谁是幂和公式的开山祖

◆汪晓勤

数学难题之于数学家，犹如未被征服的高峰之于登山者，常有着经久不衰的魅力。自然数幂和

$$1^p+2^p+\cdots+n^p=\sum_{r=1}^{n}r^p(p\in N) \tag{1}$$

就是这样的古老课题之一。在这个课题上，不同时代、不同文化背景中的数学家都作出了不懈的探索、留下了宝贵的遗产，它是数学多元文化的精彩一例。瑞士数学家伯努利(Jacob Bernoulli)、日本数学家关孝和、中国数学家李善兰都各自独立地作出过重要贡献，其中伯努利的名声最大，他给出了幂和的一般公式，公式中的一系列常数后来就是以他的名字命名的。也许，你会毫不犹豫地说：伯努利是幂和的开山鼻祖。

漫长的探索之旅

约在公元前3000年，巴比伦人已经会求前10个自然数平方和，但我们无法判断巴比伦人是否知道一般公式。公元前6世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派已经利用三角形数的构造获得了一次幂和

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \tag{2}$$

并利用正方形数的构造获得奇数和公式；公元前3世纪，阿基米德则发现了二次幂和

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \tag{3}$$

到公元100年左右，毕达哥拉斯学派的尼科马修斯(Nicomachus)发现了立方数与奇数之间的奇妙关系：

$1^3=1$(1个奇数)，

$2^3=3+5$(2个奇数)，

$3^3=7+9+11$(3个奇数)，

$4^3=13+15+17+19$(4个奇数)，

…

从而为三次幂和公式的建立提供了钥匙。因为由上面的规律，我们不难得到一般关系

$$n^3=(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\cdots+(n^2+n-1)$$

因此当 $p=3$ 时，(1)是 $1+2+\cdots+n$ 个连续奇数 $1,3,5\cdots,(n^2+n-1)$ 之和，而后者已为毕达哥拉斯学派所解决，从而根据(2)有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2 \tag{4}$$

据说当时的罗马土地测量员已经知道了这个公式。后来，它也为印度数学家所发现。

幂和公式的研究在漫长的中世纪并没有什么进展。尽管12世纪犹太数学家伊本·埃兹拉(R. Ibn - Ezra)、13世纪意大利数学家斐波那契(L. Fibonacci)和中国数学家杨辉、14世纪法国犹太数学家格尔松(L. ben Gerson)等都给出或证明过二次或三次幂和公式，但他们的工作已不属创见。15世纪，阿拉伯数学家阿尔·卡西(Al - Kashi)给出了四次幂和公式：

$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\left[\frac{1}{5}\left(\sum_{r=1}^{n}r-1\right)+\sum_{r=1}^{n}r\right]\sum_{r=1}^{n}r^2$$

利用(2)和(3)可得：

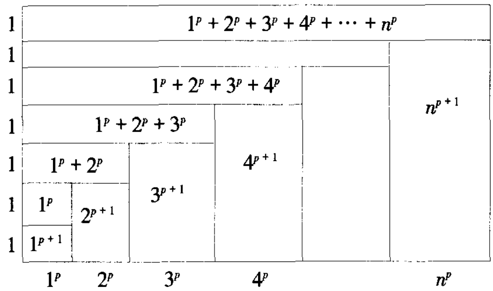
$$1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n \tag{5}$$

尽管 p 从3到4只是小小的一步，可是时间却已经跨越了1300年！到了17世纪，德国数学家福尔哈贝尔(J. Faulhaber)建立了(1)的从 $p=1$ 到 $p=17$ 的幂和公式，福氏焚膏继晷、孜孜以求、不知寒暑几易，却仍未能得到一般的 n 次幂和公式，心中之憾，无以复加。

绝妙的降幂方图

与今天的数学家不一样，历史上不同文化背景下的数学家往往是在相互隔阂的情况下从事数学研究的。如果福尔哈贝尔知道11世纪波斯数学家阿尔·海赛姆(Al - Haitham)的工作，那么他获得那些幂和公式也许就容易得多。

事实上，阿尔·海赛姆是用古希腊人惯用的几何代数法来解决幂和问题的，尽管他要解决的是三次和四次幂和问题，但他的方法显然具有一般性。如下图所示，



它相当于

$$(n+1)\sum_{r=1}^{n} r^p=\sum_{r=1}^{n} r^{p+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k} r^p\right)$$

或

$$\sum_{r=1}^{n} r^{p+1}=(n+1)\sum_{r=1}^{n} r^p-\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k} r^p\right) \tag{6}$$

这就是我们今天所说的降次公式，即将 $p+1$ 次幂和转化为 p 次幂和。如当 $p=2$ 时，

$$\sum_{r=1}^{n} r^3=(n+1)\sum_{r=1}^{n} r^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k} r^2\right)$$

以公式(3)代入，整理得

$$\sum_{r=1}^{n} r^3=\frac{3}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=1}^{n} r^2-\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{n} r$$

将(2)和(3)代入，即得三次幂和公式(5)。类似地，若令 $p=3,4,5\cdots$，依次可求得四次、五次、六次……幂和。

真正的开山鼻祖

尽管阿尔·海赛姆的方法具有一般性，但他本人并没有试图解决四次以上的幂和。法国数学家帕斯卡(B. Pascal)则利用算术三角形归纳出如下公式：

$$C_{p+1}^{1}\sum_{r=1}^{n} r^p+C_{p+1}^{2}\sum_{r=1}^{n} r^{p-1}+\cdots+C_{p+1}^{p}\sum_{r=1}^{n} r=(n+1)^{p+1}-n-1 \tag{7}$$

事实上，由于

$$(r+1)^{p+1}-r^{p+1}=C_{p+1}^{1}r^p+C_{p+1}^{2}r^{p-1}+\cdots+C_{p+1}^{p}r+1$$

分别令 $r=1,2\cdots,n$，将 n 个等式相加即得公式(7)。因此，已知前 $p-1$ 次幂和就可得 p 次幂和公式。利用组合数性质，将(7)写成

$$(n+1)^{p+1}=(n+1)+C_{p+1}^{1}\sum_{r=1}^{n} r+C_{p+1}^{2}\sum_{r=1}^{n} r^2+\cdots+C_{p+1}^{p}\sum_{r=1}^{n} r^p$$

分别令 $p=0,1,2,3\cdots$，依次得

$$n+1=n+1$$

$$(n+1)^2=(n+1)+2\sum_{r=1}^{n} r$$

$$(n+1)^3=(n+1)+3\sum_{r=1}^{n} r+3\sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$(n+1)^4=(n+1)+4\sum_{r=1}^{n} r+6\sum_{r=1}^{n} r^2+4\sum_{r=1}^{n} r^3$$

$\cdots$

将上面的等式写成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix}(n+1)^1\\(n+1)^2\\(n+1)^3\\(n+1)^4\\(n+1)^5\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\1&2&0&0&0&\cdots\\1&3&3&0&0&\cdots\\1&4&6&4&0&\cdots\\1&5&10&10&5&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n+1\\\sum_{r=1}^{n} r\\\sum_{r=1}^{n} r^2\\\sum_{r=1}^{n} r^3\\\sum_{r=1}^{n} r^4\\\vdots\end{pmatrix}$$

等式右边系数矩阵正是由二项系数构成的下三角矩阵，它的行、列数均为无穷。如果掌握一点线性代数知识，我们很容易求出它的逆矩阵。于是，

$$\begin{pmatrix}n+1\\\sum_{r=1}^{n} r\\\sum_{r=1}^{n} r^2\\\sum_{r=1}^{n} r^3\\\sum_{r=1}^{n} r^4\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&\cdots\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&0&0&\cdots\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0&\cdots\\-\frac{1}{30}&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{5}&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(n+1)^1\\(n+1)^2\\(n+1)^3\\(n+1)^4\\(n+1)^5\\\vdots\end{pmatrix}$$

逆矩阵可以不断地求下去。我们惊奇地发现，它的第一列(自第二行开始)竟就是著名的伯努利数！如果将 n 换成 $n-1$，并将所得矩阵式写成方程形式，我们就得到

$$\sum_{r=1}^{n-1} r=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} r^2=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} r^3=\frac{1}{4}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} r^4=\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

$\cdots$

第二项系数 $-\frac{1}{2}$ 改成 $\frac{1}{2}$，诸公式就分别成了前 n 项幂和公式了。因此，只要有足够的耐心去求逆矩阵，任何高次的幂和都将迎刃而解。

尽管在幂和这一课题上，伯努利的名声和地位要大大超出帕斯卡，但不能否认，帕斯卡是当之无愧的开山鼻祖。

本文得到上海市重点学科建设项目资助。

(本文作者为华东师范大学数学系副教授)