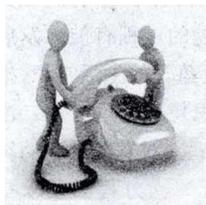


# HPM视角下

## 初中数学概念教学的若干特点



——基于“反比例函数”同课异构教学案例的分析

上海华东师范大学教师教育学院(200062) 王鑫 栗小妮 汪晓勤

“反比例函数”是苏教版初中数学八年级下第九章“反比例函数”的第一节,反比例函数是刻画现实世界中数量关系的一种有效的数学模型.在此之前,学生已经知道成比例、正比例关系和反比例关系,学习过正比例函数、一次函数和分式的概念.本节课就是要在在此基础上,通过分析现实生活中具有比例关系的具体事例,从函数的角度出发研究反比例关系,引出反比例函数的概念,认识其中变量和变量之间的依赖关系,体会函数的意义,为以后高中阶段的函数学习奠定基础.本节课的教学目标是:

(1)理解反比例函数的概念和意义,掌握反比例函数的表达式;

(2)体验和探索具体问题中的数量关系和变化规律,能用反比例函数进行描述;经历建立反比例函数关系的过程,体会函数是反映两个变量相互依赖关系的数学模型;

(3)通过本节课的学习,揭示概念的背景,懂得数学与人类生活有密切的联系,了解数学内容中普遍存在着的变化和相互联系的规律,体会辩证唯物主义观点.

在第四届HPM研讨会上,来自江苏的教师A和来自上海的教师B分别就“反比例函数”这一课题进行了同课异构的教学展示.教师A采取较为常规的方式进行教学,教师B则从HPM的视角进行了教学设计.教学对象为初二年级同等层次的两个班级,授课教师A和B的教龄均超过十年,教师A为本班授课,教师B是借班授课,对班级情况不熟悉.

本次会议安排同课异构课例展示,目的是为广大数学教育研究者、中小学一线数学教师搭建学术交流平台,为不同视角的概念教学提供相互借鉴和学习的机会,以期建立HPM学习共同体.HPM关注历史相似性,提倡将数学史融入数学教学.英国哲学家斯宾塞曾说:“儿童所受的教育必须在方式和安排上同历史上人类的教育一致”,又说:“一般教起来使人觉得枯

燥甚至讨厌的知识,依照自然的方法就成为极其有趣和非常有益的”.鉴于目前HPM视角下的教学实践较少,多数中学数学教师对HPM缺乏了解,本文拟通过对A、B两位教师的教学进行比较,总结出HPM视角下初中数学概念教学的若干特点.

### 1. 教学流程比较

表1给出了两节课的教学流程的对比.

表1 教师A与教师B教学流程对比

课堂环节	教师A	教师B
新课引入	借助“核心概念图谱”复习函数的概念和已学函数.	《太上感应篇》中店主“入重出轻”的故事,引入秤的模型.
新知探究	<ul style="list-style-type: none"> <li>探究行程问题,自由设置变量、常量,构造不同函数关系;</li> <li>通过4个具体情境找出两个变量之间的反比例关系;</li> <li>引导学生以填空的形式总结出反比例函数的定义.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>利用天平模型做实验,分别控制变量,得到正比例关系和反比例关系;</li> <li>引导学生归纳出反比例函数的定义;</li> <li>解释反比例函数中“反”的含义.</li> </ul>
练习巩固	<ul style="list-style-type: none"> <li>搜集生活中的反比例关系;</li> <li>判断和辨析反比例函数;</li> <li>应用和变式.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>判断和辨析反比例函数;</li> <li>应用;</li> <li>寻找生活中的反比例函数.</li> </ul>
课堂小结	教师总结所学知识.	<ul style="list-style-type: none"> <li>分析“入重出轻”的利弊;</li> <li>学生谈这节课的收获;</li> <li>教师总结升华.</li> </ul>

从表1可见,教师A采用的是较为常规的教学方式,借助“核心概念图谱”复习旧知,回顾函数的概念;接着在行程问题中将路程、速度和时间三个量自由设置成变量或常量进行探究,构造不同的函数关系,引出反比例函数的概念;然后启发学生寻找生活中的反比例关系,并通过练习辨析反比例函数;最后进行课堂小结.教师B通过《太上感应篇》中店主“入重出轻”的故事引入新课,利用秤和物理上的天平模型做实验,分别控制变量,引导学生从中发现正比例和反比例关系,得到反比例函数的概念;然后通过练习判断和辨析反比例函数;最后是课堂小结,并通过法院的

图标渗透数学学科德育。

教师A注重学生已有的认知基础,注重数学与生活之间的联系,从学生已经学过的行程问题入手,启发学生去发现诸如工程问题、商品问题和面积问题中蕴含的反比例关系。

教师B也注重数学与生活的联系,且更加注重旧知与新知之间的联系和过渡,但在探究环节利用天平模型得出正比例和反比例关系所花费的时间较长。

### 2. 新课引入环节比较

在新课引入环节,教师A借助学生课前所画的“核心概念图谱”回顾函数的概念,复习相关知识。教师B则通过《太上感应篇》中记载的店主“入重出轻”的故事引入新课,并把秤带入课堂,激发学生的学习兴趣。以下是两位教师的教学片断。

#### 【教师A的教学片断】

师:从今天这节课开始我们要学习反比例函数,在正式开始学习新课之前,请大家关注3个问题:什么是函数?我们学了哪些函数?我们通过对哪些方面的研究来学习函数知识的?同时打开核心概念图谱,在作业中寻找答案。请同学来为我们分享。(投影展示一名学生的核心概念图谱)

生:函数是指在变化的过程中,两个变量 $x$ 和 $y$ ,如果每给一个 $x$ 都有唯一确定的 $y$ 与之对应,那么 $y$ 就是 $x$ 的函数。我们学习了一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 。函数的表达方法有三种:列表法、图象法和解析式法。

师:我们现在学习和掌握了一次函数、正比例函数,通过数形结合,学习了函数的图象、表达方式等等。

#### 【教师B的教学片断】

教师B首先在PPT上展示《太上感应篇》中的一则故事:明朝万历年间,扬州有一家大杂货店,店主在临死的时候吩咐儿子说:“我平生起家,全靠这杆秤,这个秤乃是乌木合成,中间空的地方藏有水银,秤出的时候就将水银倒在秤头,秤入的时候就将水银倒在秤尾。这样的入重出轻,就是我致富的原因。但目前竞争激烈,也只能惨淡经营,希望你更加努力,争取扭转局面。”

师:什么是秤?(PPT展示秤的图片)秤由四个部分构成:秤盘、秤提纽、秤杆和秤砣。大家知道怎样使用秤吗?今天老师就带了一杆秤。(教师现场演示如何用秤称橘子)正常称重时,将物体放入秤盘,通过调节提纽和秤砣间的距离找到平衡点。在称的过程中,提纽的位置和秤砣的重量保持不变,因此,物体的重量与秤砣离开提纽的距离之间存在一定的关系。那么,它们之间存在着怎样的关系呢?

在本环节,两位教师都借助小道具引入新课。“核

心概念图谱”是教师A所在学校的特色之一,让学生课后自己整理和总结已学知识,在头脑中自主建构较为完整、系统的知识网络结构,而不是一味地被老师牵着鼻子走,被老师灌输式地注入大量知识。该方法强调了学生的自主性,体现了学生的主体地位。

教师B利用“入重出轻”的故事激起了学生浓厚的求知欲望,秤的出现更是令学生眼前一亮,让学生有想要一探究竟、识破店主卑鄙手段的冲动,体现了“德育之效”。但文言文的史料对学生有一定的难度,没有给学生充足的时间阅读领会,建议可以对史料进行适当加工或制作成微视频,使这则故事更加生动易懂,达到更好的教学效果。

### 3. 新知探究环节比较

在新知探究环节,教师A首先提出问题1:将行程问题中的路程、速度和时间三个量自由设置成变量或常量,构造不同的函数关系,并给出示例:当 $v=80\text{km/h}$ 时,有 $s=80t$ ,这便是以前学过的正比例函数。学生探究的结果有:令路程为200公里,则 $v=\frac{200}{t}$ ,自然便得到了反比例关系。接着,问题2给出了四个生活中的情境,要求学生用函数表达式分别写出两个变量之间的关系。以下是教学片断。

#### 【教师A的教学片断】

师:同学们列出的这些式子都具有相同的形式,这种形式就是我们今天要讲的反比例函数的结构。大家回忆一次函数的定义,通过观察进行模仿,尝试自己给出反比例函数的定义。(学生在学案上通过填空完成反比例函数的定义)

生:一般地,形如 $y=\frac{k}{x}(k$ 是常数, $k \neq 0)$ 的函数叫做反比例函数,其中 $x$ 是自变量, $y$ 是 $x$ 的函数, $k$ 是比例系数。

师:很好,这个就是我们对反比例函数的定义。从它的结构 $y=\frac{k}{x}$ ,结合最近所学的分式,你们认为有没有什么需要注意的?

生: $x$ 不能等于0。

教师B利用秤和物理上的天平模型(如图1和图2所示)做实验,分别控制变量,引导学生从中发现正比例和反比例关系。

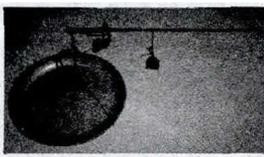


图1 秤

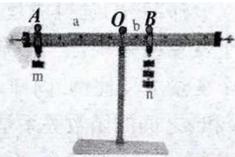


图2 天平模型

图2中, $O$ 点是秤提纽所在的位置, $m$ 表示物体的重量

重量,  $n$ 表示秤砣的重量. 正常称重时, 距离  $a$  和秤砣的重量  $n$  保持不变, 将多次实验得到的数据填入表2, 可以看出  $b$  与  $m$  成正比. 类似地, 控制  $a$  和  $m$  不变, 将实验数据填入表3, 可以看出  $b$  与  $n$  成反比.

表2  $a$  和  $n$  不变,  $b$  和  $m$  之间的正比例关系

数据	$a$ (cm)	$n$ (g)	$b$ (cm)	$m$ (g)
第1次	8	100	4	50
第2次	8	100	12	150
第3次	8	100	16	200

表3  $a$  和  $m$  不变,  $b$  和  $n$  之间的反比例关系

数据	$a$ (cm)	$m$ (g)	$b$ (cm)	$n$ (g)
第1次	8	100	16	50
第2次	8	100	8	100
第3次	8	100	4	200

【教师B的教学片断】

师: 正常称重时,  $a$  和  $n$  保持不变, 通过调节  $b$  的大小从而称得  $m$  的重量, 随着  $m$  的增加,  $b$  也在增加, 说明  $b$  和  $m$  之间有一定的关系. 那么这个内在关系是什么呢?

生:  $m$  和  $b$  的比值都是 12.5.

师: 可以写成  $\frac{b}{m} = k (k \neq 0)$ , 两个变量的比值是一个非零的常数, 就称  $b$  和  $m$  成正比. 如果  $b$  用字母  $y$  来表示,  $m$  用  $x$  来表示, 跟函数结合起来, 你们觉得  $y$  是  $x$  的函数吗? 把  $y$  和  $x$  的关系式写出来.

生:  $y = k \cdot x (k \text{ 是常数, } k \neq 0)$ .

师: 如果两个变量符合这种函数关系, 就是我们学过的正比例函数. 刚才在正常称重时是这样的, 那故事中店主怎样“入重出轻”呢? 我们先看“入重”. 如果同样是称这个物体, 物体的重量不变, 提纽的位置是不变的, 水银倒向秤尾, 相当于改变了秤砣的重量, 要调节距离  $b$  才能达到平衡. 也就是  $a$  和  $m$  保持不变的时候,  $b$  和  $n$  之间有什么关系呢? 同样的, 继续赋予  $a$  和  $m$  固定的值, 研究在平衡关系下  $b$  和  $n$  的数量关系.

(学生上讲台做实验)

师: 天平平衡了, 你有成就感吗?(全班同学都笑了)观察一下, 随着  $n$  的增加,  $b$  反而减小……

生: 是反的.

师: 我们觉得成反比, 那怎样的反比例? 如果两个变量的乘积是一个常数, 即  $bn = k (k \neq 0)$ , 我们称两个变量成反比例. 同样, 如果把  $b$  看成  $y$ ,  $n$  看成  $x$ , 那么  $y$  和  $x$  之间的函数关系是怎样的?

生:  $y = \frac{k}{x} (k \text{ 是常数, } k \neq 0)$ .

师: 这样的函数我们把它称作反比例函数.

接着, 教师B总结反比例函数的定义, 并解释反比例函数中“反”的含义.

师: 四个量成比例可以写成乘积的形式  $bn = am$ , 或者  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ .  $a$  与  $b$  的比反而是左右两边重量的反比, 反比例函数最初的起源就是两个量的反比, “反”其实就是“倒过来”的意思. 原来, 成正比例和成反比例源于成比例, 它们都是等价的. 通过刚才的故事, 你觉得店主这样做的利弊是什么?“入重”导致读出来的数比实际重量要轻, 少了分量. 看似店主赚了钱, 其实他失了什么?

生: 失了信誉.

师: 所以, 得和失是相对的. 再看  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y$  与  $x$  成反比,  $y$  与  $\frac{1}{x}$  成正比, 所以正和反也是相对的. 反比例函数的“反”一开始是“倒数”的意思. 当  $x$  增大时  $y$  减小, 当  $x$  减小时  $y$  增大, 它们的变化关系是反向变化的. 后来随着负数的进入,  $y = -x$  是正比例函数, 但它也满足当  $x$  增大时  $y$  减小. 所以只依据“倒数”来判断是否为反比例函数就不合适了, 还要加入“负”的概念, 但原来反比例函数这个术语就一直延续下来了, 其中加入了新的概念, 我们把这种现象称之为“旧瓶装新酒”. 比如  $y = -\frac{1}{x}$ , 在一定的条件下, 当  $x$  增大的时候  $y$  也是增大的……

在给反比例函数下定义时, 教师A采用的是“快速切入法”, 从特殊到一般, 通过实例让学生看到这类与之前所学的不一样的函数——反比例函数, 让学生通过类比和模仿, 归纳得出反比例函数的定义.

教师B以秤为切入点, 给学生探究和发现的机会, 体现了“探究之乐”; 在探究过程中既复习了正比例函数, 又为反比例函数作了铺垫, 揭示了数学概念自然发生发展的过程, 体现了“知识之谐”; 从具体数据中抽象出函数模型, 提高了学生的数学抽象能力, 体现了“能力之助”; 深入浅出地让学生懂得店主的做法虽然得到了一时之利, 但却失去了信誉, 对学生进行辩证唯物主义教育, 体现了“德育之效”; 最后还道出了反比例函数中“反”的深层含义, 揭示了数学是一门不断发展演进的学科, 体现了“文化之魅”. 借助秤的模型让反比例函数看得见、摸得着, 这样的教学设计让数学不再抽象, 没想到小小的一杆秤里竟然蕴含着正比例函数和反比例函数两个重要的函数模型. 不足之处是此处探究环节上所花费的时间较长, 还有提升和改进的空间.

4. 练习巩固环节比较.

教师A安排学生以四人小组为单位, 搜集尽可能

多的生活中的反比例关系,学生们展开了一场头脑风暴,发现了诸如工程问题、行程问题、商品问题和面积等问题中蕴含的反比例关系。接着,让学生判断和辨析反比例函数,用待定系数法确定反比例函数。

教师B先从三个方面帮助学生更好地理解反比例函数:你对“形如”怎样理解?怎样理解 $k$ 是常数?反比例函数与前面所学的什么知识有联系?然后进行反比例函数的辨析和应用,启发学生寻找生活中反比例函数的例子。

由此看出,数学源于生活,在练习环节两位教师都注重将数学与实际生活联系起来,发现生活中的反比例函数,开阔和发散了学生的思维,练习后学生能够快速准确地辨别反比例函数,达到了知识与技能目标。

### 5. 课堂小结环节比较。

在课堂最后,教师A总结了反比例函数的定义,判断反比例函数的三种形式,反比例函数和一次函数的区别与联系,以及确定反比例函数的方法——待定系数法。教师B分析了店主“入重出轻”的利弊,请学生分享这节课的收获,再结合法院的图标谈公平和正义。以下是教学片断。

#### 【教师A的教学片断】

师:这节课学习了反比例函数,反比例函数的定义是大家自己思考、填空、模仿出来的。怎样判断是否为反比例函数?从形式上有常见的三种: $y=\frac{k}{x}$ ,  $y=k \cdot x^{-1}$  以及  $x \cdot y=k$ , 各取不同特征,以后慢慢领会。我们的图谱上又多出一个触角,叫反比例函数。

#### 【教师B的教学片断】

师:根据刚才的学习,你能解释店主的“入重出轻”,以及这样做的利弊吗?当店主卖东西给别人的时候,水银倒向秤头,相当于增加了物体的重量,想要达到平衡,秤砣就要移得更远才行,所以读出来的数重了,店主占了顾客的便宜。这样做合适吗?

生:不合适。

师:通过这节课的学习,你有什么收获?

生1:成反比例和成比例、成正比例有关系。

生2:学会了怎样来判断一个函数是不是反比例函数。

生3:学会了反比例函数的多种形式。

师:最后我们来看看法院的图标,它里面包含天平,是公平、公正、法制的象征。

限于时间,教师A快速总结了本节课的要点。教师B再次分析“入重出轻”的利弊,前后呼应,渗透了数学学科德育,体现了“德育之效”。总结时将机会留给学

生,让学生们有机会各抒己见,体会收获的喜悦。秤作为整节课的一条主线贯穿始终,使课堂连贯有序,增添了历史韵味。

### 6. 结语。

从两节课的比较中可以看到,HPM视角下的初中数学概念教学有以下一些特点。

(1)注重探究的过程性。两节课都含有探究活动,教师A直接利用了速度、时间和距离之间的关系式,B没有直接给出有关公式,而是通过实测数据,让学生从数据中发现规律,从而得出反比例函数的概念。HPM视角下数学教学的重要特点之一是让学生在“做数学”的过程中经历知识的自然发生过程。

(2)彰显数学的人文性。B教师在教学过程中充分挖掘了数学背后的人的元素,从而让课堂人性化。“入重出轻”的故事激发了学生的学习兴趣 and 动机;在得与失的辩证关系中,学生也接受了思想品德教育。可见,HPM视角下的初中数学教学有利于数学学科德育的渗透。

(3)追求设计的新颖性。反比例函数是初中数学中传统的重要内容,要在教学上有所创新,并非易事。而数学史是人类思想的宝库,从中可以获取丰富的教学素材和思想养料,弥补教师现有教学资源的不足。秤的模型就是一个典型例子,历史上的西方代数教科书中就将该模型作为一个例子,清代《数理精蕴》中也含有秤称重问题。

(4)关注术语的本源性。教师A和B都注重概念辨析,但B由于对反比例函数的历史有一定的了解,因而能对“反比例函数”这一术语本身进行考辨。在历史上,人们在讨论各种比例时并没有考虑负数,“反”就是“倒”,“倒”就是“反”,没有歧义。但今天就不一样了,一个非零数既有倒数,也有相反数,“反”有两种不同的意义,因此,学生在“反比例函数”这一术语的理解上存在困难。B教师通过揭示术语之源,消除了学生的认知障碍。事实上,在初中数学教学中,我们经常会遇到一类无法用逻辑手段来解决的“为什么”问题,数学史往往成了不可或缺的有效工具。

总之,HPM视角下的初中数学概念教学在历史与现实、数学与人文之间各架起了一座桥梁,营造了不一样的课堂。当然,由于注重探究过程,必然导致后面巩固练习环节的时间相应减少,一节好的HPM概念课必须在不同教学环节之间寻求平衡。

(上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号:D1508)系列论文之一)