【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之二）】

HPM 视角下的线面垂直判定定理教学设计与实施

胡佳婧[1]，张亚琦[2]

（1. 上海市久隆模范中学，上海 200435；2. 华东师范大学 教师教育学院，上海 200062）

【摘 要】研究者从 HPM 的视角来设计与实施线面垂直的教学，并加入线面垂直判定定理的证明，培养学生的逻辑推理素养。同时，研究者利用数学史揭示线面垂直判定定理背后的人文元素，让学生了解不同时空数学家的贡献，突显人文元素，展现“文化之魅”，彰显数学“德育之效”。

【关键词】HPM；线面垂直；定理教学；数学文化

一、引言

“线面垂直”是沪教版高三数学上册第 14 章中“空间直线与平面的位置关系”的内容。教材通过旗杆与地面的位置关系引出线面垂直问题，并给出定义，再根据如何确保旗杆垂直于地面，得到线面垂直判定定理，但教材并未给出定理的证明。这样的设计，虽然能使抽象的数学问题生活化，便于学生理解，但在教学实践中笔者发现，学生心中会存在疑惑：真的能通过判定定理判断直线与平面垂直吗？这一结论是如何得到的？该如何证明呢？在教学设计中，教师一般通过实验操作来验证定理的正确性，包括动态观察旗杆与影子的关系[1-2]和折纸实验[3-8]；只有极少数的教学设计在操作的基础上给出严格的定理证明[9]。我们很少看到从 HPM 视角下的教学设计。

历史上，关于线面垂直的判定定理有许多精彩的证明方法，有些证明方法对于高中学生来说是易于理解与掌握的。《普通高中数学课程标准（2017 年版）》提出，要在数学教学中落实培养学生的逻辑推理素养，并要求适当渗透数学文化。数学史恰恰能帮助我们达到这些目标。历史提供的不同观点和不同表征方式，既可以指导教学，又可以让学生认识到数学是经历演进过程的学科，而不是从天上掉下来的[10]。

因此，我们可以从 HPM 的视角来设计与实施线面垂直的教学，加入线面垂直判定的证明，培养学生的逻辑推理素养；同时，还可以利用数学史揭示线面垂直判定定理背后的人文元素。此外，教师介绍中国古代的立体图形，让学生感受数学文化的同时，激发学生的民族自豪感。

为此，我们拟订本节课的教学目标如下：

① 学生能掌握线面垂直的定义、性质与判定定理；

② 学生会利用线面垂直的性质与判定定理进行一些简单的推理，解决空间距离问题；

③ 让学生了解历史上精彩的线面垂直判定定理的证明方法，培养学生的逻辑推理素养，增加学生数学学习的自信心，树立正确的数学观；

④ 让学生了解中国古代的立体图形，渗透数学文化，培养学生的爱国主义情怀。

二、历史材料及其运用

西方早期的几何教科书给出了线面垂直判定

【作者简介】胡佳婧，中学一级教师，主要从事数学史与高中数学教学研究；张亚琦，华东师范大学教师教育学院硕士研究生，主要从事数学史与数学教育研究。

定理的许多严格证明。这些证明分属两个传统，一是欧几里得传统，二是引理法传统[1]。本节课采用的历史素材有克莱罗的直观解释、对称法和勒让德证法，运用引理法的错误证明方法，以及中国古代的基本立体图形。

1. 历史上线面垂直判定定理的证明

（1）克莱罗的直观解释

法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut）在《几何基础》中并未给出线面垂直判定定理的严格证明，但他给出了直观的解释。如图1所示，AB 为长方形 $CDEF$ 对折后的折痕，将所折线段 BC、BD 分别与平面上过点 B 且垂直于 AB 的两条已知直线贴合，则 AB 与平面垂直。这一解释为本节课的设计提供了借鉴。教师利用克莱罗的折纸模型引出主题，并借助模型引导学生一起探究线面垂直的定义。

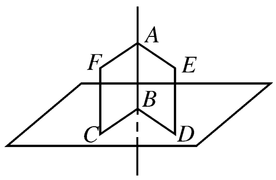

图1　克莱罗的直观解释

（2）对称法和勒让德证法

对称法出现于美国数学家泰班（E. T. Tappan）的《平面与立体几何》中。如图2所示，已知直线 $AB\perp AC$，$AB\perp AD$，在 AC 和 AD 上各取点 C 和 D，连接 CD，过点 A 在 AC 和 AD 所在平面上任作一条直线，交 CD 于点 E。为证明 $AB\perp AE$，延长 BA 至 B'，使 $AB=AB'$，连接 BC，BD，BE，$B'C$，$B'D$ 和 $B'E$，根据中垂线定理可知，$BC=B'C$，$BD=B'D$，故 $\angle BCE=B'CE$，从而 $\triangle BCE\cong\triangle B'CE$，$BE=B'E$，即可得到 $AB\perp AE$。由 AE 的任意性可知，AB 垂直于 AC 和 AD 所在平面。

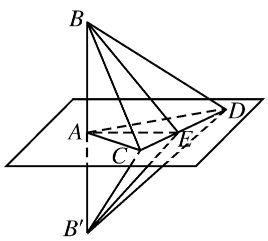

图2　对称法

最原始的欧氏证法烦琐冗长，涉及五组三角形全等。之后虽有数学家对其进行简化，但简化后的证明并不严谨，不适合课堂教学。本节课同样选择纯几何逻辑推理证明的对称法，作为线面垂直判定定理的主要证明方法。

虽然都是用代数思想解决几何问题，但介绍法国数学家勒让德（A. M. Legendre）的证明方法，不仅能把中线定理介绍给学生，而且可以让学生了解数学史知识。但由于内容比较多，教师录制微视频让学生课后自学。

2. 线面垂直判定定理的错误证明

美国数学家斯图尔特（S. T. Stewart）在《平面与立体几何》中给过一个利用反证法的证明。如图3所示，已知 $AB\perp CK$，$AB\perp EF$，HS 是 CK 和 EF 所在平面上任意一条过点 A 的直线，假设 AB 不垂直于 HS，作 $BI\perp HS$，则 $BI<AB$。我们知道，过平面外一点向平面内任一点所引线段中，最短的一条线段为平面的垂线段，因为 AB 是垂线段，所以 BI 不能短于 AB，故 $AB\perp HS$，从而与平面垂直。在这个证明过程中，斯图尔特将要证明的结论当成条件来用是错误的。

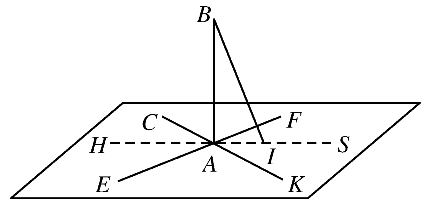

图3　引理法的错误证明方法

引理法传统的证明方法就是教科书中所提到的从公理得出的证明方法。无论是引理法还是阿达玛证法都比较抽象，对于有些学生而言比较难以理解，因此，教师一般不选择这两种证明方法作为课堂教学内容。但引理法所用到的反证法，是立体几何证明中比较常用的一种方法，是学生需要掌握的知识。在课堂上，教师向学生展示此错误证明方法，让学生进行辨析。

3.《九章算术》中的立体图形

堑堵、阳马、鳖臑是中国古代三个重要的立体图形。如图4，堑堵是两底面为直角三角形的棱柱；如图5，阳马是底面为长方形，两个三角

面与底面垂直的四棱锥；如图6，鳖臑是四个面均为直角三角形的三棱锥。斜解一个堑堵，可以得到一个阳马与一个鳖臑，其中阳马和鳖臑的体积之比恒为2∶1，这就是刘徽原理。

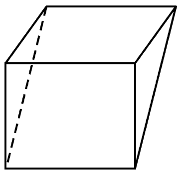
图4

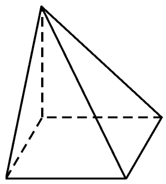
图5

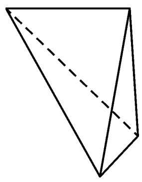
图6

为了提升学生的学习兴趣，教师利用这几个立体图形来编制空间距离问题，并介绍中国古代的阳马术。

三、教学设计与实施

1. 引入新知

为激发学生的学习兴趣，教师引入电影《唐人街探案》的一个小片段。教师先请学生帮助视频中的小女孩完成“如何把一张纸立起来”这个难题。一名学生将纸折叠后打开成一定角度，成功地将一张纸立在了桌面上。然后教师提出问题：“此时折痕与桌面有怎样的位置关系？”最后，教师引入本节课的学习主题——线面垂直。

2. 探究定义

教师请学生列举一些生活中线面垂直的例子，如墙角线与地面、旗杆与地面等。

师：我们再来看刚刚的折纸模型（如图7），在桌面上是不是有两条边？我们就盯着一条边看，折痕所在直线与这条边所在直线有怎样的位置关系？

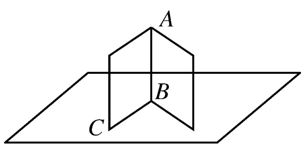

图7　折纸模型

生：垂直。

师：如果我以折痕为轴，将这个折纸进行旋转，我们盯着的那条边在桌面上的位置发生变化。随着这条边位置的变化，折痕所在直线与这条边所在直线的位置是什么关系？

（教师同步展示图8。）

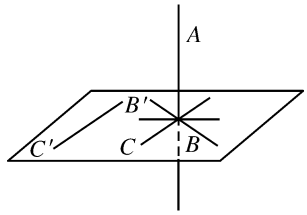

图8　折纸模型抽象图

生：还是垂直。

师：如果在平面上任意找一条不过折痕所在直线AB与平面交点B的直线$B'C'$，直线$B'C'$与直线AB的位置关系是什么？

生：还是垂直。

师：为什么？

生：因为这条线还是在平面上。

师：非常好！在平面上就可以进行平移。可将这条线平移到过折痕所在直线与平面的交点，那么这条线也就一定与折痕所在直线垂直。

师：由此，大家能得到怎样的结论？

生：垂直于平面的直线，垂直于平面上的任何一条直线。

师：那么同学们能不能给出线面垂直的定义？

生：如果一条直线与平面上的所有直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。

（教师同步呈现PPT。）

3. 总结性质

在这个教学环节，教师让学生判断以下两个命题的真假。

命题1：如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，那么这条直线与这个平面垂直。

命题2：如果一条直线垂直于平面，则与这条直线平行的直线也与平面垂直。

师：大家觉得命题1成立吗？

生：不成立。

师：为什么不成立？

生：当直线AB倾斜时，在平面上能找到与直线AB垂直的直线，甚至是无数条，但无数不等价于所有。

师：对。那么命题2呢？

生：正确。

师：能不能请你说明一下，为什么正确？

生：与已知直线平行的直线，可以通过平移与已知直线重合，就说明与平面也是垂直的。

（教师和学生一起进行性质总结。性质1：一条直线垂直于平面，则与平面上任意一条直线垂直。性质2：一条直线垂直于平面，则与这条直线平行的直线也与平面垂直。）

4. 证明定理

教师总结完性质之后继续追问学生，定义是否可以判定线面垂直，从而引出判定定理。

师：能不能直接用线面垂直的定义作为线面垂直的判定？也就是说，你要证明直线与平面垂直，你就要证明直线与平面上所有的直线都垂直。所谓“所有”，究竟有多少条？

生：无数条。

师：但是无数条数量太多了，我们接下来的想法就是能否把数量减少？减少到几条比较合适呢？

生：减少到两条，而且是两条不平行的直线。

师：为什么是两条？而且还是两条不平行的直线呢？

生：因为两条相交直线确定一个平面。

师：老师认为，你能确定将直线减少到两条这一点非常好！那我们就按平行与相交两种情况来进行考虑。如果直线垂直于平面上两条平行的直线，能说这条直线垂直于这个平面吗？

生：不行。前面举过反例，垂直于无数条平行线都不能说明直线垂直于这个平面。

师：说得太好了！排除了平行的情况，如果直线垂直于平面上两条相交的直线，能说这条直线垂直于这个平面吗？

师：所以我们现在要研究的问题是，如果一条直线垂直于平面上两条相交的直线，那么这条直线与平面上的任意一条直线都垂直吗？

首先，教师引导学生厘清证明思路，根据已知条件，明确要证的结论是$AB\perp AE$。然后，教师引导学生回忆要证明两条直线互相垂直的基本方法，如勾股定理逆定理、相似全等、等腰三角形三线合一等，并决定利用等腰三角形三线合一的性质进行证明。借助几何画板，提示学生通过添加辅助线构造三角形，最后，由一位学生顺利完成证明，大致思路如下。

证明：延长BA至B'，使$AB=AB'$，连接BC，BD，BE，$B'C$，$B'D$和$B'E$。由中垂线定理可知，$BC=B'C$，$BD=B'D$，故$\triangle BCD\cong\triangle B'CD$，$BE=B'E$，即可得$AB\perp AE$，由$AE$的任意性可知，$AB$垂直于$AC$、$AD$所在平面。

师：刚刚这位同学很厉害，她完成了美国数学家泰班在《平面与立体几何》中所提到的证法，这种方法简称对称法。

（全班响起热烈的掌声。）

师：其实利用勾股定理的逆定理也可以对这一命题进行证明。法国数学家勒让德就是这样证明的，简称勒让德证法。老师给大家做了一个微视频，希望大家在课后去学习一下，再将对称法与勒让德证法进行比较，看看你自己更喜欢哪种证法。

师：我们再一起来看一个不太一样的证明方法，请大家思考这个证明对不对。

证明：如前面图3，已知$AB\perp CK$，$AB\perp EF$，HS是CK和EF所在平面上任意一条过点A的直线。假设AB不垂直于HS，作$BI\perp HS$，则$BI<AB$。我们知道，过平面外一点向平面所引线段中，最短的一条线段为平面的垂线段，因为AB是垂线段，故BI不能短于AB，所以$AB\perp HS$，即AB垂直于CK和EF所在平面。

师：这种证明方法正确吗？

生：不正确。他在证明过程中用到了“AB是垂线段”，那是需要证明的结论。

师：非常好。他把结论当成条件来用，是一个错误证法。这个证明是美国数学家斯图尔特在《平面与立体几何》中所给出的。可见数学家也会犯错误。今后大家在数学学习中遇到挫折千万不要气馁，要对自己有信心。

师：其实在历史的长河中，对于线面垂直判定的证明，除了刚刚提到的那些证明方法，还有很多不同的证明方法。数学家们都在为找到更完美的证明方法而努力，从不准确到准确，从烦琐到简洁，数学家们这种精益求精的精神是值得我们学习的。

教师请一位学生总结线面垂直的判定定理，并向学生说明无须保证这两条相交直线与已知直

线有公共点。

5. 应用练习

例1 如图9，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$SA\perp$面ABC。求证：$BC\perp$面SAC。

学生顺利完成了证明，并能推断该图形的四个面都是直角三角形。教师指出，在中国古代，该立体图形被称为鳖臑。鳖臑意为甲鱼前肢下半截的骨头，该图形因与鳖臑相像而得名。

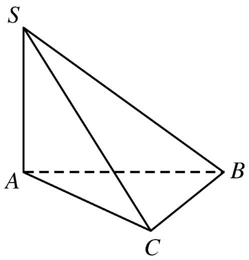

图9

例2 如图10，四边形$ABCD$是边长为3的正方形，$PD\perp$平面$ABCD$，且$PD=4$，点E是PB的中点，连接EO。

① 证明EO垂直于平面$ABCD$，并求EO的长。

② EO与平面ADP有怎样的位置关系？求EO到面ADP的距离。

③ 直线PC与直线AD有怎样的位置关系？能求它们之间的距离吗？

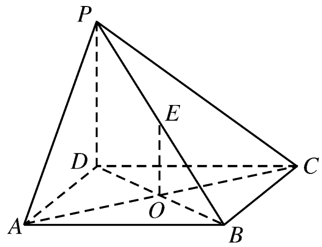

图10

在解决例2的同时，教师首先介绍几种空间距离，如：EO垂直于平面$ABCD$，故EO是点E到平面$ABCD$的距离；线面距离问题可转化成点面距离问题，面面距离问题也是如此；给出公垂线的定义，并引导学生找到异面直线的公垂线，解决异面直线的距离问题。教师用PPT呈现空间距离，比文字定义更容易让学生接受；将新知识融入例题讲解，节约了大量教学时间。

然后，教师播放微视频，介绍中国古代三个重要立体图形——堑堵、阳马和鳖臑，并用动画演示刘徽原理，揭示中国古代数学家在几何学领域的重要成就。

6. 课堂小结

在本教学环节，教师引导学生回顾本节课学习的内容，点明本节课的重要思想。

师：今天这节课我们学了哪些内容？

生：这节课我们学了线面垂直的定义、性质与判定定理，求空间距离，认识了中国古代三个重要立体图形——堑堵、阳马、鳖臑。

师：好的，以上内容希望大家掌握并熟练运用。本节课，我们还一同分享了一些国外数学家对线面垂直判定定理的证明方法，以及中国古代数学家对立体几何领域所做出的贡献。希望大家能学习数学家们精益求精的精神，并为中国文化的博大精深感到自豪。

四、学生反馈

课后笔者收集全班33名学生对本节课的反馈信息，主要从概念、应用、思想方法和思想情感等方面对学生进行了调查。

在问及线面垂直的数学概念时，学生想到了数学史相关的内容（如鳖臑）、生活中的线面垂直例子（如旗杆与地面的位置关系），以及相关的数学知识（如线线垂直）。关于所学知识在问题解决中的应用，大部分学生没有填写。填写正确的学生能思路清晰地解答问题，填写错误的原因包括两种：一种是解题思路正确，但在书写中存在问题；另一种是解题思路不正确。

18.19%的学生觉得线面垂直判定定理的证明方法难，不太容易理解；45.45%的学生觉得有点难度，大概能理解；36.36%的学生觉得不难，可以理解。所有学生都认为，有必要在本节课中讲授线面垂直判定定理的证明；84.85%的学生喜欢教师在课堂上讲错误的证明方法，以及中国古代的特殊立体图形。

大部分学生体会到了化归的数学思想，还有部分学生提到数形结合、由繁化简以及空间逻辑思维等思想。

学生的反馈说明，学生对于中国古代的特殊几何体（阳马、鳖臑）特别感兴趣。一名学生提

到，数学家证明线面垂直的方法是错误的，让他了解到数学的另一面，相信自己能够正确对待学习中出现的错误，树立数学学习的自信心。

五、结语

在本节课中，教师引导学生运用对称法证明线面垂直判定定理，又通过微视频，向学生展示了勒让德的证明方法，利用数学史揭示了“方法之美”。追溯线面垂直判定定理的历史，让学生了解不同时空数学家的贡献，突显人文元素，展现了“文化之魅”。历史上的证明方法有助于培养学生的逻辑推理、直观想象素养，达成了“能力之助”。教师引导学生证明定理，穿越时空与数学家对话，让学生树立数学学习的自信心；再现数学家的错误，让学生正确认识数学研究作为一种文化活动的本质，改变他们对于数学课本知识一成不变的刻板印象。数学家不断探求定理的新证明，让学生感悟数学背后的人文精神。对中国古代数学的介绍，激发了学生的民族自豪感，数学史彰显了“德育之效”。

考虑到教学内容，为了能够完全达成教学任务，本节课的定理证明环节基本上按照预设展开，教师没有给予学生更多的探究机会和思考空间，从而未能完全实现数学史的“探究之乐”这一教育价值。探究活动的设置与教学任务之间的平衡，正是未来 HPM 视角下的数学教学需要解决的重要问题之一。

参考文献：

[1] 郭佩华，陈光立. 关注概念生成，发展学生思维：“直线与平面垂直”的教学设计与反思[J]. 中学数学月刊，2014（6）：29－31

[2] 郭虹宾. “直线与平面垂直的判定”的教学难点及教学设计[J]. 数学教学通讯，2013（11）：9－11

[3] 窦楚翘. “直线与平面垂直的判定”课堂实录[J]. 中学数学教学参考，2016（22）：9－12.

[4] 方志平. “直线与平面垂直的判定”教学设计[J]. 中小学数学（高中版），2014（10）：31－34

[5] 蒋明建. 谈新课程中面面平行、线面垂直判定定理教学的困惑与思考[J]. 中小学数学（高中版），2013（3）：14－16.

[6] 宫前长. “厘清”思路抓本质 “讲究”逻辑炼能力：新课程“线面垂直”一课的教学思考及感悟[J]. 中学数学，2016（5）：13－17.

[7] 费丽靓，杨光伟. 线面垂直判定的实验教学[J]. 数学教学研究，2011（3）：63－65.

[8] 蒋秀梅，黄海生. 感知探究重过程，明义辨析扬理性 “直线与平面垂直的判定”教学与反思[J]. 中小学数学（高中版），2018（3）：34－38.

[9] 许金松. 探索发现创新[J]. 数学教学通讯，2001（6）：18－19.

[10] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社，2017.

[11] 沈中宇，汪晓勤. 20世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊，2017（1）：44－47.

（上接第14页）

[9] 李玲，顾海萍. 平方差公式：以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2014（11）：43－47.

[10] 岳秋，张德荣. 平面直角坐标系：利用历史故事，实现维度跨越[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2016（11）：32－37.

[11] 王进敬，栗小妮. 反比例函数：实验重构数学史，故事凸显价值观[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2017（6）：36－41.

[12] 宋万言，栗小妮. 实数的概念：折纸、拼图中发现，计算、比较中建构[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2017（8）：41－47.

[13] 牟金保，孙洲. 平行线的判定：基于相似性，重构数学史[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2017（5）：34－40.

[14] 唐秋飞. 三角形内角和：在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2015（7）：40－44.

[15] 陈晏蓉，汪晓勤. 基于数学史的新知引入课例分析[J]. 上海课程教学研究，2018（1）：38－44.