为教师设计探究活动提供借鉴,数学史上丰富多彩的问题为学生提供了探究机会,学生在探究过程中积累数学活动经验,像数学家那样获得成功的体验。能力之助,是指数学史有助于培养学生的数学核心素养以及阅读、写作等方面的能力。文化之魅,是指数学史揭示了数学与现实世界或人类其他知识领域之间的密切联系,呈现了数学之美,展示了数学文化的多元性。德育之效,是指数学史恢复了数学背后的人文精神,有助于培养学生积极的情感态度 and 价值观,让他们拥有历史感,并树立良好的品行和操守。

鉴于数学史丰富的教育价值,越来越多的数学教育工作者对 HPM 产生浓厚的兴趣。HPM 领域的研究课题很多,图 1 给出了小学 HPM 研究的六个重要课题。这些课题中,一线

教师更感兴趣的是数学史融入数学教学的实践与案例开发。融入数学史的数学教学,通常称为“HPM 视角下的数学教学”。

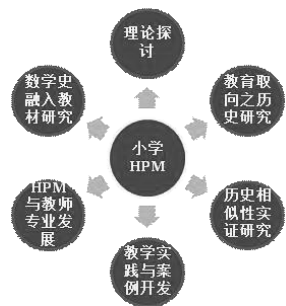


图1 小学HPM的若干研究主题

二、小学数学的历史材料及其运用方式

对于小学一线教师来说,HPM 视角下的数学教学是一件知易行难的事情。首先,大多数教师并未接受过数学史教育,对所讲授主题的历史不甚了了,手头也缺乏可用的数学史材料,可谓“巧妇难为无米之炊”。其次,大多数教师缺乏 HPM 知识,很多教师对于“数学史融入数学教学”的认识甚至只停留在讲故事的层面;即使有了数学史材料,他们也往往不知道如何对其进行裁剪、加工,并将裁剪、加工后的材料纳入教学设计。

小学数学的历史材料大致可以分成“人物与事件”“概念与思想”“运算与法则”“问题与求解”“公式与命题”“工具与符号”六类,表 2 给出了与有关知识点对应的例子。

表2 小学数学的历史材料

类别	例子	知识点
人物与事件	刘徽与小数的发明;泰勒斯与三角形内角和的发现;祖冲之与圆周率的计算;开普勒与圆面积公式的推导;韦达与字母表示数;阿基米德与大数的表示	小数;三角形内角和;圆周率;圆的面积;字母表示数;大数的认识
概念与思想	分数和小数的起源;角概念的历史;《墨经》和《几何原本》中的圆的定义;负数的历史;用字母表示数的历史;位置表示方法的历史	分数;小数;角;圆;负数;用字母表示数;位置的表示法

(续表)

类别	例子	知识点
运算与法则	16世纪的手指算;15世纪意大利的格子算法;古代印度数学家在“除以零”问题上的错误;古代中国、印度和近代欧洲的分数的除法	一位数的乘法;两位数或多位数的乘法;正整数的除法;分数的除法
问题与求解	历史上的一元一次方程问题;《九章算术》中的移项法;《九章算术》和《算法统宗》中的盈不足问题;斐波那契《计算之书》中的行程问题	一元一次方程的概念、解法与应用
公式与命题	三角形和梯形面积公式与出入相补原理;三角形内角和的历史;圆面积公式的历史	三角形与梯形的面积;三角形内角和;圆的面积
工具与符号	加、减、乘、除、等于、大于、小于、角等数学符号的历史;量角器的发明	正整数的四则运算;角的概念;角的度量

数学史是HPM实践的基础,而一些主题的历史很难直接从一般数学史著作中查阅到,需要进行深入的教育取向的历史研究。因此,我们既需要阅读二手的研究文献(如卡约黎的《初等数学史》、史密斯的《数学史》、希思的《古希腊数学史》、刘钝的《大哉言数》、卡茨的《数学史通论》等),也需要查阅数学史的原始文献(如中国古代的算经十书、欧几里得的《几何原本》、斐波那契的《计算之书》、程大位的《算法统宗》、欧拉的《代数基础》等)。

在历史研究之后,需要选择适合于教学的材料进行教学设计。为此,我们根据有关数学教学原则,如波利亚(G. Polya)的“主动学习、最佳动机、阶段序进”原理以及克莱因(M.

Kline)的“兴趣、动机、直观、文化”原理等,结合数学史的教育价值,建立了史料选取和教学设计的五项原则——趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性。历史材料必须让学生觉得有趣,最好含有数学故事,而非枯燥无味;必须符合史实,而非随意编造;必须符合学生的生活经验和认知基础,而非艰涩难懂;必须切合教学目标,而非为历史而历史;必须令人耳目一新,而非老调重弹、稀松平常。

根据数学史融入数学教学的实践,结合西方学者的有关讨论,我们总结出数学史在数学教学中的四种运用方式——附加式、复制式、顺应式和重构式。表3给出了各方式的描述与相应的例子。

表3 数学史在小学数学教学中的运用方式

类别	描述	例子
附加式	展示有关的数学家图片,讲述有关数学故事等,去掉后对教学内容没有太大影响	在教学“位置的表示方法”时,讲述笛卡儿表示苍蝇位置的故事;在教学“大数的认识”时,讲述阿基米德数沙的故事;在推导圆的面积公式时,讲述开普勒的故事
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	在教学行程问题时,直接采用《九章算术》中的凫雁相逢问题或《计算之书》中的两船相遇问题;在教学两位数乘法时,直接引入格子算法

(续表)

类别	描述	例子
顺应式	根据历史材料,编制数学问题;或对历史上的思想方法进行适当改编	根据《几何原本》第1卷命题37“同底且位于相同的两条平行线之间的三角形面积相等”提出问题:在两条平行线之间有两个同底的三角形,从中可以得到哪两个三角形的面积相等(人教版《数学》五年级上册“多边形的面积”练习题)
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	按照“质—量—关系”的顺序再现角概念的历史;按照“品圆—画圆—识圆—用圆”的顺序重构圆的历史

四种方式的水平依次增加,但在实际教学中,运用哪一种方式,需要视具体教学内容和教学目标而定。一般来说,重构式多用于数学概念的教学,复制式和顺应式多用于运算、命题和问题解决的教学,而附加式则可用于任何一类主题的教学。

历史重构式教学法,就是我们通常所说的“发生教学法”。尽管重构式并没有固定的设计模式,但这种方法实际上是对所讲授主题的历史、逻辑和心理顺序的融合,它遵循两种基本思想:教学必须建立在学生的认知基础之上,符合学生的认知规律;同时,凸显主题的必要性,激发学生的学习动机。

三、小学HPM教学实践与案例开发

根据上文的分析,要让一名没有受过数学史教育和HPM专业训练的小学数学教师独立设计和实施HPM教学,是不现实的。为了开发出较为成功的HPM课例,我们采用了团队合作的模式。研究团队由高校研究者和一线小学数学教师组成,前者可以发挥数学史文献、HPM理论、教育研究方法等方面的优势,一线教师则对教材和学生更为熟悉。团队协作可以实现优势互补,从而提高工作效率,提升课例研究水平。图2给出了案例开发的基本流程。

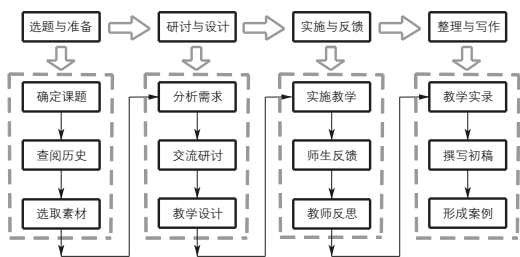


图2 小学HPM教学案例开发的流程

(1) 选题与准备

HPM教学的选题取决于研究团队对相关主题历史的了解程度和对史料的掌握情况。若某个主题的历史脉络清晰,史料丰富,则适合于HPM视角的教学。例如,人们对于正整数乘法的历史已经有较为清晰的了解。15世纪末,意大利数学家帕西沃利(L. Pacioli)在其《算术、几何、比与比例集成》中汇总了八种乘法,其中包括格子算法和我们今天采用的竖式乘法^[1]。因此,正整数的乘法是合适的选题。

确定课题之后,高校研究者基于原始文献和二手研究文献,对有关主题的历史进行深入研究,从中选取合适的材料,并将其提供给一线教师。

(2) 研讨与设计

一线教师研读有关材料,并将其纳入教学设计。在研究团队定期举行的讨论班上,一线教师汇报自己的教学设计,团队成员根据教学

[1] Smith D E. History of Mathematics (Vol. 2). Boston: Ginn & Company, 1925: 107-117.

目标和HPM的理念,对教学设计提出意见或建议。据此,教师对教学设计进行修正。一个较为完善的教学设计往往是经过多次研讨和修正才得以形成的。

团队研讨是HPM教学案例开发过程中不可或缺的一环。

(3) 实施与反馈

教学设计形成之后,教师通常要进行试讲,试讲也是在正常的数学课上完成的。如果试讲的效果不理想,教师还会进行第二次甚至第三次试讲。然后是正式开课,团队成员(有时还有当地教研员、教师所在的教研组)前往观摩。教学之后,让学生完成一份问卷,并在适当的时候(通常是中饭之后的休息时间)选择部分学生进行访谈,了解教学目标的达成情况以及学生对HPM教学的看法。针对教学设计与实施情况,团队进行深入的交流和研讨。教师本人当天完成一份教学反思。

(4) 整理与写作

在接下来的时间里,教师需要整理完成课堂实录,并在团队其他成员的指导下,撰写HPM教学案例。

所谓HPM教学案例,是指在课堂上发生的、将数学史融入数学教学的富有意义的典型事件。HPM教学案例的撰写,就是对该事件的叙事性的追忆和描述。HPM教学案例通常由引言、历史材料及其运用、教学设计与实施、学生反馈和结语(或反思)五部分组成。实践证明,HPM教学案例的撰写对于教师的专业发展具有显著的促进作用,而HPM教学案例的发表则对HPM理念的传播起着重要的推动作用。

四、小学HPM教学案例的评价

随着HPM实践研究的深入,HPM视角下的数学教学理论逐渐形成。该理论可用“一、二、三、四、五、六”来概括,如图3所示。

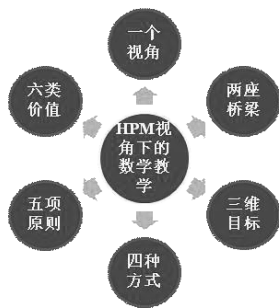


图3 HPM视角下的数学教学理论框架

一个视角,是指HPM的视角,即借鉴数学知识的发生发展,再现历史上的数学思想方法,利用丰富的数学历史资源的教学视角。

两座桥梁,是指HPM视角下的数学教学在历史与现实、数学与人文之间各架起一座桥梁。历史与现实的沟通,就是知识的历史顺序、逻辑顺序与学生的心理发生顺序的融合。比利时-美国科学史家萨顿(G. Sarton)说过,在科学和人文之间只有一座桥梁,那就是科学史。同样,我们也可以说,在数学与人文之间也有一座桥梁,那就是数学史。数学与人文的沟通,是数学背后人性的彰显,是数学学科德育的体现。两座桥梁是HPM视角下数学教学的重要特色。

三维目标是针对数学教师专业发展而言,包括知识、信念和能力。其中,数学教师的知识可以用“教学取向的数学知识”(以下简称MKT)来刻画,而MKT包括一般内容知识(CCK)、水平内容知识(HCK)、专门内容知识(SCK)、内容与学生知识(KCS)、内容与教授知识(KCS)、内容与课程知识(KCC)六个成分;数学教师的信念包括对数学的信念和对数学教学的信念;数学教师的能力包括教学设计能力、教学研究能力等。实践证明,HPM可以丰富和完善教师的MKT,而在其他目标上的有效性尚有待于实践的检验。

关于四种方式、五项原则和六类价值,上文已有介绍,不再赘述。

根据上述理论框架,我们可以对一个小学

HPM课例作出评价。首先,根据教学中的历史材料及其运用方式,可以判断它是否采用了HPM的视角。若教师在课上仅仅附加式地讲述了一则数学故事,而其他教学内容与数学史无关,则这节课不属于HPM视角的课。只有使用了两种及两种以上的方式来运用数学史,才称得上HPM的视角。

其次,鉴于学生的认知基础和教学目标的达成情况,根据两座桥梁、四种方式和五项原则,可以判断一个课例中数学史料的选取是否适切,运用方式是否多元,融入是否自然。

再次,根据六类价值,我们可以判断一个课例中,数学史的哪些价值得到了体现,而哪些价值没有实现。

最后,我们可以通过课堂观察、访谈等方式,考察教师在有关主题上的MKT的变化,印证HPM对教师专业发展的有效性。

五、结语

教学实践表明,HPM营造了不一样的课堂,改变了学生,也改变了教师。我们相信,在

小学数学教育中,HPM将是一个前景广阔、富有魅力的学术领域,而HPM视角下的小学数学教学实践与案例开发必将成为未来该领域最重要的研究方向。目前,虽然江苏启东蔡宏圣老师的团队以及华东师范大学HPM研究团队各自开发了一些教学案例,但由于上文所述的原因,对于数学史“高评价、低应用”的现象依然普遍存在,真正意义上的小学HPM案例并不多见,对国内小学数学教育研究文献的统计分析也印证了这一点。

一枝独秀不是春,百花齐放春满园。我们希望,在不久的将来,有越来越多的小学数学教师加入HPM学习共同体,研究HPM、实践HPM、传播HPM,创造小学数学教育美好的明天。

(本文系上海市高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地——上海数学教育教学研究基地之研究项目“如何在数学课程中体现立德树人的教育根本任务”阶段成果)

(华东师范大学教师教育学院)

课 堂

利用古今对照 展现精彩课堂

——HPM视角下“一位数与两位数相乘”的教学

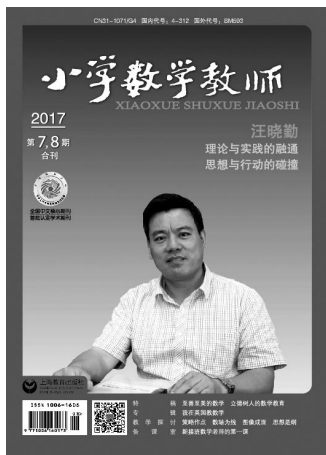
□ 刘轩如 沈中宇

一、引言

“一位数与两位数相乘”是沪教版《数学》三年级第一学期“用一位数乘”中的内容。学生在已经学习了整十(百)数乘法的基础上,进一步学习一位数与两位数相乘。根据课标与教参的相关内容,该课教学目标确定为:试用一位数乘的算法模型探究不同的算法,强调算法的多样化;通过联想,将已学的知识有效地

迁移,探究得出自己的计算方法,并使用算式描述自己的思维和计算过程,在理解算理的基础上提高计算正确率。

但在实际教学过程中,部分学生已经提前学习了乘法的竖式,课堂中单纯的计算常常会使学生感到无趣。在此情况下,如何激发学生的学习兴趣,如何探索算法的多样性就成了亟待解决的问题。另外,在教学之后,往往还是



汪晓勤,中国科学院理学博士,华东师范大学教授,博士生导师,全国数学教育研究会副理事长。研究方向为数学史与数学教育(HPM),致力于HPM理念的广泛传播,具有广阔的国际视野、扎实的理论基础、丰富的实践经验,曾在2016年国际HPM会议上作大会报告,独立或合作发表论文260余篇,引领团队与各级各类学校教师合作开发HPM课例百余个。近期专著《HPM:数学史与数学教育》的出版,被张奠宙先生誉为“我国数学史全面融入数学教育的一个历史性标志”。

2017年第7、8期合刊
总第334期
(月刊,每月1日出版)

主 编 王耀东
执行主编 蒋徐巍
特约副主编 陈洪杰
责任编辑 曲春蕊 李 达
潘迅馨
封面设计 陈 芸

中国标准刊号 ISSN 1006-1606
CN 31-1071/G4
国内邮发代号 4-312
国外发行代号 BM593

卷首 /

教育·教学

何月丰 001

特稿 /

至善至美的数学 立德树人的数学教育

——关于小学数学教育的一些思考

李大潜 005

【数方夜谈】

教学运算律,须先厘清运算的本质

巩子坤等 015

专家视角 /

课堂评估:如何判断评估题的质量

蔡金法等 019

专辑 /

我在英国教数学

026

来自上海:中英数学教师交流与合作

黄兴丰 026

英中交流项目

——一项旨在提升英国小学数学成就的策略

黛比·摩根 031

记忆先行 理解并行

朱优琴 036

Mr. Make 10

徐开瑞 038

当“抽象”碰到“具象”

冯欢笑 040

九九乘法表

——沟通中英数学教学的桥梁

林 洁 042

为什么我不用学具教乘法

施佳旻 043

一节“水土不服”的小数乘法课

相 岚 045

低结构 慢节奏

李前凯 048

我在D班教分数

戴维杰 051

这节课我该教什么

赵文珺 053

从分数教学感受中英学生的思维差异

林海峪 055

“两分钟”里的“大”秘密

朱振环 057

英国数学中的“慢镜头”

吴 琳 058

同课分层是否更“人性”

滕晓娟 060

一堂公开课带来的别样体验

陆秦岭 063

学习共成长

——英式教研活动之所见

林文丽 065

辩课进校园 /

【课堂实录】

知其然,知其所以然

——“分数除以整数”教学实录与反思

楼 瑛 067

【课堂实录】

意义着手 直观推进 明晰算理

——“分数除以整数”教学实践与思考

杨凯明 070