

HPM 研究的内容与方法

汪晓勤¹, 张小明^{1, 2}

(1. 华东师范大学 数学系, 上海 200062; 2. 浙江省诸暨中学, 浙江 诸暨 311700)

摘要: HPM 是一个方兴未艾的学术研究领域, 目前已经得到我国数学史界和数学教育界的普遍关注. 数学教育取向的数学史研究, 基于数学史的数学教学设计, 关于历史发生原理的实证研究, 数学史融入数学教学的实验研究等是 HPM 研究的主要方向.

关键词: HPM; 数学史; 数学教学; 历史发生原理

中图分类号: G421 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2006) 01-0016-03

数学史对数学教育的重要作用早在 19 世纪就已经被一些西方数学家所认识. 19 世纪末至 20 世纪 70 年代, 欧美众多著名的数学家、数学史家和数学教育家都提倡在数学教学中直接或间接地利用数学史. 1972 年, 在第二届国际数学教育大会上, 成立了数学史与数学教学关系国际研究小组 (International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics, 简称 HPM), 标志着数学史与数学教育关系作为一个学术研究领域的出现. 通常我们也把该研究领域称作 HPM. HPM 成立以后, 专门讨论数学史在数学教育中作用的文献日益增加, J. Fauvel 曾为 20 世纪 80~90 年代发表的 143 篇相关论文写了摘要; Gulikers 和 Blom 则在英文、法文、德文、荷兰和比利时文的重要数学教育杂志中搜索出 164 篇相关论文^[1]; 4 年一度的 HPM 国际会议 (作为 ICME 的卫星会议) 以及各地的 HPM 学术会议的论文层出不穷; 欧美 HPM 方面的硕士和博士学位论文与日俱增. HPM 这个数学教育学术研究领域正蓬勃发展, 日益繁荣. 第一届全国数学史与数学教育会议的召开表明, 这一领域已经得到我国数学史与数学教育界的普遍关注. 数学史与数学教育研究者们共同关心的问题是: HPM 研究什么? 如何研究? 本文要回答的就是这两个问题.

1 数学教育取向的数学史研究

HPM 研究当然不能脱离数学史的研究; 但与纯数学史研究相比, 前者不是为历史而研究历史, 而是为教育而研究历史, 我们称之为数学教育取向的数学史研究. 其目的之一是为数学课堂教学提供相关材料. 美国数学教师协会早在 1969 年就组织数学史家和数学教育家编写了《用于数学课堂的历史话题》, 供数学教师使用. 中学数学中许多知识点的历史都有待于我们去研究, 因为这些专题史往往为纯数学史家所忽略, 很少完整地见于一般数学通史著作, 如: 平面概念的历史、角概念的历史、向量概念的历史、均值概念的历史、均值不等式的历史, 等等.

数学教育取向的数学史研究的另一目的是获取相关知识 (概念、公式、定理等) 的教学启示. 卡约黎 (F. Cajori, 1859—1930) 的《初等数学史》就是早期的例子. 如, 卡约黎根据负数的历史得出结论: “在教代数的時候, 给出负数

的图形表示是十分重要的. 如果我们不用线段、温度等来说明负数, 那么现在的中学生就会与早期代数学家一样, 认为它们是荒谬的东西.”^[2]M·克莱因 (M. Kline, 1908—1992) 从数学历史中获得了诸多启示, 如: 任何一门学科最初都是通过直观的方法建立起来的, 每一位数学家都是直观地思考问题, 然后才用演绎的形式, 用文字、数学符号和普通的逻辑来表述他的论点. 因此, 数学理解乃是通过直观的方法来获得的, 而逻辑的陈述充其量不过是学习的辅助工具. M·克莱因因而提出如下课程原理: 必须将每一种数学思想或方法的直观意义从直观上清楚地讲给学生^[3].

M. A. Malik 通过对函数概念历史的考察获得启示: 中学阶段应该教简单易懂的函数概念^[4]; J. P. Ponte 通过对函数历史的考察获得启示: 在中学, 将函数定义为数集之间的对应关系是合适的; 在中学数学中必须强调具有解析式的函数例子; 将函数等同于解析式, 不应被看作是一个大错误^[5]! L. Filep 通过对分数概念历史的考察, 获得教学启示: 分数概念的引入必须与度量联系起来, 而不是两数相除^[6].

数学历史是一个宝藏, 不论时代如何变迁, 那些从事数学研究和数学教育的人们总是可以并且也有必要从中汲取有益的思想养料.

2 基于数学史的教学设计

数学史知识与数学教学的具体结合, 一直是 HPM 学者们的研究目标之一. 1995 年在美国国家科学基金资助下成立的、由美国数学协会主管的数学史及其在教学中的运用研究所 (IHMT) 的重要工作之一是“历史模块项目” (Historical Module Project), 由 HPM 学者 V. Katz 和 K. D. Michalowicz 领导, 来自大中学的约三十名数学教师参加, 分下列模块进行融入数学史的教学设计: 阿基米德、组合学、指数与对数、函数、几何证明、长度、面积和体积、线性方程、负数、多项式、统计、三角等.

如何运用数学史进行教学设计? 一个值得推广的做法是学习单的设计, 如下面的“数学期望学习单”^[7]. 在学生学习了数学期望概念后, 教师让他们课后分组解决下面的问题 (史称“点数问题”), 在下次课上讨论.

若有甲乙两人 (赌技相当) 各出赌金 96 金币, 规定必

收稿日期: 2005-11-04

基金项目: 上海市重点学科建设基金资助

作者简介: 汪晓勤 (1966—), 男, 浙江开化人, 副教授, 博士, 主要从事数学史及其与数学教育关系的研究.

须要赢3场者才能赢得全部赌金192金币,但比赛中途因故终止,此时甲、乙胜局数为2:1.问:此时应如何分配赌金?

A认为,其赌金分配应就其胜局比数,即2:1,依比例分配,因此甲应分得 $192 \times 2/3$ 金币,乙应分得 $192 \times 1/3$ 金币.

问题1:请问你认为A的分法可不可行?请说明.

B认为,其赌金分配应考虑若不终止比赛,两人各须赢几场,按其各须赢得场数反比分配;即甲已赢2场,须再赢一场就可获赌金,而乙已赢1场,须再赢二场就可获赌金,因此甲所需场数:乙所需场数=1:2,故其反比为(1/1):(1/2),则甲应分得 $192 \times 2/3$ 金币,乙应分得 $192 \times 1/3$ 金币.

问题2:请问你认为B的分法可不可行?请说明.

C认为,根据至多需要几场比赛才能看出赢家,如果甲需要再比 m 场才赢;乙需要再比 n 场才赢,则需再经过 $m+n-1$ 场才能宣布赢家.以胜局比为2:1为例,接下来的两场比赛可能结果如下(a 代表甲胜, b 代表乙胜): aa (甲胜)、 ab (甲胜)、 ba (甲胜)、 bb (乙胜).所以,两人应得赌金之比为3:1,即甲可得 $196 \times 3/4$ 金币,乙可得 $196 \times 1/4$ 金币.

问题3:请问你认为C的分法可不可行?请说明.

D认为,甲赢两局,乙赢一局,在掷下一次骰子时,若甲赢了,他将得到全部192枚金币;若乙赢了,他们所赢局数比为2:2,在这种情况下分赌金,每人将拿回自己的96枚金币.综上所述,若甲赢了将得192枚金币,乙将获得0枚金币;若甲输了则会拿到96枚金币,乙会拿到96枚金币,因此甲至少可拿到96枚金币,乙至少可拿到0枚金币.假如他们不继续赌下去的话,可将96枚金币先给甲,至于剩余的96枚金币,可能甲得,可能乙得,机会是均等的,所以甲乙两人均分剩下的96枚金币,各得48枚,因此甲乙两人所得金币分别为144枚和48枚.

问题4:请问你认为D的分法可不可行?若不行,请说明.

问题5:利用你所学过的概率知识,此赌金分配问题应如何解?为什么?

尽管这份学习单上并没有出现任何数学家的名字,但所列4种方法分别是15世纪意大利数学家帕西沃里(L. Pacioli, 1445—1509)、卡兰奇(F. Calandri)和17世纪法国数学家费马(P. de Fermat, 1601—1665)和帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662)的解法.学习单的设计者无声地将历史运用到了教学之中.

3 相似性研究——测试与访谈

在数学教学中运用数学史的最重要的依据之一是历史发生原理,即个体对数学概念的认知发展过程与该概念的历史发展过程相似.F·克莱因、庞加莱、波利亚、弗赖登塔尔等都是该原理的支持者.20世纪80年代以来,西方学者对该原理进行了广泛的讨论,实证研究方法随之出现.

E. Harper对英国两所文法学校1~6年级的各12名学生(共144人)进行如下问题的测试(问题选自丢番图《算术》):“已知两数的和与差,证明这两数总能求出.”从修辞法、丢番图法(半符号代数)和韦达法(符号代数)在不同年龄段

的分布,发现学生对符号代数的认知发展过程与符号代数的历史发展过程(修辞代数—半符号代数—符号代数)具有相似性^[8].J. M. Keiser对六年级学生对角概念的理解与角概念的历史进行了对比研究^[9].从历史上看,古希腊人从两边之间的关系、质(形状和特征)和量(角的大小)3方面之一来定义角,但无论哪一种定义都未能完善地刻画这个概念.通过对两个六年级班级几何(教材内容为“形状与图案”)课堂的观察,研究者发现学生对角的理解也分成3种情形:(1)强调“质”的方面:一些学生认为,随着正多边形边数的增加,“角”越来越小;即形状越“尖”的“角”越大.(2)强调“量”的方面:一些学生认为,边越长或者边所界区域越大,角越大;(3)强调“关系”方面:一个学生认为角是将一条边(终边)旋转后与始边之间的一种“关系”.

因此,Keiser的结论是:学生对角概念的理解与角概念的历史是相似的;教材和学生都可以从前人理解角概念的困难性中获得诸多启示.

类似的研究很多.如G. T. Bagni曾在一所理工科中学对88名16~18岁、尚未学过无穷级数概念的高中生进行测试^[10],发现:就无穷级数而言,历史发展与个体认知发展是相似的.K. Zornbala和C. Tzanakis通过对51位大学非数学专业毕业、从事各种职业的对象(社会学家、小学教师、德文和英文教师、心理学家、律师、医生)的调查(调查问题是:①请描述什么是平面;②在你看来,“平面”和“表面”有何不同?③作出一个平面)发现:他们对平面概念的理解与历史上巴门尼德(Parmenides,前5世纪)、海伦(Heron,1世纪)、莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646—1716)、辛松(R. Simson, 1687—1768)、高斯(C. F. Gauss, 1777—1855)、皮埃里(M. Pieri, 1860—1913)等数学家的理解具有相似性^[11];L. E. Moreno和G. Waldegg通过对36名大一学生(尚未接触“实无穷”概念)的问卷调查发现,学生对“实无穷”概念的理解与历史上波尔察诺(B. Bolzano, 1781—1848)等数学家的理解是相似的^[12];A. Bakker则通过研究发现:学生对平均值(算术平均、中位数和众数)概念的理解与历史上该概念的发展过程具有相似性,等等.

4 历史知识在课堂中的运用——教学实验

数学史融入数学教学的有效性归根到底要经过课堂实践的检验.因此,HPM的一项重要研究工作就是教学实验.McBride和Rollins早在1977年就进行了一项为期12周的实验研究,发现使用数学史知识的课程在提高学生学习数学的积极性是十分有效的^[13].Parker则通过对比教学实验,检验了人文向度的数学教学在促进学生学习动机方面的有效性.

历史上的数学问题及其解法对于今天的数学教学是否有用?在一次以20名11~12岁的小学生为对象的教学实验中,M. Kool从16世纪荷兰数学教材中选取3个题目,先让学生自己独立完成上述问题的解答,然后组织大家交流讨论,最后,老师介绍原书上的解法,Kool称之为“课堂里一名额外学生”^[14].实验过程中,学生对历史上的方法产生了浓厚的兴趣,为自己的解法与历史方法的一致性而兴奋

不已.从中他们知道了数学问题解法的多样性,比较了优劣,加深了理解,拓宽了思维.

D. Paola 和 E. Lakoma 都曾利用著名的“点数问题”进行概率的教学实验,实验过程中,学生或比较历史上不同数学家给出的不同解法,或将其与自己的解法相比较^[15].而 G. T. Bagni 则对 139 名 16~18 岁的中学生进行了群概念的教学实验:将被试分成 A、B 两组,分别用 16 世纪意大利数学家邦贝利 (R. Bombelli, 1526—1572)《代数学》(1572)

中的关于 1、-1、i、-i 的运算法则以及 19 世纪英国数学家凯莱 (A. Cayley, 1821—1895) 的乘法表来引入群概念的教学,试图验证利用数学史来引入新概念教学的有效性^[16].

随着 HPM 研究的深入开展,学术界日益注重数学史融入数学教学的可操作性具体方法的探讨以及数学史在数学教育中作用的实际证据的获取.因此,数学教育取向的数学历史研究、关于相似性的实证研究和数学史融入数学教学的实践探索将是未来 HPM 研究的重要方向.

[参考文献]

- [1] Gulikers I, Blom K. 'A Historical Angle': A Survey of Recent Literature on the Use and Value of History in Geometrical Education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, (47): 223-258.
- [2] Cajori F. *A History of Elementary Mathematics* [M]. New York: The Macmillan Company, 1917.
- [3] Kline M. Logic Versus Pedagogy [J]. *American Mathematical Monthly*, 1970, 77(3): 264-282.
- [4] Malik M A. Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function [J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1980, 11(4): 489-492.
- [5] Ponte J P. The History of Concept of Function and Some Educational Implications [J]. *The mathematics Educator*, 1993, 3(2). <http://jwilson.coe.uga.edu/DEPT/TME/issues>.
- [6] Filep L. The Development and the Developing of the Concept of a Fraction [J]. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 2001. <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/lfract.pdf>.
- [7] 苏慧珍. “数学期望值”学习工作单[J]. *HPM 通讯*, 2003, (8-9).
- [8] Harper E. Ghosts of Diophantus [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1987, (18): 75-90.
- [9] Keiser J M. Struggles with Developing the Concept of Angle: Comparing Sixth-grade Students' Discourse to the History of Angle concept [J]. *Mathematical Thinking and Learning*, 2004, 6(3): 285-306.
- [10] Bagni G T. Difficulties with Series in History and in the Classroom [A]. In: Fauvel J. & Van Maanen J. *History in Mathematics Education*[C]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [11] Zorbala K, Tzanakis C. The Concept of the Plane in Geometry: Elements of the Historical Evolution Inherent in Modern Views [J]. <http://www.icme-organisers.dk/tsg17/Tzanakis-Zorbala.pdf>.
- [12] Moreno L E, Waldegg G. The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1991, (22): 211-231.
- [13] Marshall G L, Rich B S. The Role of History in a Mathematics Class [J]. *Mathematics Teacher*, 2000, 93(8): 704-706.
- [14] Kool M. An Extra Student in Your Classroom: How the History of Mathematics Can Enrich Interactive Mathematical Discussions at Primary School [J]. *Mathematics in School*, 2003, 32(1): 19-22.
- [15] Furingghetti F, Paola D. History as Crossroads of Mathematical Culture and Educational Needs in the Classroom [J]. *Mathematics in School*, 2003, 32(1): 37-42.
- [16] Bagni G T. The Role of the History of Mathematics in Mathematics Education: Reflections and Examples[A]. In: Shwank I. *Proceedings of CERME-I* [C]. Osnabrueck: Forschungsinstitut Mathematikdidatik, 2000, 220-231.

HPM Study: Contents, Methods and Examples

WANG Xiao-qin¹, ZHANG Xiao-ming^{1,2}

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

2. Zhuji Middle School, Zhejiang Zhuji 311700, China)

Abstract: HPM, an outstanding research field in mathematics education, was now being taken seriously by historians and educators of mathematics in our country. It was suggested that the most important aspects of future research in this field would be education-oriented history of mathematics, teaching designs based on history, empirical study on parallelism between history and learning, experiments on integration of history and classroom teaching. This paper offered some examples of HPM studies, from which the research methodology could be learned.

Key words: HPM; history of mathematics; pedagogy of mathematics; historical-genetic-principle

[责任编辑: 周学智]