数学史对批判性思维培养的作用*

——以《三角形一边平行线性质定理及推论》一课为例

卢成娴，姜浩哲，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，200062）

摘 要：对 HPM 课例《三角形一边平行线性质定理及推论》中的开放思想、批判思维的自信心、认知成熟度与寻找真相、分析能力、系统化能力等批判性思维特质的培养进行分析。得出结论：数学史对发展学生批判性思维具有独特作用，将数学史融入数学教学可以且应当成为发展学生批判性思维的重要路径之一。

关键词：HPM 批判性思维 三角形一边平行线性质定理

苏格兰数学家阿布斯诺特（J. Arbuthnot，1667—735）在其《论数学学习的益处》中指出："数学使人获得清晰的、论证性的、有条理的推理习惯，为头脑注入生命力，使其免受偏见、轻信和迷信的影响。"数学的教育价值之一就在于培养学生的理性思维。作为21世纪技能的核心，批判性思维是一种"理性的、反思性的思维"，"其目的在于决定我们的信念和行动"。近年来，在数学教学中如何发展学生的批判性思维，已经成为备受关注的热点问题。

事实上，数学史的教育价值可以分成知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效六类，这六类价值均与批判性思维有着密切的联系。本文试图通过对一节典型的初中 HPM 课例进行分析，来回答将数学史融入数学教学对批判性思维的培养有何作用，从而为后续的 HPM 课例研究以及数学学科育人价值的实现提供参考。

一、批判性思维分析框架

20世纪90年代初，美国哲学协会曾组织来自不同领域的46位批判性思维研究专家，制订和发布了著名的《德尔菲报告》，对批判性思维的内涵做了具体阐述。在此基础上，法乔恩（P. A. Facione）等人研制了《加利福尼

亚批判性思维倾向测试》(California Critical Thinking Disposition Inventory,简称 CCTDI),被公认为具有较好的信度和效度,在美国的大学、中学广为使用。

CCTDI 将批判性思维的特质分为七个方面:(1)求知欲,指对知识充满好奇,渴望学习,即使这些知识的实用价值并非直接明显的;(2)开放思想,指对不同的方法和意见采取包容的态度,防止个人偏见的可能;(3)批判思维的自信心,指相信自己的推理过程与分析能力;(4)系统化能力,指有组织、有目标地处理问题;(5)认知成熟度,指审慎地做出判断,或暂不做判断,或修改已有判断,警觉性地接受多种解决问题的方法;(6)寻找真相,指勇于寻找最佳方案,敢于质疑,在寻找知识时保持真诚和客观的态度;(7)分析能力,指能够鉴定问题所在,预计可能出现的结果,基于证据、运用推理解决问题。

二、HPM 课例简述

这节课的课题是“三角形一边平行线性质定理及推论”。

课前,教师下发阅读材料,让学生在阅读教材的基础上阅读,初步了解“三角形一边的平行线”。阅读材料介绍了欧几里得《几何原本》的命题Ⅵ.2、命题Ⅰ.43 以及杨辉的“勾中容横、股中容直”原理。

《几何原本》命题Ⅵ.2 如果一条直线平行于三角形的一边,那么它截三角形的两边成比例;如果三角形的两边被截成比例,那么通过两个截点的直线平行于三角形的第三边(如图 1)。

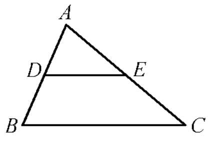

图 1

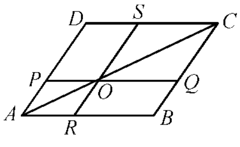

图 2

《几何原本》命题Ⅰ.43 在任何平行四边形中,对角线两边的平行四边形的补形面积相等(如图 2)。

“勾中容横、股中容直”原理 如图 3 所示,设 O 是矩形 $ABCD$ 对角线上一点,过点 O 分别作一组邻边的平行线 PQ、RS,则 $S_{OPDS}=S_{OQBR}$。

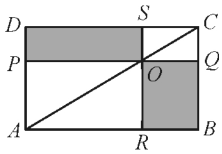

图 3

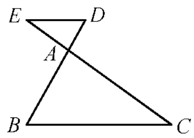

图 4

课上,教师主要从定理“是什么”“如何证”“怎么用”三个方面展开教学。

在“理解定理”环节,教师带领学生分别从文字语言(平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线,截得的对应线段成比例)、图形语言(有两种情形,如图 1 和图 4,分别被命名为“A 字型”与“8 字型”)以及符号语言(因为 $DE\parallel BC$,所以 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$,$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$)三个角度,解读三角形一边平行线性质定理。

在“证明定理”环节,教师首先带领学生回顾《几何原本》中“A 字型”的证明方法,引导学生在“A 字型”的基础上证明“8 字型”;然后引导学生探究三角形一边平行线性质定理的推论,同样利用三种语言描述,并类比欧氏几何方法论证;接着进一步引导学生利用“出入相补”原理证明上述定理与推论,由直角三角形推广到一般三角形;最后引导学生总结欧氏几何方法与“出入相补”原理的异同,深入体会东西方数学思想。

在“应用定理”环节,教师通过两道例题,引导学生分别从欧氏几何方法和“出入相补”原理两个角度进行解答,感受三角形一边平行线性质定理及推论在测量问题中的广泛应

用。例 1 为《九章算术》“勾股章”第 19 题，此题属于一次测望问题；例 2 为《周髀算经》中的日高公式，属于二次测望问题。

在“课堂小结”环节，教师引导学生从数学知识、方法、思想等方面概括本节课的内容，并最后总结：东西方数学方法的殊途同归体现了海纳百川、兼容并包的思想意识，在后续的学习中会进一步体会东西方结合的思想方法。

三、HPM 课例中的批判性思维分析

（一）开放思想

在“证明定理”环节，教师引导学生多角度、多方面地证明三角形一边平行线性质定理，通过展现东西方数学方法，培养学生的开放思想。以下为证明“A 字型”的有关教学片段——

师　根据阅读材料，欧几里得在《几何原本》中是如何证明“A 字型”的呢？

生　（展示图 5）连接 BE、CD，设 DE、BC 之间的距离为 h，则 $S_{\triangle DEB}=S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}DE\cdot h$。又因为 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEB}}=\frac{AD}{DB}$，$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEC}}=\frac{AE}{EC}$，所以 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$。

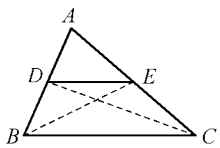

图 5

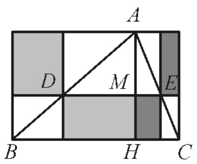

图 6

……

师　虽然“出入相补”原理可以一图多含，但是，它的应用范围是在特殊的直角三角形中。那么，这种证明方法可以运用在一般的三角形中吗？

生　过 A 点作 BC 的垂线。

师　为什么想到作垂线呢？

生　这样就将一个三角形分成了两个直角三角形。（展示图 6）左边补一个（长方形），可以得到 $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{MH}$；右边补一个（长方形），可以得到 $\frac{AE}{EC}=\frac{AM}{MH}$。

师　作出垂线 AH，以它作为桥梁，将一般的三角形转化成特殊的直角三角形。那么，除了这种方法，还有其他方法吗？

生　（展示图 7）把 $\triangle ABC$ 补成平行四边形：过点 A 作 BC 的平行线，过点 B 作 AC 的平行线。

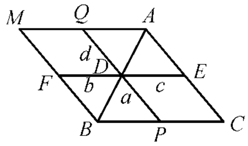

图 7

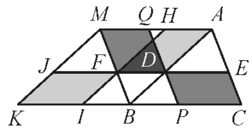

图 8

师　补出来的这张图就是《几何原本》里的图了！根据预习，我们已经知道什么式子？

生　$ac=bd$。

师　而我们要证明的是什么？

生　$\frac{d}{a}=\frac{AD}{DB}$。

师　刚刚我们说可以将直角三角形补成矩形，那么，对一般的三角形，我们是否可以把它补成平行四边形？大家尝试一下。

（学生思考讨论，约 3 分钟。）

生　（展示图 8）可以在 $\triangle ABC$ 左侧再补一个平行四边形：过点 M 作 AB 的平行线，过点 B 作 AM 的平行线。

师　这样，在原来的基础上又做了一次“出入相补”。在平行四边形 $MACB$ 中，$\frac{QD}{DP}=\frac{ED}{DF}$；在平行四边形 $MABK$ 中，$\frac{HF}{FI}=\frac{JF}{FD}=\frac{ED}{DF}$。因此 $\frac{HF}{FI}=\frac{QD}{DP}$，即 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$。（稍停）那么，除了这种补法，还有其他的方法吗？

（学生迟疑。）

师　（展示图 9）刚刚我们是在左边补了一个

平行四边形，我们还可以在右边补一个平行四边形。

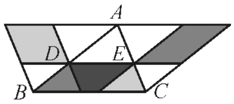

图 9

图 5 的欧氏几何方法与图 6 的“出入相补”方法分别代表了东西方数学思想，是同一个定理在不同视角下的探索，有助于开拓学生的思维；图 8 与图 9 的证法则更进一步，将欧氏几何方法与“出入相补”原理融合，展现了两种文化的水乳交融，有助于培养学生兼容并包的开放思想。

（二）批判思维的自信心

在“证明定理”环节，教师还引导学生以《几何原本》中的“A 字型”为媒介，探索“8 字型”的多样证明方法，完善定理的证明过程。

师　《几何原本》中只给出了“A 字型”，那么用欧氏几何的面积方法，能否证明“8 字型”呢？

生　（展示图 10）联结 BE、CD，因为 $\triangle BED$ 与 $\triangle CDE$ 面积相等，所以 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 面积相等，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EAB}}=\frac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle DAC}}=\frac{AE}{AC}$。

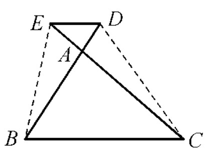

图 10

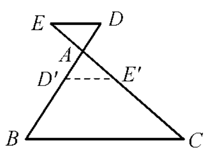

图 11

师　非常棒！还有其他方法吗？

生　（展示图 11）可以将“8 字型”转化成“A 字型”。只要在 AB 上截取 $AD'=AD$，在 AC 上截取 $AE'=AE$，连接 $D'E'$，证明 $\triangle ADE$ 与 $\triangle AD'E'$ 全等，就可以将 $\triangle ADE$ 转化为 $\triangle AD'E'$。

师　将“A 字型”变成已知的条件，这就是欧几里得《几何原本》非常漂亮的地方，将结论作为条件应用。那么，这种转化还有其他的方式吗？

生　（展示图 12）过点 D 作 EC 的平行线，交 BC 的延长线于 C'。

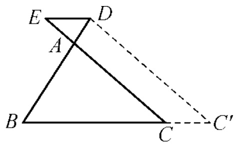

图 12

师　你是怎么想到这种方法的呢？

生　本来 BD 与 CE 是交叉的，平移以后就可以转化成“A 字型”了。

师　非常棒！通过这种思路把“8 字型”也转化为了“A 字型”。

在这一探索过程中，学生能够站在古代数学家的肩膀上思考问题，弥补他们的不足，无形中提高了学生批判思维的自信心。

（三）认知成熟度与寻找真相

在“证明定理”环节，讨论“利用‘出入相补’原理是否能证明三角形一边平行线性质定理”时，起初部分学生的答案是否定的，但是，在交流中他们发现能够证明直角三角形一边平行线性质定理，进而发现结合等比性质还能优化证明过程。

师　在阅读材料中，我们给出了由“出入相补”原理得到的“勾中容横、股中容直”原理。我们既然要走东西方结合的道路，那么能够通过“出入相补”原理证明上述定理与推论吗？我们先一起来说一说根据“出入相补”原理可以得到什么？

生　（展示图 3）将 OR、OP、OQ、OS 分别标为 a、b、c、d，根据 $S_{OPDS}=S_{OQBR}$ 可以得到 $OP\cdot OS=OQ\cdot OR$，也就是 $\frac{d}{a}=\frac{c}{b}$。

师　但我们现在的问题是可否证明三角形一边平行线性质定理与推论。我们先找一

个“A 字型”。在这个图形中，我们需要证明$\frac{OC}{OA}=\frac{d}{a}=\frac{c}{b}$。这个结论与刚刚的“容横、容直”结论并不一样，是否可以下定论：利用“出入相补”原理无法证明三角形一边平行线性质定理？

（学生思考，有人说不可以，有人说可以。）

师　有同学一开始说无法证明，后来又说可以证明。我们就请他来说说看。

生　根据勾股定理可知，$\frac{OC^2}{OA^2}=\frac{c^2+d^2}{a^2+b^2}$，而$a=\frac{bd}{c}$，$d=\frac{ac}{b}$，将它们中的一个带进去消元，化简后就可以得到。

师　是能够算出来的，只是有点复杂。有没有同学有其他方法？如果没有，我们就把上面的式子代进去计算。

生　由$\frac{d}{a}=\frac{c}{b}$可得$\frac{d^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}$，直接利用等比性质$\frac{c^2+d^2}{a^2+b^2}=\frac{d^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}$，就可以证出$\frac{OC^2}{OA^2}=\frac{d^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}$，开方后可得$\frac{OC}{OA}=\frac{d}{a}=\frac{c}{b}$。

在这一探究过程中，“勾中容横、股中容直”原理与三角形一边平行线性质定理的不一致引发了学生的深度思考，让他们始终积极地进行探索，从而用严密的逻辑推理证明了定理，并结合等比性质找到了最佳证明方法。这培养了学生勇于探索的求真精神。同时，这一探究过程也启示学生：面对问题要有自己的思考，不可轻易做出判断。这有助于培养学生科学论证的理性精神，提高学生的认知成熟度。

（四）分析能力

在“证明定理”环节，利用欧氏几何方法和“出入相补”原理证明定理及推论后，教师进一步引导学生比较这两种方法之间的异同，体会数学思想，理解数学本质，从而提升分析能力。

师　我们用欧氏几何方法和“出入相补”原理分别证明了三角形一边平行线性质定理及推论，你觉得它们之间有什么相同点和不同点呢？

生　所有的证法都用到了面积。

师　通过面积从什么证什么？

生　通过面积从平行线证比例式。

师　非常好！它们的共性是将平行关系转化为比例式以及借助了面积。在这个过程中还包括了从特殊到一般、从静态到动态，体现了类比、化归、分类讨论和一题多解等思想方法。那么，它们之间的不同点在哪里呢？

生　利用欧氏几何方法只研究了“A 字型”，而利用“出入相补”原理不仅研究了“A 字型”，而且研究了“8 字型”，可以直接得出定理和推论。

生　“出入相补”原理更加完整，但是欧氏几何方法更加简单。

师　我们总结一下：欧氏几何方法是完美的演绎推理，由一个推到另一个，可将已经证明的结论作为解题的条件，是结论性方法；而“出入相补”原理不同，它一个图包含多个内容，一个结论出来另一个也就出来了，在求解的过程中就包含了解题的方法，是过程性方法。（稍停）那我们进一步来探讨：你觉得为什么东西方数学家都想到用面积来证明三角形一边平行线性质定理？这与想到用面积来证明勾股定理有必然联系吗？

生　比例式可以化成乘积式，乘积式就表示面积。

生　两条边相乘是两维的，最常见的两维表示是面积。

生　在勾股定理中，a^2、b^2 都可以看作正方形的面积。在这个定理中，乘积式与面积

也有一定的联系。

师　大家都说得很好！实际上，面积在平面几何中有“帝王不变量”之称。古今中外很多数学家都很重视面积方法。纪伯伦曾说：“人性是一条光河，从无始流到永恒。”可能就是数学家的这种人性之美发现了数学的理性之美，使他们共同发现，原来路可以往这里。我们同学也可以继续发现数学的美。

这里，教师由历史上的定理证明出发，一步一步引导学生挖掘证明方法之间本质的联系，发现比例的基本性质是东西方数学家都用面积证明定理的关键。这一过程有助于培养学生分析问题和解决问题的能力。

（五）系统化能力

在“应用定理”环节，教师借鉴古人的测量方法，以《九章算术》与《周髀算经》中的测量题为例，从“一次测望”到“重差术”，系统地介绍了各类测量问题的求解方法。

例 1　《九章算术》“勾股章”第 19 题：今有邑方不知大小，各开中门。出北门三十步有木，出西门七百五十步见木，问邑方几何？

例 2　我国西汉时期天文学家提出了著名的“重差术”：如图 13，为了测量太阳离大地（当时人们认为大地是平的）的高度 H，立高为 a 的两表，测得影长分别为 s_1 和 s_2，两表之间相距 d，则日高为 $H=a+\frac{ad}{s_2-s_1}$。请用杨辉的“勾中容横、股中容直”原理加以证明。

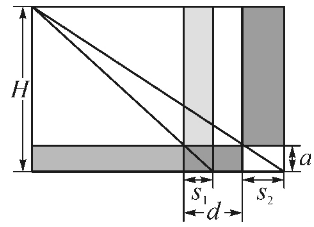

图 13

解后归纳：例 1 只需要一次测望即可；例 2 则需要用到二次测望。二次测望称为“重差术”，刘徽曾在《海岛算经》中阐述这种方法：“凡望极高，测绝深而兼知其远者，必用重差。”《海岛算经》中还记载了三次测望、四次测望，课后同学们可以进一步去探究。

四、小结

综上所述，在《三角形一边平行线性质定理及推论》课例中，将数学史通过多种方式融入数学教学，培养了学生的批判性思维，总结起来如表 1 所示。

表 1

批判性思维特质	教学内容	数学史融入方式	数学史使用价值
开放思想	通过展现东西方数学思想引导学生多角度、多方面地证明三角形一边平行线性质定理	复制式、顺应式、重构式	拓宽解题思维
批判思维的自信心	通过展现《几何原本》中“A 字型”的证明，引导学生用多种方法证明“8 字型”，完善数学家对三角形一边平行线性质定理的探索过程	复制式、顺应式	奠定探究基础
认知成熟度与寻找真相	通过“勾中容横、股中容直”原理的讨论，引导学生探究利用“出入相补”原理能否证明定理与推论	复制式、顺应式	引导深度思考
分析能力	通过不同证明方法的比较，引导学生分析其中的异同，感受数学思想的水乳交融	顺应式	铺设分析视角
系统化能力	引用古代测量问题，系统介绍各类测量问题的求解方法，由“一次测望”到“二次测望”	复制式	提供解法借鉴

五、反思

虽然在不同的HPM课例中,数学史的融入内容和方式会有不同,批判性思维的特质体现也会有不同,但是,我们有理由相信,数学史对发展学生批判性思维具有独特作用,将数学史融入数学教学可以且应当成为发展学生批判性思维的重要路径之一。

对此,本节课还有一些需要进一步完善的地方。在课堂引入部分,教师可以结合数学史料阐述学习定理的必要性,激发学生的求知欲;对于学生的证明方法,教师可以从数学史角度给予肯定,将学生的方法与数学家的方法进行比较,倡导古今对话,激发学生的自信心;在比较东西方数学方法的异同时,可以进一步揭示东西方文化的共同之处,使学生感受到东西方文化的殊途同归,提高学生的分析能力。

从这个意义上说,HPM教学具有揭示学习必要性、倡导古今对话等价值,同样对发展学生的批判性思维有着重要的作用。这给未来数学史料的选材与加工、课堂教学的预设与生成乃至HPM课例的开发与应用提供了启示。

---

* 本文系上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”(编号:A8)和华东师范大学教育学部2018年度大学生科研基金项目“初中生数学批判性思维测评工具开发与培养路径探析”(编号:ECNUFOE2018KY021)的阶段性研究成果。

参考文献:

[1] J. Arbuthnot. *An Essay on the Usefulness of Mathematical Learning* [M]. Oxford: Anth. Peisley,1701.

[2] 张奠宙,赵小平. 玻璃对喝水有何用?[J]. 数学教学,2010(5).

[3] 彭正梅,邓莉. 迈向教育改革的核心:培养作为21世纪技能核心的批判性思维技能[J]. 教育发展研究,2017(24).

[4] R. H. Ennis. Critical thinking: A streamlined conception [J]. *Teaching Philosophy*, 1991(1).

[5] 李文婧,傅海伦. 数学批判性思维及其教学策略[J]. 教育科学研究,2006(5).

[6] K. Malamitsa, M. Kasoutas, P. Kokkotas. Developing Greek Primary School Students' Critical Thinking through an Approach of Teaching Science which Incorporates Aspects of History of Science[J]. *Science & Education*,2009(3-4).

[7] X. Q. Wang, C. Y. Qi, K. Wang. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study[J]. *Science & Education*,2017(2).

[8] The American Philosophical Association. *The Delphi Report*[M]. California: California Academic Press,1990.

[9] 马军英,等. 高校师范生批判性思维倾向的调查研究[J]. 数学教育学报,2015(6).

[10] N. C. Facione, P. A. Facione. Critical Thinking Disposition as a Measure of Competent Clinical Judgment: The Development of the California Critical Thinking Disposition Inventory [J]. *Journal of Nursing Education*,1994(8).

[11] 彭美慈,等. 批判性思维能力测量表的信效度测试研究[J]. 中华护理杂志,2004(9).

[12] 徐章韬. 从全等、相似到面积、三角——教育数学研究之七[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2019(1).

[13] 苑建广. 勾股定理证明的本质探究及教学启示[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2016(4).