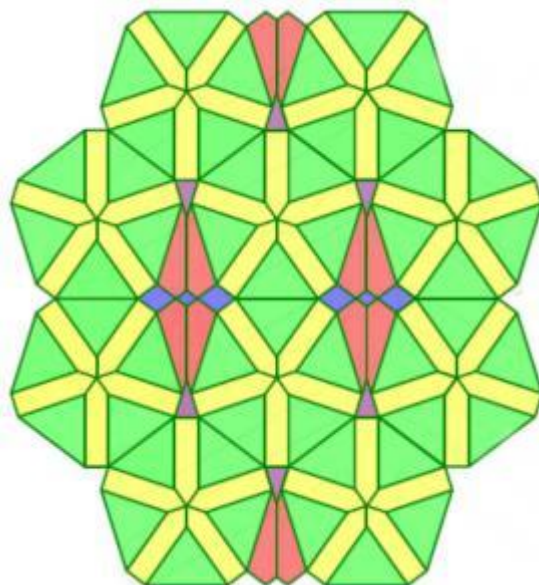




上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2018 年第 7 卷第 6 期



哥本哈根步行街地砖镶嵌图

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 彭 刚 洪燕君 栗小妮

责任编辑：李卓忱 余庆纯

编委（按姓氏字母序）：

洪燕君 栗小妮 李卓忱 牟金保 彭 刚 任芬芳 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 王 鑫 余庆纯 岳增成
邹佳晨

刊首语——2018 年 HPM 研究概述

2018 年, HPM 专业学习共同体秉持“领悟、勤奋、协作、高效”的学训, 在学术研究与教学实践两方面都取得了丰硕的成果。

专业引领初具规模。2018 年初, 上海市“立德树人”数学教育教学研究基地和华东师范大学教师教育学院共同创建数学史与数学教育 (HPM) 工作室, 这是国内首个由高校教师领衔的 HPM 工作室, 具有重要的历史意义。来自小学、初中和高中各学段的首批三十余名学员拥有一个共同的目标, 即学习和实践 HPM, 改善数学课堂教学, 培育数学文化素养, 提升实践研究能力, 促进自身专业发展。工作室成立以来, 先后开展了 30 余次各学段的 HPM 课例研究活动, 形成了一系列富有特色、有一定学术水准的课例。

学术交流更上层楼。2018 年 5 月, 华东师大 HPM 研究团队应邀参加在台湾师范大学举办的“上海与台北 HPM 双城论坛”, 海峡两岸的 HPM 学者欢聚一堂, 倾心分享, 热烈研讨, 答疑解惑, 展望未来。2018 年 7 月, 第八届“数学史与数学认识论”欧洲暑期学校 (ESU-8) 在奥斯陆如期举行, 华师大 HPM 方向研究生在会上共同组织了一个半小时的工作坊, 并分别做了分组报告。2018 年 10 月, 第三届华人数学教育大会 (CCME-3) 之 HPM 分论坛暨第六届 HPM 教学研讨会 (SHPM-6) 在华东师范大学成功举办, HPM 工作室多名成员在会上展示了各自的理论和实践研究成果。

学术研究成就斐然。2018 年, 华师大 HPM 团队与 HPM 工作室在上海市数学教育教学研究基地研究项目“如何在数学课程中体现立德树人的根本任务”以及上海市教育科学重大项目子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”上取得丰硕的研究成果, 先后发表论文三十余篇, 其中有 7 篇被人大复印报刊资料中心转载, 转载量创历史新高。

社会影响日益扩大。《教育研究与评论 (中学教育教学)》、《数学教学》、《中小学课堂教学研究》等刊物相继设立 HPM 专栏, 《教学月刊》小学版 (数学) 和《小学教学》 (数学版) 先后发表 HPM 专辑, 在中小学数学教育界产生了广泛的影响。凭借多年的实践积淀与研究成果, 华师大 HPM 团队的“数学史融入初中数学教学的实践研究”荣获上海市基础教育教学成果一等奖。

新时代的数学教育为 HPM 提供了良好的机遇和广阔的舞台。且让我们不忘初心、砥砺前行, 携手走进美好的明天。

目 录

刊首语..... 沈中宇 I

理论探讨

鲁迅科学史观对数学学科德育的启示 汪晓勤 1

历史研究

美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题 周天婷, 沈中宇 10

课例研究

HPM 视角下的“十字相乘法”课例研究 邵爱娣, 余庆纯 20

HPM 视角下的高中“函数概念”课例研究 刘思璐, 沈中宇 30

教学实践

基于数学史的三角形内角和探究活动的设计与实施 瞿鑫婷, 汪晓勤, 贾彬 39

学术资讯

2018 年 HPM 研究成果 47

CONTENT

FOREWORD	Shen Zhongyu I
<u>THEORETICAL DISCUSSION</u>	
The Revelation of the Lu Xun's View of Scientific History for Moral Education in Mathematics	Wang Xiaoqin 1
<u>HISTORICAL STUDY</u>	
The Problems about Measuring Height in Early American and English Trigonometry Textbooks	Zhou Tianting, Shen Zhongyu 10
<u>LESSON STUDY</u>	
The Lesson Study of "Method of Cross Multiplication" from the Perspective of HPM	Shao Aidi, Yu Qingchun 20
The Lesson Study of "The Concept of Function" in senior high school from the Perspective of HPM	Liu Silu, Shen Zhongyu 30
<u>TEACHING PRACTICE</u>	
Design and Implementation of the Inquiry Activities of "The Sum of the Angles of a Triangle" Based on the History of Mathematics	Qu Xinting, Wang Xiaoqin, Jia Bin 39
<u>ACADEMIC INFORMATION</u>	
Research Achievements of HPM in 2018	47

理论探讨

鲁迅科学史观对数学学科德育的启示

汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院, 上海, 200062)

“立德树人”是今日教育的根本任务,如何在数学教学中落实这一任务,是数学教育研究的重要课题。实践证明,数学史融入数学教学,可以达成“德育之效”^[1]。然而,在数学史与数学教育之关系(HPM)的研究中,人们对于“德育之效”的内涵还缺乏清晰的认识,一个清晰的数学德育分析框架还有待于建立。为此,我们需要更多的思想和理论支撑。

“科学史教篇”是鲁迅 26 岁时撰写的一篇阐述科学历史启示的文章,最初于 1908 年发表于《河南》月刊第 5 号,后收入其文集《坟》。年轻的鲁迅胸怀祖国,放眼世界,追古鉴今,文采飞扬。此文至今读来,仍让人受益良多。鲁迅早在开篇即指出,现代社会之进步,实源于科学之进步,而“科学盛大,决不缘于一朝”^[2],今人可以从科学的历史发展轨迹中获得诸多教训。尽管鲁迅在文中并未涉及教育,但他所表达的科学史观,对于我们今日的数学教育同样有着诸多教训。本文试图对鲁迅科学史观中的德育元素进行分析,由此得出数学德育的若干内涵。

1 认识科学活动的本质

“科学史教篇”全文反映出鲜明的科学进步观。鲁迅批判那种把一切都归功于古人的厚古情结,认为这与“蔑古”并没有什么两样。他指出:

“盖神思一端,虽古之胜今,非无前例,而学则构思验实,必与时代之进而俱升,古所未知,后无可愧,且亦无庸讳也。”^[2]

就数学而言,一部数学的历史,就是概念、思想、方法、学科的进步史。在代数学发展的早期,人们只能用自然语言来刻画方程的求解过程;到了公元 3 世纪,丢番图采用字母来表示未知数,使得代数学进入了缩略代数的时代;到了 16 世纪,韦达用字母来表示一类数或任意数,从而创立了符号代数,使代数学插上了翅膀。15 世纪以前,三角学不过是天文学的工具而已;15 世纪之后,三角学成为几何学的分支;到了 17 世纪,三角学成了测量之学;19 世纪以后,三角学逐渐演变成研究周期现象的学问。微积分在 17 世纪诞生之初,由于缺乏严密的逻辑基础而受到攻击,直到 19 世纪才臻于完善。古希腊人用纯几何方法研究

动点轨迹问题，面对五线以上的轨迹问题而黔驴技穷，一筹莫展；而随着 17 世纪解析几何的诞生，这些问题迎刃而解。人们对函数概念的认识，经历了从解析式到变量依赖关系，从变量对应关系到集合对应关系，最后到序偶集的漫长过程。欧几里得在《几何原本》中所给出的棱柱定义是不完善的，直到 20 世纪初，人们才找到欧氏定义的反例。就是数列通项这样微观的主题，也经历了从文字到字母，再到带有下标的字母的漫长演进历史。

教师在数学课堂上展示数学主题的演进过程，传递的就是科学进步观。学生可以从中学认识到数学和数学活动的本质：数学乃是人类的一种创造性的文化活动，是人在创造数学知识；数学是不断演进的，并非一成不变的真理之集合；人们在数学活动中难免会犯错误。

鲁迅还告诉我们，科学的发展、世界的进步并非线性的：“所谓世界不直进，常曲折如螺旋，大波小波，起伏万状，进退久之而达水裔，盖诚言哉。”^[2]

今天，人们往往会误以为一门科学的发展是线性的。在数学教学中，这种误解是相当普遍的。许多教师认为，数系经历了从正有理数、零、负有理数、再到实数的扩充过程。但实际上，这只是数系扩充的逻辑顺序。早在公元前 5 世纪，无理数已经为毕达哥拉斯学派所发现，远早于负数的应用。许多教师还误以为，历史上先有小数概念，后又无理数概念，因为无理数被定义为“无限不循环小数”。事实是，无理数的出现远早于小数概念，在“无穷”概念进入数学之前，无理数常常被定义为“不尽根”。

函数概念的演进过程远非人们想象的“新旧更替”那样简单。实际上，新定义的出现，并非意味着旧定义消失，而是呈现交叉重叠的现象，即使到了 19 世纪，狄利克雷（G. L. Dirichlet, 1805-1859）给出函数的现代定义（变量对应关系）后，解析式说依然大行其道！

人们常常又误以为，历史上先有直线的斜率概念，后有直线方程，但事实是，早在 17 世纪，费马和笛卡儿已经知道一元二次方程 $y = ax + b$ 表示直线，但当时并没有斜率概念。后来，人们发现 a 表示的直线与 x 轴正半轴夹角的正切；而斜率一开始表示的是平面的倾斜程度，后用来表示直线的倾斜程度。最终，斜率与倾斜角的正切之间成就了一段金玉良缘。

理解历史的演进性和复杂性，方能更好地认识数学和数学活动的本质。这种关于数学的信念乃是数学德育的要素之一。

2 走进古人的心灵之中

鲁迅指出，古希腊哲学家们将水、气、火作为宇宙的基本元素，是不正确的。但从探索自然的精神来说，“毅然起叩古人所未知，研索天然，不肯止于肤廓”^[2]，却并不逊于近代。

鲁迅认为，不能站在今天的角度，以今天的知识、今天的观点来衡量古人的工作，而应从时代背景出发，设身处地，走进古人之心，方能对历史作出客观评价：

“盖世之评一时代历史者，褒贬所加，辄不一致，以当时人文所现，合之近今，得其差池，因生不满。若自设为古之一人，返其旧心，不思近世，平意求索，与之批评，则所论始云不妄，略有思理之士，无不然矣。……世有哂神话为迷信，斥古教为谄陋者，胥自迷之徒耳，足悯谏也。盖凡论往古人文，加之轩轻，必取他种人与是相当之时劫，相度其所能至而较量之，决论之出，斯近正耳。”^[2]

这里，鲁迅批判的实际上就是后来英国历史学家巴特菲尔德（H. Butterfield, 1900-1979）所说的“辉格史”或“历史的辉格解释”。19 世纪英国数学家德摩根（A. de Morgan, 1806-1871）讲过一个故事^[3]：他在剑桥大学读书时，常常和一位朋友一起散步，有一次散步时，他们谈起对数这一话题。那位朋友说，他很怀疑纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）是否真的有如人们所说的那么伟大，因为有了幂 a^x ，反过来求指数，很自然就能推出对数。德摩根的朋友所做的正是“历史的辉格解释”。他不知道，纳皮尔所生活的时代，人们根本就没有指数记号。

今天，教师在将数学史融入数学教学时，往往会采用“辉格史”。试举数例：

（1）赵爽对勾股定理的证明

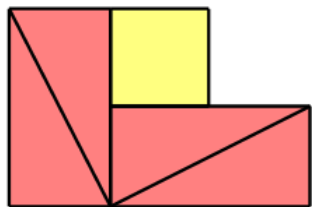


图 1

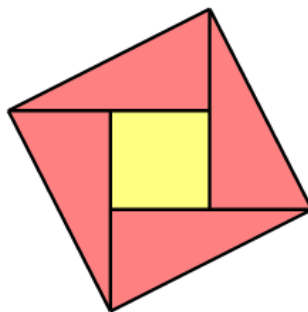


图 2

三国时代数学家赵爽在为《周髀算经》作注时，利用弦图对勾股定理作出了证明：将四个红色直角三角形和一个黄色正方形拼成图 1 所示的阶梯形，该阶梯形恰好由两个边长分别为直角三角形两条直角边的正方形构成；移动其中两个直角三角形，可将阶梯形变成图 2 所示的以直角三角形斜边为边长的正方形（弦图），从而证明了勾股定理。若以 a 、 b 和 c 表示勾、股和弦，由图 2 得到：

$$(b-a)^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab = c^2$$

化简得

$$a^2 + b^2 = c^2$$

作为赵爽弦图的代数解释，这自然是不错的，但许多教师却将上述数形结合方法归功于赵爽本人。赵爽所生活的三国时代，人们根本不知道字母符号为何物，更谈不上字母符号的操作了。这是典型的“以今代古”之例。

(2) 欧几里得关于素数的命题

古希腊数学家欧几里得在其《几何原本》中卷九给出如下命题（命题 10）：“素数比任意给定的个数都要多。”今日往往将命题表述为“素数有无穷多”，但这样的表述已经远离欧几里得那个时代的话语体系了，因为古希腊人只接受潜无穷而并不接受实无穷。因此，“素数有无穷多”之说，不过是今人强加于古人的表达方式而已。

鲁迅告诉我们，研究历史时，我们需要“自设为古之一人，返其旧心，不思近世，平意求索，与之批评”，亦即，我们需要抛开我们所生活时代，抛开“以自我为中心”的思维习惯，走进古人的心灵之中，才能对古人做出客观的评价。

在实践中，教师将数学史融入数学教学，为学生接触不同时空数学家的思想方法提供了机会。由于文化背景、数学表征、数学发展水平的巨大差异，对于同一问题，古今解法往往是不同的。试举一例。古巴比伦数学泥版 YBC 6967 上记载了这样一个问题：“一个数比它的倒数大 7，求该数。”^[4]对于古巴比伦祭司来说，若两数乘积为 60 的幂，则它们互为倒数。用今天的代数语言和符号来表达，本问题相当于已知 $xy = 60$ ， $x - y = 7$ ，求 x 和 y 。泥版

上给出的解法是：“将所超过的数 7 折半，得 $3\frac{1}{2}$ 。将 $3\frac{1}{2}$ 自乘，得 $12\frac{1}{4}$ 。加 60，得 $72\frac{1}{4}$ 。

$72\frac{1}{4}$ 的平方根是多少？ $8\frac{1}{2}$ 。置 $8\frac{1}{2}$ ，分别加上和减去 $3\frac{1}{2}$ ，得 12 和 5。12 为所求数，5 为它的倒数。”

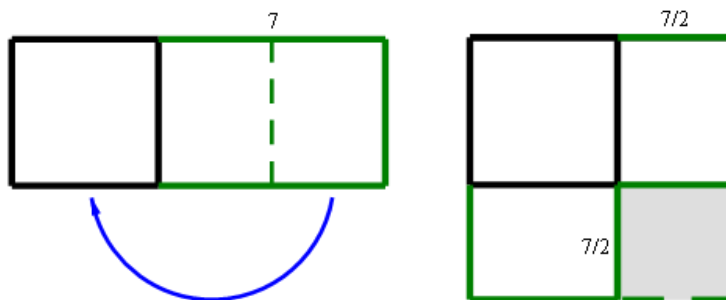


图 3 倒数问题的几何模型

古巴比伦祭司没有我们今天的代数符号和语言，但对于二元一次方程组 $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 60 \end{cases}$ 或一

元二次方程 $x^2 + 7x = 60$ 的解法竟可以娓娓道来。抛开今日惯用的代数符号和语言，设想生活在古巴比伦，我们怎样去解方程？图 3 给出了一种直观的几何解法，这正是今日我们耳熟能详的配方法的几何表征。

让学生从古人的角度出发去思考古人解决问题的方法，实际上就是让他们走进另一个时代、另一种文化背景下的数学家心灵之中。如果一名学生能够走进古人的心灵之中，那么他在现实世界同样能够树立换位思考的意识，懂得友善、倾听、包容、尊重和克制，而这些正是一个人品行和修养的要素。

3 科学家的品质

科学改善了人类的物质生活，同时，科学家也为人类留下了宝贵的精神财富。鲁迅写道：

“弗勒那尔（今译菲涅尔）以力、数学之研究有名，尝柬其友曰，名誉之心，去已久矣。吾今所为，不以令誉，特以吾意之嘉受耳。其恬淡如是。且发见之誉大矣，而威廉司（今译华莱士）逊其成就于达尔文，本生付其勤于吉息霍甫（今译基尔霍夫），其谦逊又如是。故科学者，必常恬淡，常逊让，有理想，有圣觉，一切无有，而能贻业绩于后世者，未之有闻。”^[2]

法国物理学家菲涅尔（A. Fresnel, 1788-1827）之淡泊名利，英国博物学家达尔文（C. R. Darwin, 1809-1882）与华莱士（A. R. Wallace, 1823 - 1913）之谦让，德国化学家本生（R. W. Bunsen, 1811-1899）与物理学家基尔霍夫（G. R. Kirchhoff, 1824-1887）之友谊，均为科学史上的佳话。但人性是复杂的，纵观科学的历史，也并非所有的科学家都像鲁迅所说的那样“恬淡”和“逊让”。优先权之争并不少见，如 16 世纪意大利数学家卡丹（G. Cardano, 1501-1576）与塔塔格里亚（N. Tartaglia, 1499-1557）关于三次方程求根公式之争。但鲁迅特别珍视科学家身上的那些可贵的品质，正是这些可贵的品质，才是理想的教育素材。显然，“隐恶扬善”是鲁迅撰写“科学史教篇”的重要目的。

科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）云：研究数学史的主要理由在于人文，而数学史家的主要职责之一是解释数学的人性。HPM 视角下的数学教学的目的之一是将数学课堂人性化。为了达到这一目标，我们需要运用具有德育价值、能传播正能量的史料。

中国三国时代数学家赵爽“负薪余日，聊观《周髀》”；英国数学家约翰·迪伊（J. Dee,

1527-1608) 读大学时每天只睡四小时; 法国数学家韦达 (F. Viète, 1540-1603) 在研究数学时, 三天三夜不出房门; 法国女数学家索菲·热尔曼 (S. Germain, 1776-1831) 在墨水结冰的漫漫冬夜里, 研读微积分; 19 世纪英国数学家托德亨特 (I. Todhunter, 1820-1884) 在蜜月旅行途中仍随身携带哈密尔顿 (W. R. Hamilton, 1805-1865) 的《四元数》。勤奋是每一位数学家的必备品质。《南史·文学传》称数学家祖暅: “当其诣微之时, 雷霆不能入。尝行遇仆射徐勉, 以头触之, 勉呼乃悟。” 牛顿请朋友吃饭的故事家喻户晓。历史上数学家心无旁骛钻研问题的事迹, 俯拾皆是。

牛顿临终之前为世人留下了一句名言:

“我不知道世界会如何看我, 但对我自己来说, 我就好像是一个在海边玩耍的孩子, 不时为拾到比通常更光滑的石子或更美丽的贝壳而欢欣鼓舞, 而展现在我面前的却是完全未知的浩瀚的真理之海。”^[5]

牛顿的传记作者布鲁斯特 (D. Brewster, 1781-1868) 认为, 牛顿的谦逊源于他渊博的知识, 正是这种渊博让他看到, 自己所能考察的只是自然很小很小的一部分, 自己所耕耘的领域中有待于探索的却很多很多, 从而感到自己的渺小^[4]。数学家还会将生命个体置于整个宇宙之中来审视。美国数学史家史密斯 (D. E. Smith, 1860-1944) 曾说: “数学是人类探索宇宙的工具, 它揭示了我们在浩瀚宇宙中的位置, 他让我们看到, 我们自身不过是宇宙中的一粒微尘。我们的怀疑、信念、希望和恐惧都是微不足道的, 都是无穷小量, 就如太阳系里失去的一个电子一般。”^[6]

坚韧不拔、永不言弃, 是那些有成就的数学家所共有的意志品质。纳皮尔二十年如一日, 构建简化天文计算的工具, 最终发明对数; 开普勒 (J. Kepler, 1571-1630) 遭遇生活中的巨大不幸, 却依然不放弃他的天文探索; 欧拉 (L. Euler, 1707-1783) 双目失明, 依然没有停止研究的脚步。

由此我们看到, 勤奋、专注、谦逊、坚韧、执着是数学家优秀的品质。将数学史融入数学教学, 恢复数学背后人的元素, 传递数学背后的人文精神, 涤荡学生的心灵, 让他们感悟成功的真谛和生命的意义, 这无疑是数学德育的重要内涵。

4 急功近利, 难以长久

纵观科学的历史, 鲁迅发现, 科学家致力于科学研究并非出于功利, 而是纯粹为了追求真理, 揭示自然规律而已。赫歇耳 (F. W. Herschel, 1738-1822) 和拉普拉斯 (P. - S. de Laplace,

1749-1827) 之于天文学, 托马斯 扬 (Th. Young, 1773-1829) 和菲涅尔之于光学, 奥斯特 (H. C. Oersted, 1777-1851) 之于电磁学, 拉马克 (J. de Lamarck, 1744-1829) 之于生物学, 德坎多尔 (A. de Candolle, 1778-1884) 之于植物学, 维纳 (A. G. Werner, 1749-1817) 之于矿物学, 赫顿 (J. Hutton, 1726-1797) 之于地质学, 瓦特 (J. Watt, 1736-1819) 之于机械学, 无不如此。不以功利为目的的科学研究, 最终导致发明迭出, 实业繁荣, 为人类带来了福祉。鲁迅指出:

“惟若眩至显之实利, 摹至肤之方术, 则准史实所垂, 当反本心而获恶果, 可决论而已。此何以故? 则以如是种人之得久, 盖于文明政事二史皆未之见也。”^[2]

英国著名诗人华兹华斯 (W. Wordsworth, 1770-1850) 在其《序曲》中称数学为“由纯粹智力创造出来的独立世界”, 这个世界很少与“至显之实利”“至肤之方术”有关。欧几里得因为一名学生想从数学学习中获得实例而拒绝接受他, 这一故事充分说明了古希腊数学研究的纯粹性。今天, 很多人都在问: 为什么我们国家那么多国际奥林匹克金牌得主日后都与菲尔茨奖无缘? 为什么那些高考状元和学霸日后默默无闻? 我们甚至可以上升到钱学森之问。事实雄辩地证明, 仅仅以“至显之实利”——分数和奖牌为目的的教育, 即使达到了目的, 也并不能走远。

19 世纪以前, 西方学者对数学的教育价值有过长期的讨论。总括起来, 有训练思维、发展心智、获得真知、知识基础、现实应用、美化心灵、消遣娱乐、惩戒浮躁等^[7]。其中, 美化心灵、惩戒浮躁等都属于德育的范畴。翻开数学历史的画卷, 欧几里得著《几何原本》、阿基米德著《论球与圆柱》、刘徽注《九章算术》、笛卡儿著《几何学》、牛顿著《自然哲学之数学原理》、欧拉著《无穷分析引论》、高斯著《算术研究》、..., 这些不朽的数学巨著背后, 何曾有过急功近利的影子? 三角形内角和定理、勾股定理、正弦定理、余弦定理、线面垂直判定定理、和角公式、点线距离公式、等比数列求和公式、球体积公式、....., 我们在数学课本上遇到过的这些著名定理和公式, 哪一个背后不蕴含着不同时空数学家对于真善美的执着追求?

数学家研究数学不以实利为目的, 并不意味着数学没有用。事实上, 应用的广泛性正是数学的特征之一。古希腊数学家为获得真理而研究几何学, 但几何学却在水利工程中扮演重要角色; 16 世纪数学家因为数学上解三次方程的需要而将数系扩充至复数, 但虚数却在流体力学、电学上大放异彩; 即使是数论这样看似无用的数学分支, 在 20 世纪的密码学领域却大显身手! 所以有人说, 较之于数学研究, 数学的应用是滞后的, 滞后的时间可能是三十年、五十年、一百年甚至数百年。

数学历史为学生揭示了数学研究的纯粹性,让学生感悟数学家高尚、纯净的心灵和研究数学时所获得的精神愉悦,也让学生获得远见卓识:浮躁和功利,只能成就一时,不能走远。这是一种智慧的教育。

5 科学与人文艺术不可或缺

鲁迅在“科学史教篇”中提出的最重要的观点是,对于一个文明社会来说,科学与人文艺术不可偏废:

“盖使举世惟知识之崇,人生必大归于枯寂,如是既久,则美上之感情漓,明敏之思想失,所谓科学,亦同趣于无有矣。故人群所当希冀要求者,不惟奈端(今译牛顿)已也,亦希诗人如狄斯丕尔(今译莎士比亚);不惟波尔(今译波义耳),亦希画师如洛菲罗(今译拉斐尔);既有康德,亦必有乐人如培得诃芬(今译贝多芬);既有达尔文,亦必有文人如嘉来勒(今译卡莱尔)。凡此者,皆所以致人性于全,不使之偏倚,因以见今日之文明者也。”^[2]

在鲁迅看来,一个人若只有科学知识,其人生是枯燥乏味、寂寞无聊的,只有科学和人文艺术兼修,人性才得以健全。从某种意义上说,鲁迅的这一观点支持了今日文理不分科的高考新政。

在数学史上,数学和人文艺术并非如鱼和熊掌一样不可兼得。古希腊哲学家毕达哥拉斯(Pythagoras)被誉为西方音乐的鼻祖;中世纪波斯诗人奥马·海牙姆(Ommar Khayyam)也是那个时代最杰出的数学家;文艺复兴时期的很多艺术家,如意大利画家弗朗西斯卡(P. della Francesca, 1415-1492)、达芬奇(L. da Vinci, 1452-1519)、德国画家丢勒(A. Dürer, 1471-1528)等,都是数学家;17世纪法国数学家帕斯卡(B. Pascal, 1623-1662)的《外省人来信》乃是文学名著,曾被伏尔泰誉为“法国出版的写得最好的书”;19世纪英国数学教学哈代以诗一般的语言写下《一个数学家的辩白》;19世纪俄国女数学家柯瓦列夫斯基卡娅(S. Kovalevskaya, 1850-1891)文理兼美,既在数学上取得非凡成就,又在文学上富有盛名,其《童年的回忆》具有经久不衰的文学价值。20世纪前苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫(1903-1987)对于俄国古建筑、俄国诗歌、世界雕塑、绘画等都有渊博的知识,还酷爱音乐^[8];我国老一辈数学家苏步青(1902-2003)有着深厚的文学功底,他十分强调文理兼修的重要性。

HPM 实践的基本目标正是要在数学和人文之间架设一座美丽的桥梁。数学与人文艺术的交融,可以让数学课堂成为一个精彩的微型世界,在这样一个世界里,学生既获得理性思维的训练,同时也获得丰富的情感体验。兼顾理性和感性,培养健全人格,这必将是数学德

育的重要组成部分。

6 结 语

以上我们看到,鲁迅的科学史观对于数学史视角下的数学学科德育内涵分析具有重要的借鉴意义。数学史融入数学教学,让学生树立动态的数学观,从而形成正确的数学信念;可以为学生创造机会,培育友善、倾听、尊重、包容、克制等美好的修养;可以学习勤奋、专注、谦逊、坚韧、执着等优秀的品质;可以消除浮躁,净化心灵,获得远见卓识;有助于兼顾理性和感性,让学生形成健全的人格。

今天,我们从教育的视角重读鲁迅的“科学史教篇”,收获了新的思想启迪,对于数学学科德育在课堂上的实施途径有了更清晰的认识。

参考文献

- [1] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study [J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.
- [2] 鲁迅. 科学史教篇[C]. 见鲁迅全集第一卷, 北京: 人民文学出版社, 2005. 25-44.
- [3] De Morgan, A. Apeech at the first meeting of the London Mathematical Society[J]. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1865, 1(1): 1-11.
- [4] Neugebauer, O., Sachs, A. *Mathematical Cuneiform Texts* [M]. New Haven: American Oriental Society, 1945.
- [5] Brewster, D. *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton* (Vol. II) [M]. Edinburgh: Thomas Constable & Company, 1855. 407.
- [6] 汪晓勤. 史密斯: 杰出的数学史家、数学教育家与人文主义者[J]. 自然辩证法通讯, 2010, 32(1): 98-107.
- [7] Cajori, F. *Mathematics in Liberal Education* [M]. Boston: The Christopher Publishing House, 1928.
- [8] 汪晓勤. 为数学和教育倾其一生——纪念柯尔莫哥洛夫百年诞辰[J]. 科学, 2003, 55(6): 43-46.

历史研究

美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题

周天婷¹, 沈中宇²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海, 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海, 200241)

1 引言

早期的三角学是作为天文学的一部分而出现的。在古希腊人看来,圆是最完美的平面图形,而球是最完美的立体,天体都是球形的,天体的运动都是沿着圆形轨道作匀速圆周运动。因而早期的三角学一直是球面三角学,而且研究球面三角学的目的是解决天文学上的问题。此时的天文学家只关注“量天的学问”,并不关注“量地的学问”。后来由于间接测量、测绘工作的需要才出现了平面三角。直到16世纪,三角学才从天文学中分离出来,成为数学的一个独立分支^[1]。三角学的英文是 *trigonometry*, 由 *triangulum* (三角形) 和 *metricus* (测量) 两个单词拼合而成,即三角学也是一门测量之学。但如今,人们更多地将其作为一门抽象的学科,与测量的联系甚少。事实上,《普通高中数学课程标准》(2017年版)就要求掌握余弦定理、正弦定理;能用余弦定理、正弦定理解简单的实际问题。在人教版、沪教版等高中教科书中,解三角形这一章的最后一节都是以有关解三角形的实际应用而收尾。解三角形的高考题也大多是带有实际背景的应用题,要求学生利用所学的解三角形的相关知识去解决实际问题。

《普通高中数学课程标准》(2017年版)提出了培养学生核心素养的要求,而解三角形的实际应用问题可以在问题解决的过程中培养学生的数学建模、数学抽象、数据分析、数学运算等数学核心素养。翻阅美英早期三角学教科书,三角学是和测量紧密结合在一起的,例如测量物体的高度、不可直接测量的两个点之间的距离、一块土地的面积、航海问题等等,此特点在早期三角学教科书的练习中体现的非常明显。

因此,本文研究美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题,试图回答以下问题:早期三角学教科书中有关高度的应用问题有哪些类型?这些问题有哪些特点?

2 研究对象

笔者选取的是1700-1899年出版的80种美英三角学教科书,若以二十年为一段,则各教

科书的时间分布情况如图1所示。

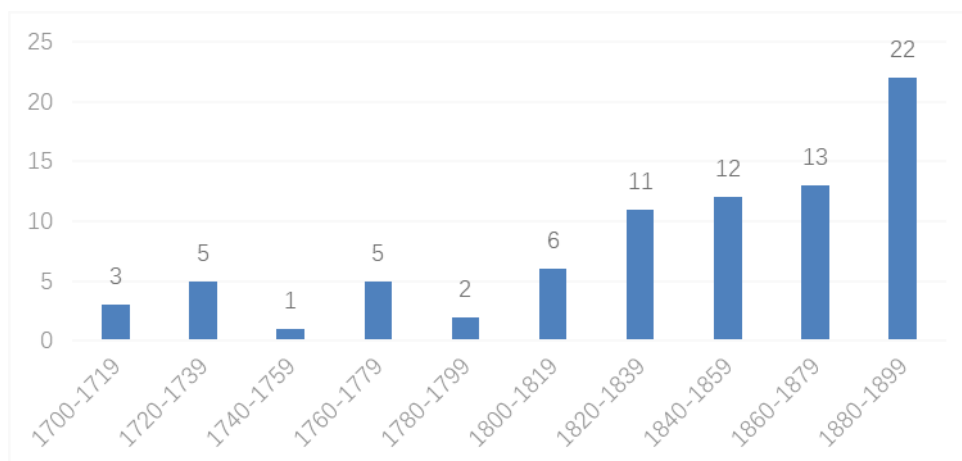


图 1 80本教科书的时间分布

有关高度测量的实际应用题目所在的章节大致在“高度和距离”、“解三角形的应用”、“解直角三角形”、“解斜三角形”4类，由于解三角形的实际应用价值，早期教科书往往会将“高度和距离”放为单独一章节供学生学习。

3 有关高度问题的分类

3.1 构建一个三角形

构建一个三角形来解决实际应用的应用是最简单的，主要分为三种类型。

类型一为直接通过解直角三角形来求物体（塔、石碑、山、树、云、气球等）的高度。

典型的问题是：

问题1 如图2所示，先测量 $\angle C$ ，假设其为 $52^\circ 30'$ ；再测量距离 AC ，假设为85英尺，求塔 AB 的高度^[2]。

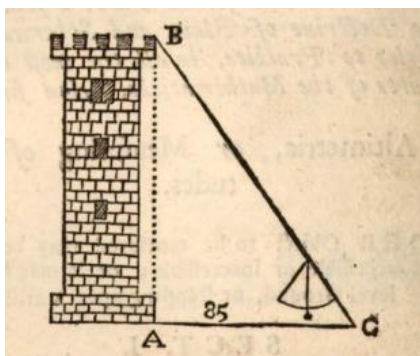


图 2

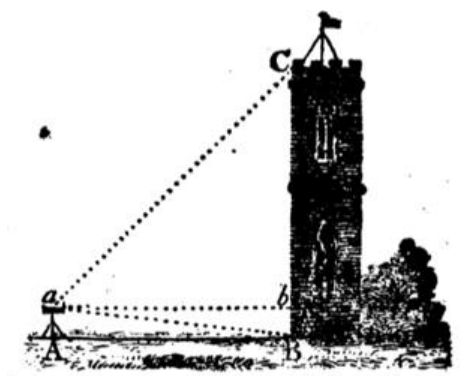


图 3

类似的问题是已知高 AB ，求距离 AC 的问题。在实践中，很难直接从地面测量角度，因

此,也有一些教科书将测角仪的高度考虑在内,如图3所示^[3]。当然也有一些教科书直接从实际情境中抽象出直角三角形作为插图^[4]。

类型二为通过解斜三角形来求高度。典型的问题是:

问题2 如图4所示,一个高为160.43英尺的塔坐落在一座小山丘上,在距离塔底 B 600英尺(即 AB 的长度)的山脚测量塔顶的仰角(即 $\angle CAB$)为 $8^\circ 40'$ 。求点 A 到塔顶的距离(即 AC)以及小山丘的坡度(即 $\angle BAD$)^[5]。

也有教科书直接将实际情境抽象出几何图形^[6]。这种情形本文不再一一呈现。

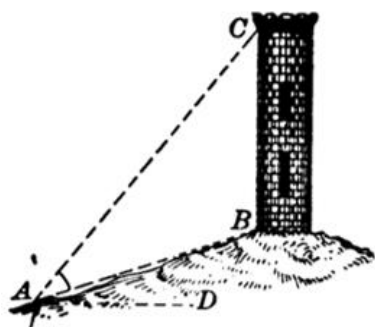


图 4

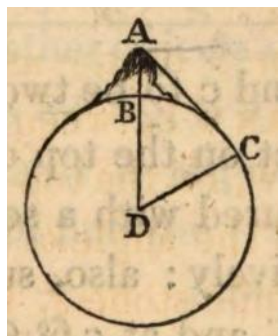


图 5

类型三为与圆有关的测高问题。典型的问题是:

问题3 如图5所示,假设特纳利夫岛高 AB 为2英里,地球半径为3979英里,求从海上一
点 C 处到特纳利夫岛顶 A 处的距离,即求 AC 的距离^[7]。

3.2 构建两个三角形

现实情境中,由于河流、灌木丛、沼泽地等的阻隔,测量地与建筑物之间的距离无法直接测得,此时,构建一个三角形已不足以求得建筑物的高度,于是,人们想到了构建两个三角形来求高度。在早期三角学教科书中,这种情形大致分为五类。

类型一为在水平面上做一根基线,构建两个三角形。典型的问题是:

问题4 如图6所示,欲知塔高,但塔的一边有一些树木,另一边的土地凹凸不平,因此,在点 D 处测得 $\angle CDB = 51^\circ 30'$,又测得 $AD = 75$ 英尺。在点 A 处测得 $\angle CAB = 26^\circ 30'$,求塔高^[3]。

一些教科书还会考虑测角仪的高度。还有反过来设问,即已知塔高,求 AD 。另外,还有一类典型问题如下:

问题5 如图7所示,已知塔高,两个观察点 A 、 B 在同一竖直平面内,从 A 、 B 出分别观察船上的点 C ,测得俯角 $\angle aAC$ 和 $\angle bBC$,求船离岸边的距离^[8]。

若将图7横过来看,其实与上述塔高问题如出一辙。

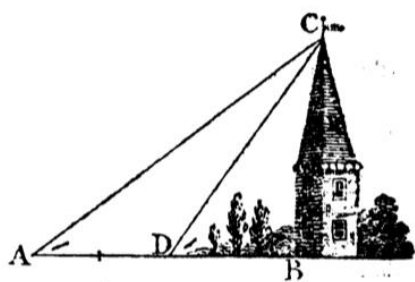


图 6

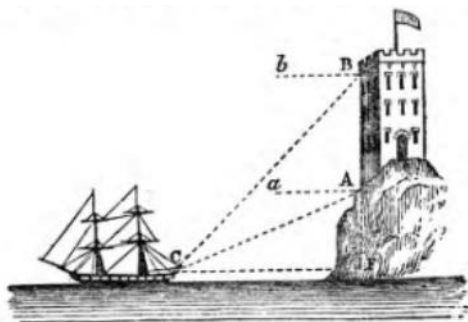


图 7

类型二为在竖直平面上做一根基线构建两个三角形。典型的问题是：

问题6 如图8所示,从一扇离房屋底部很近的窗户A看一个教堂的顶部,测得仰角 $\angle CAD = 40^\circ 21'$,从另一扇在窗户A竖直上方距离20英尺的窗户B看这个教堂的顶部,测得仰角 $\angle CBE = 37^\circ 36'$,求教堂的高度^[7]。

19世纪末,有教科书将其抽象成几何图形^[9]。还有一些问题,如已知高塔的高度求低塔的高度或柱高,也是大同小异。

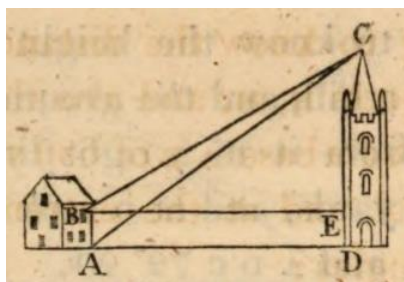


图 8

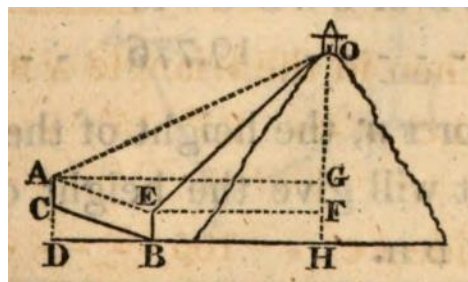


图 9

类型三为在同一平面内任意角度作一条基线,构建两个三角形。典型的问题是：

问题7 如图9,物体O放置在山顶,从基地B开始在斜坡上测量基线BC为130码,在B处竖直放置一根棒BE,其长度与测角仪AC的长度均为1码。在基地A处测得仰角 $\angle OAG = 27^\circ 10'$,俯角 $\angle GAE = 8^\circ 45'$,在基地B处测得仰角 $\angle OEF = 39^\circ 40'$ 。求山高 OH ^[7]。

类型四为在不同平面内做一条基线,构建两个三角形构成立体图形。典型的问题是：

问题8 如图10,物体B在山顶上,想知道BC的高度。现在假设不方便测量水平基线,于是在任意方向做了一根基线AB'并测量,接着测量 $\angle CB'A$ 、 $\angle CAB'$ 、 $\angle BAC$ 。求山高。^[10]

也有教科书直接将实际情境抽象成几何图形,发现可以通过测量不同角度来解决问题,如图11所示^[11]。可以先测量底面的三角形的两个角,再测量任意一个竖直的三角形在地面的仰角,抑或是如图12^[12]所示,先测量地面基线与顶点所构成的三角形的两个角,再与前一种方法一样测量任意一个竖直的三角形在地面的仰角即可。

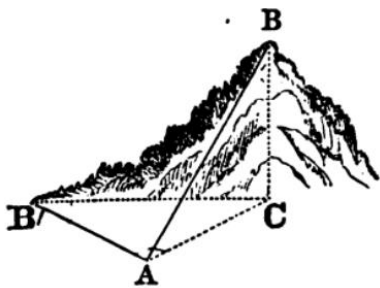


图 10

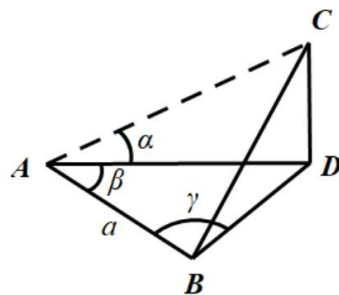


图 11

类型五为物体在斜坡上，无法直接通过一个直角三角形来求高度，故构造两个三角形来求解。典型问题是：

问题9 如图13所示，欲知斜坡上的方尖碑的高度，从其底部测量 CD 距离为40英尺，在点 C 测得仰角 $\angle ACD = 41^\circ$ ，沿着直线 DC 继续测量 $CB = 60$ 英尺，在点 B 测得仰角 $\angle ABD = 23^\circ 45'$ ，求方尖碑的高度^[13]。

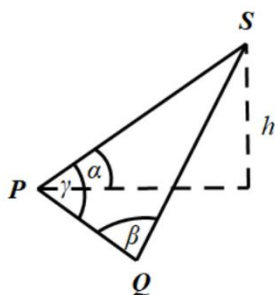


图 12

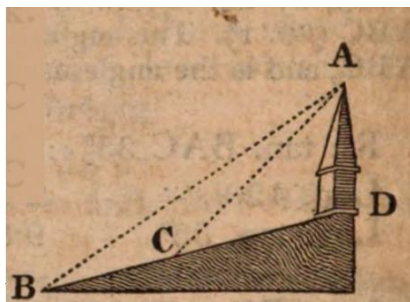


图 13

3.3 构建三个三角形

当水平面上的人要测量坐落于一座山上的物体高度时，构建两个三角形已经不足以计算出物体的高度，此时需要构建三个三角形来解决问题，还有其他类型的问题也需要构建三个三角形。在美英早期三角学教科书中大致分为五类。

类型一为测量坐落于一座山上的物体的高度，而且在山的一边有空地便于测量。典型的问题是：

问题10 如图14所示，塔 CF 坐落在一座小山上，观察者在点 D 测量仰角 $\angle CDB$ 、 $\angle FDB$ ，在位于 BD 延长线上的点 A 测量仰角 $\angle CAB$ ，并测量距离 AD ，求塔高^[14]。

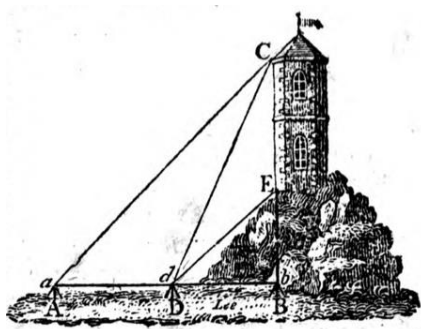


图 14

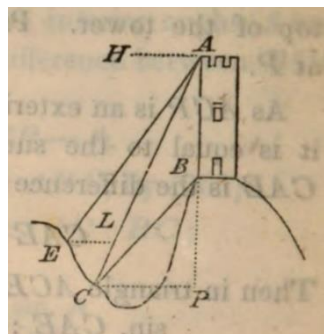


图 15

类型二为在类型一的基础上，山的一侧为斜坡，因而无法确定水平基线。典型的问题是：

问题11 如图15，AB为坐落在一座小山上的塔，观察者在斜坡CE上。在点C观察塔的顶部和底部，测得仰角 $\angle ACP$ 和 $\angle BCP$ 。在斜坡上测量直线段EC的距离，并在点E测得仰角 $\angle AEL$ 和俯角 $\angle LEC$ 。求塔AB的高度^[14]。

类型三为在类型二的基础上，斜坡上无法测得与塔在同一平面上的基线，因此可以在不同平面构成立体图形求解。典型的问题是：

问题12 如图16，柱子AB竖直放置在山顶，BC为坐落在水平面上的小山，在水平面做一根基线DE=380英尺，并测得 $\angle ADC = 59^\circ$ ， $\angle ADB = 26^\circ$ ， $\angle ADE = 70^\circ 20'$ ， $\angle ADC = 65^\circ 30'$ 。求柱高^[6]。

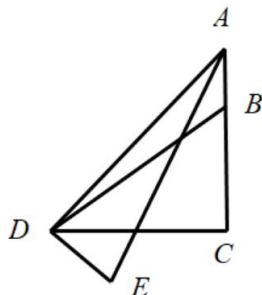


图 16

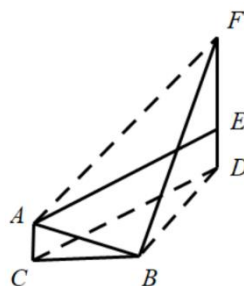


图 17

类型四为在斜坡上构造三个三角形构成立体图形以求高度的问题。典型的问题是：

问题13 如图17，欲知杆FD的高度，测得基线AB=250英尺，点A比点B高出12英尺，即AC=12英尺。BC和BD均为水平线，在点B测得仰角 $\angle DBF = 12^\circ 24'$ ，在水平面上，测得 $\angle DBC = 35^\circ 15'$ 以及 $\angle DCB = 27^\circ 51'$ 。求杆FD的高度^[15]。

类型五为有关两个建筑物高度的问题。典型的问题是：

问题14 如图18，点A、B、C位于同一水平面上，在点C处向两座塔的顶部测得 $\angle ECD = 58^\circ 20'$ ，两座塔的高度分别为DA=169英尺、EB=213英尺，在点C处的仰角分别为 $\angle DCA = 3^\circ 18'$ 、 $\angle ECD = 4^\circ 21'$ 。求CA、CB和AB。^[7]

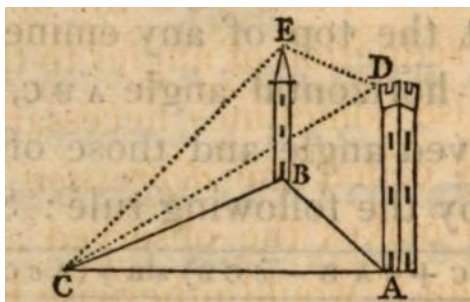


图 18

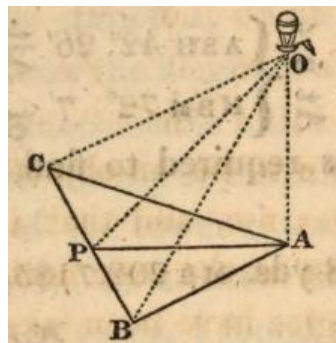


图 19

3.4 构建三个以上的三角形

构建三个及以上三角形在早期教科书中很少见到，通过在地面作一根基线，再测量基线的两个端点以及基线上一点对所测物体的仰角来计算物体高度的问题十分典型，如：

问题15 如图19所示，在1784年的布莱克希思有一个卢纳迪热气球，为了测量这个热气球的高度，在地上测量了一根长为1英里的基线 BC ，在点 B 测量这个热气球的仰角为 $\angle OBA = 46^\circ 10'$ ，在点 C 测量这个热气球的仰角为 $\angle OCA = 54^\circ 30'$ ，在基线 BC 上一点 P 测量这个热气球的仰角为 $\angle OPA = 55^\circ 8'$ 。求这个热气球的高度 OA 。^[16]

一些教科书还讨论了当点 P 取为基线中点时的情况^[17]。

4 特点分析

4.1 从简单到复杂

美英早期三角学教科书中，解三角形的应用问题都是从最简单的问题开始逐步加深难度，几乎都是以构建一个直角三角形就可以解决的类型，即类似于问题1这样的问题，来开启一章的内容。当建筑物周围有小树丛或河流等障碍时，测量者到建筑物底部的距离无法直接测得，或建筑物矗立在斜坡上等情况，都需要构建两个三角形去解决，如问题4和9。当物体坐落在山上或其他高地而测量者位于水平地面上时，构建两个三角形已不足以求出物体的高度了，于是构建三个三角形去解决问题，如问题10和11。随着现实中的问题越来越复杂，为了解决问题所构建的三角形个数逐步增加，对学生的要求也在一步步加大。

4.2 从平面到立体

从构建两个三角形去解决高度测量问题的前四种情形中，我们可以发现，如果要从同一个平面内去解决问题，那么可以在水平面上做一根基线（如问题4），若是水平面上做基线不太方便，也可以在竖直平面上做一根基线（如问题6），若测量者位于斜坡上，那也可以在同

一平面内以任意一个角度做一条基线，构建三角形解决相关问题（如问题7）。对于同一平面这样一个要求在实际测量过程中还是比较困难的，而任意作一根基线并测出它的距离还是易于做到的，这也就是类型四对相关问题的解法（问题8）。虽然在思维容量和计算上更复杂一些，但对于测量的要求却大大降低。当然，构建三个三角形中的前三个类型即问题10-12，其本质就是构建两个三角形问题的推广，因此，从构建平面图形到构建立体图形也是自然而然的事情了。

4.3 从具体到抽象

现在的人教版和沪教版的教科书上对于实际应用问题都是非常具体的，而美英早期三角学教科书主要是19世纪中后期，除了具体实际问题之外，也会将其抽象出模型来直接告知边的长度和角的大小，让学生计算边长或角度。其实，抽象出模型也有利于培养学生的数学建模核心素养，而一个模型也可以用于很多类型的问题，如问题4与问题5，当具体问题抽象出模型之后，可以发现这两个问题只是扭转了一个角度而已，其本质是一样的。再如问题6抽象出来的模型可以运用于其他求高度的问题，也有利于学生将具体问题转化为模型之后的解题能力。

5 结论与启示

美英早期三角学教科书中，几乎每一种都有解三角形的实际应用问题，从侧面证实“三角学”也是“测量之学”。而从实际问题出发，让学生通过阅读题目，构建三角形，抽象成已知一些边角的价值去求所需的边角的解三角形问题，提高学生解决实际问题的能力的同时，也培养了学生数学建模、数学抽象、直观想象等数学核心素养。当然，抽象成解三角形的问题之后，也需要学生进行思考、计算，如问题 14 在测得基线长度、基线上在端点处的仰角以及基线上的中点或任意一点处的仰角后去计算热气球的高度，这并非易事。需要利用热气球的高度来表示出基线上测得仰角的三点到热气球的竖直下方的距离，再利用水平面上两个三角形的内角互补、余弦值互为相反数的特点，通过余弦定理用边进行表示再代入计算才能得到最终结果。解决问题的过程中总共构建了五个三角形，不仅需要思考如何解三角形，还需要比较复杂的运算，解决问题的同时培养学生数据分析和数学运算等数学核心素养。

再从有关高度测量的问题来看，与高度有关的测量问题远不止现行教科书中所呈现的少数几种情况。以沪教版高一年级第二学期第五章第六节解斜三角形为例，教科书中提及高度测量的问题有“例 9：如图 20 所示，在金茂大厦底部同一水平线上的 B 处和 C 处分别测得

金茂大厦顶部 A 的仰角，并知道 BC 之间的距离，求金茂大厦的高度。”与本文中的问题 4 如出一辙。还在练习 5.6(4) 中提及“大楼的顶上有一座电视塔的高度已知，在地面某处测得塔顶和塔底的仰角，求此大楼的高度。”这一问题与本文中的问题 5 基本一致。在整个解三角形的应用中，高度测量问题有如上所述的一道例题与一道练习。

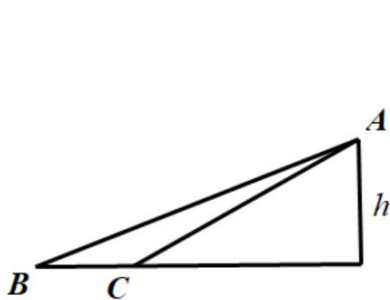


图 20

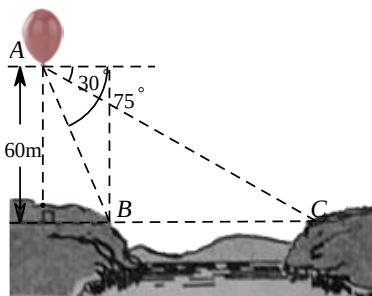


图 21

在课堂上，教师可以让学生去发挥他们的聪明才智，思考如何测量某物体的高度、在测量过程中会遇到哪些阻碍、可以通过怎样的测量去解决可能会发生的实际问题，根据现实条件可以调整测量的方法去解决所遇到的阻碍，即构造不同形状和个数的三角形去解决；从美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题的类型来看，在实际生活中的高度测量问题所会遇到阻碍基本都有所涉及；从这些问题的特点来看，从简单到复杂、从平面到立体、从具体到抽象、从构造一个三角形到构造三个或以上的三角形去解决相关问题的这样一个过程，非常符合学生的认知规律。

在编制练习题、试卷的过程中，美英早期教科书给我们提供了很多很好的思路；例如 2014 年四川高考题“如图 21 所示，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B, C 的俯角分别为 $75^\circ, 30^\circ$ ，此时气球的高是 60cm ，则河流的宽度 BC 为多少？”与问题 4 所抽象出的模型的推广“已知高度求距离”大同小异，因而在编制练习题、试卷的过程中，美英早期教科书也给了我们提供了很多实际问题的素材。

参考文献

- [1] 徐章韬. 三角学历史发展中认识视角的变迁及其教育意蕴[J]. 数学教学, 2010, (4): 29-30, 36.
- [2] Hawney, W. *The Doctrine of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: J. Darby et al., 1725: 224.
- [3] Keith, T. *An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry*[M].

- London: T. Davison, 1810: 71-72.
- [4] Twisden, J. F. *Plane Trigonometry, Mensuration & Spherical Trigonometry*[M]. London: Richard Griffin & Co., 1860: 367.
- [5] Crockett, C. W. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1896: 112.
- [6] Griffin, W. N. *The Elements of Algebra and Trigonometry*[M]. London: Longmans, Green & Co., 1875: 281, 295.
- [7] Bonnycastle, J. A *Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Cadell & Davies et al., 1818: 57, 68, 72.
- [8] Galbraith, J. A. *Manual of Plane Trigonometry*[M]. London: Cassell, Petter & Galpin, 1863: 80.
- [9] Hobson, E. W. & Jessop, C. M. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1896: 190.
- [10] Greeanleaf, B. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Robert S. Davis & Co., 1876: 62.
- [11] Bowser, E. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1892: 99.
- [12] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 287.
- [13] Nichols, F. A *Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: F. Nichols, 1811: 44.
- [14] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge & Boston: James Munroe & Co., 1835: 54.
- [15] Wood, D. V. *Trigonometry, Analytical, Plane & Spherical*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1885: 79.
- [16] Hann, J. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. London: John Weale, 1854: 96.
- [17] Hackley, C. W. *A Treatise on Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York: George P. Putnam, 1852: 110.

课例研究

HPM 视角下的“十字相乘法”课例研究

邵爱娣¹, 余庆纯²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

1 引言

HPM (History and Pedagogy of Mathematics) 是数学史与数学教育的简称。HPM 视角下的数学教学, 是指借鉴数学知识的发生发展、再现历史上的数学思想方法、采用适当的方式运用数学史料以提升教学的有效性、优化数学教育价值的一种教学方式, 由此形成的教学案例简称为 HPM 课例^[1]。近年来, 由 HPM 专业学习共同体合作开发的 HPM 课例日益增多, 但在已经发表的 HPM 课例中, 读者看不到课例的形成过程与研究细节。事实上, 除了课例的教学过程本身, 课例研究和形成过程也是那些对 HPM 感兴趣的一线教师所希望了解的。

十字相乘法是沪教版初中数学教科书七年级上册第九章第五节“因式分解”中的内容, 强调十字相乘法以及十字交叉线的重要性。教学实践中, 许多教师对于“十字相乘法”存在许多困惑。例如: 十字交叉线是怎么出现的? 为什么要引入十字交叉线? 如何引导学生理解十字交叉线的重要性? HPM 视角下的初中教学能否体现数学史的“以史为鉴、以文化人”的教育价值?

为了解决上述问题, HPM 工作室实施了“十字相乘法”的课例研究, 研究按照选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作四个环节展开。本文呈现课例研究的完整过程, 以为初中 HPM 课例研究和课堂教学提供参考。

2 HPM 课例研究

2.1 选题与准备

2.1.1 问题聚焦

十字相乘法这一课题是由 HPM 工作室根据实际教学进度选定的。对于本节课, 执教者提出两点疑惑: 一是教科书直接将多项式的乘法 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 反过来, 得到 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$, 引入比较突兀, 但自己又找不到自然的引入方法;

二是对十字相乘法中十字交叉线的由来不甚了了，课本上只是说可借助十字交叉线来分解因式，并没有过多的解释与铺垫，而在二次项系数为 1 的情形中，十字相乘法以及十字交叉线的必要性并不明显：只要将常数项分解成两个数的乘积，使得这两个数的和为一次项系数，即可顺利完成因式分解。有鉴于此，我们希望从数学史中寻找十字相乘法的动因，并将其再现于课堂。

针对十字相乘法的教学现状，工作室成员在充分讨论后，拟在课例研究中聚焦以下问题：

- (1) 十字交叉线在历史上是如何出现的？为什么要引入十字交叉线？
- (2) 在初中阶段已经学习了因式分解的提公因式法、公式法、分组分解法等，为什么还要学习十字相乘法？
- (3) 如何在因式分解中从二次项系数为 1 过渡到系数不为 1 的？

2.1.2 历史研究

针对教师的疑惑，研究者查阅了 1830-1930 年间出版的多种美国代数教科书，发现多项式的乘法大多采用竖式运算，例如 $x+a$ 乘以 $x+b$ ，其竖式乘法如图 1 所示^[4]。这种做法类似于我们做两位数和两位数的乘法，每个数的个位要乘另一个数的十位。

对于二次三项式的因式分解，早期教科书给出了多种方法，十字相乘法只是其中的一种。对于形如 x^2+px+q 的式子书中多采用试算法，只有极少数教科书将该情形与二次项系数不为 1 的情形统一起来，采用十字相乘法^[5]；而对于形如 ax^2+bx+c ($a \neq 1$) 的二次三项式，多数教科书采用了十字相乘法。1888 年出版的 Sheldon 代数教科书在对 $10x^2+19x+6$ 进行因式分解时指出^[6]： $10x^2$ 最可能的因式是 $5x$ 和 $2x$ ，6 最可能的因数是 2 和 3，需要考虑如何排列，方可使其交叉乘积的代数和为 $19x$ ，如图 2 所示。而 Nicholson (1888) 在对

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{l} 5x+2, \\ 2x+3. \end{array}$$

图 2

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ 2x-1 \\ \hline 8x \\ -3x \\ \hline +5x \end{array}$$

图 3

$6x^2+5x-4$ 进行因式分解时给出了交叉相乘、乘积相加的过程^[7]，如图 3 所示。

在我们所考察的美英代数教科书中，Gillet (1896) 最早采用了十字交叉线^[8]，在分解 $6x^2+7x-20$ 时，将二次项系数 6 分成 2 和 3 的乘积，常数项分成 5 和 -4 的乘积，并将它

们以交叉线连接，如图 4 所示。

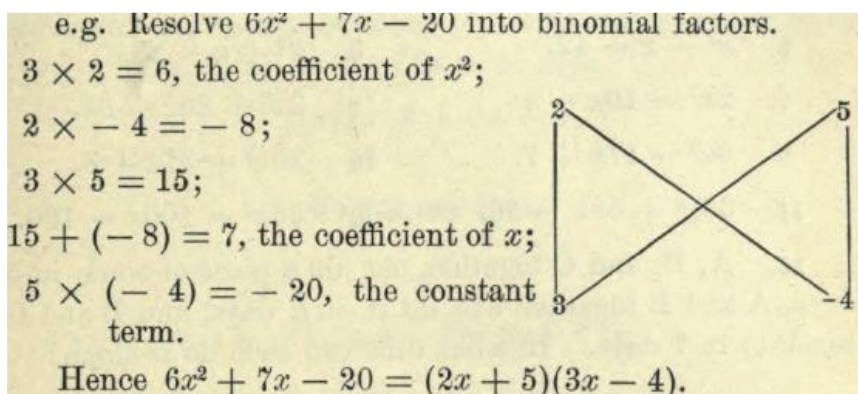


图 4 吉雷特《初等代数》中的十字相乘法

Jocelyn (1902) 在分解 $10x^2 - 11x - 6$ 时也给出了交叉相乘的过程，同时使用了交叉线^[9]，如图 5 所示。对于二次项系数为 1 的二次三项式（如 $x^2 + 2x - 48$ ），作者也采用了十字相乘法，如图 6 所示。Hawkes (1919) 的例子就更明显地说明了十字相乘法与竖式乘法之间的关系^[10]，如图 7 所示。多数教科书在使用十字相乘法时都保留了字母，这与今天沪教版教科书的做法是一致的。采用十字相乘法的教科书中，多数并未使用十字交叉线。

$$\begin{array}{r}
 2x \quad - \quad 3 \\
 5x \quad + \quad 2 \\
 \hline
 -15x \\
 + 4x \\
 \hline
 -11x
 \end{array}$$

图 5

$$\begin{array}{r}
 x \quad + \quad 8 \\
 x \quad - \quad 6 \\
 \hline
 8x - 6x = 2x
 \end{array}$$

图 6

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x} + \cancel{2} \\
 \cancel{2x} + \cancel{2} \\
 \hline
 2x^2 + ?x \\
 + ?x + 3 \\
 \hline
 2x^2 + 5x + 3
 \end{array}$$

图 7

对历史上的数学教科书的考察表明，十字相乘法和十字交叉线源于多项式的竖式乘法。

2.1.3 教材分析

就国内现行初中教科书来看，只有沪教版教科书明确安排了十字相乘法内容。人教版教科书（八上）在“整式乘法”章末“阅读与思考”中介绍了形如 $x^2 + (p+q)x + pq$ 的二次三项式的因式分解方法，但并未给出“十字相乘法”之名。苏科版教科书设计了一个拼图活动：给出 3 种纸片，边长为 a 的正方形、边长为 b 的正方形以及长和宽分别为 a 和 b 的长方形，然后通过计算 1 个边长为 a 的正方形，两个边长为 b 的正方形以及 3 个长方形拼成的大长方形的面积，从而得出 $a^2 + 3ab + 2b^2 = (a+2b)(a+b)$ ，但同样未提“十字相乘法”之名。十字相乘法一直备受争议，部分教师认为它不是通性通法，而求根公式才是，学了求根

公式，十字相乘法就显得不重要了。另一些教师则认为有必要学习十字相乘法，因为中学数学中经常会用到它。

教学实践中，教师大致采用两种引入方式，一种是将 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 反过来，直接得到 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ ；另一种则是让学生展开一组多项式，观察展开前后一次项系数和常数项的关系，发现规律，从而得出二次三项式的因式分解。设计中既没有说明十字交叉线的由来，为什么要这样使用，也没有说明十字交叉线的意义。

2.1.4 初步设计

研究者提供相关资料和历史素材，执教者根据材料，结合实践经验初步完成教学设计。教学目标如下：（1）理解十字相乘的概念；（2）能正确熟练地运用十字相乘法把形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式分解因式。

教学重点：能正确熟练地运用十字相乘法把形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式分解因式；

教学难点：对 $x^2 + px + q$ 分解因式时准确地找出 a 、 b ，使 $ab = q$ ， $a + b = p$ 。

教学过程分为以下五个环节。

（1）复习引入：口答一组多项式乘法，如 $(x+3)(x+5)$ ；观察积的常数项与两个一次因式中常数项的关系；总结 $(x+a)(x+b)$ 的结果；尝试因式分解 $x^2 + (a+b)x + ab$ 。

（2）探索新知：给出十字相乘法的定义，呈现十字交叉线图解，同时用十字交叉线讲评两道习题。强调首先要把常数项分解成两个因数，再看这两个因数之和是否等于一次项的系数。

（3）例题讲解：因式分解 $x^2 - 7x + 12$ ，分析先分解哪一项？怎样分解？为什么这样分解？十字交叉怎么写？详细解读十字交叉图。

（4）课堂练习：要求学生按例题分析的要求完成 6 道练习题。

（5）课堂小结：为什么叫十字相乘法？分解的要点是什么？

2.2 研讨与设计

在 HPM 工作室的教学研讨中，首先由高校研究者解读相关的历史素材，接着由执教者介绍初步的教学设计与困惑。最后，大家针对教学目标、重难点和教学过程的设计展开讨论。从教师的初步设计中可以看出，没有体现数学史的融入，说明对历史材料的解读并不到位。经过讨论，达成以下共识：

(1) 引入部分过于常规，可以借鉴苏科版教材上的拼图活动；

(2) 十字交叉线可以通过多项式竖式乘法进行引入。

教师对教学设计作出修正，修正后的教学目标拟定为：

(1) 通过学生探究、小组讨论，探索形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式的因式分解的基本方法（十字相乘法）；

(2) 通过学生自行尝试和小组互助的形式，探究十字相乘法因式分解的步骤和注意要点；

(3) 通过数字教材和 HPM 的融入，进一步培养学生提出问题、解决问题的能力，形成从特殊到一般、从具体到抽象的思维品质。

教学重点：正确使用十字相乘法进行因式分解；

教学难点：十字相乘法因式分解的步骤和注意要点。

教学过程仍然分成五个部分，并借助 Aischool 平台来完成。

(1) 拼图活动。课前每个小组用一个面积为 x^2 ($x \neq 1$) 的正方形纸片，若干个面积为 x 的长方形纸片以及若干个面积为 1 的正方形纸片拼接成一个大的长方形。同时阅读“十字相乘法”相关的文献资料。

(2) 探究活动。由拼图活动建立一些等式，利用多项式乘法进行竖式验证。提出问题： p 和 q 满足什么条件时，形如 $x^2 + px + q$ (p, q 为整数) 的二次三项式可以分解为两个一次因式的乘积？播放笛卡儿和待定系数法的数学小视频，接着让学生展示 $x^2 - 5x + 6$ 的因式分解，教师收集学生的解题过程并介绍数学史上的几种分解方法。

(3) 归纳整理。对 $x^2 + px + q$ (p, q 为整数) 进行因式分解，关键是将 q 分解为两个整数 a, b ，使得 $(x+a)(x+b)$ 的一次项恰好是 px ，可以通过以下方式验证一次项（如图 8）：

$$\begin{array}{r} x \quad + a \\ x \quad + b \\ \hline bx + ax = (a+b)x \end{array}$$

图 8

由此引出十字相乘法。接着，对 $x^2 + px + q$ 进行因式分解，强调方法、符号和书写格式。

(4) 运用知识。每组编制四个形如 $x^2 + px + q$ (p, q 为整数) 的二次三项式。拓展问题: 先填空, 再分解 (尽可能多的): $x^2 + ()x + 60 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(5) 课堂小结。学生针对本节课的内容提出问题, 教师就十字相乘法的特征和方法加以总结。

2.3 实施与反馈

2.3.1 第一轮教学

执教者在同一年级的一个班级进行了试教。课后, HPM 工作室部分研究者与执教者进行了研讨。针对“为什么要用十字交叉线”这个问题, 研究者课后随机访谈了几位学生, 其中一位学生回答“为了好看”, 一个认为“不需要”, 一个说为了计算更精确。可见, 学生并不能理解使用十字交叉线的意义所在。事实上, 前已提及, 对于形如 $x^2 + px + q$ 的式子, 十字相乘法的必要性并不明显。研究者建议增加二次项不为 1 的情形, 让学生体会十字交叉线的作用。此外, 他们还建议, 播放微视频的目的主要是让学生了解待定系数法, 所以需要対视频内容做适当调整。

根据研讨结果, 执教者决定从以下几个方面来修改教学设计:

- (1) 探究活动部分要求学生利用多项式乘法进行竖式验证 (为十字交叉线铺垫);
- (2) 微视频的时间偏长, 缩短叙述故事的部分内容;
- (3) 交叉线的引入部分增加时间讲解, 让学生有充分吸收的时间;
- (4) 运用知识部分的拓展问题更换为一道二次项系数不为 1 的题目。

基于试讲的情况以及研究者提出的建议, 执教者再次对教学设计进行了修正, 主要集中在以下几个方面:

(1) 教学过程由原来五部分增为六部分: 发现问题-提出问题-解决问题-归纳整理-运用知识-课堂小结。

(2) 问题提出部分, 学生展示课前阅读文献得到 $x^2 + 6x + 8$ 分解方法。

(3) 问题解决部分, 增加了一个环节, 因式分解: $x^2 - 5x + 6$, 学生利用待定系数法得到 $p = a + b, q = ab$ 的关系, 尝试把一次项系数 -5 分解为两个数的和, 常数项 6 分解为同样两个数的积。教师利用 PPT 演示, 通过多项式竖式乘法, 一步步引出十字交叉线。

(4) 运用知识部分, 将拓展问题改为了分解因式: $3x^2 + 10x - 8$ 。

2.3.2 第二轮教学

首先让学生展示课前拼好的长方形，写出它们的面积以及长和宽，这样就得出了一组形如 $x^2 + px + q$ 的式子的因式分解。由此引出问题：形如 $x^2 + px + q$ (p, q 为整数) 的二次三项式，如果不能直接利用完全平方公式来分解因式，那么该如何分解？接着，让学生展示课前阅读文献得到的 $x^2 + 6x + 8$ 的因式分解方法，包括配方法、分组分解法和十字相乘法三种。教师作了点评，让学生体会历史上二次三项式因式分解方法的多样性和灵活性。

一组学生发现，利用他们手头的纸片，无法拼出一个长方形。教师顺势提出问题： p 和 q 满足什么条件时， $x^2 + px + q$ (p, q 为整数) 可以分解为两个一次因式的乘积？教师通过播放笛卡儿和待定系数法的数学小视频，给学生以思想启示。学生利用待定系数法，得到 $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ ，其中 $p = a + b, q = ab$ 。教师展示部分学生的解题过程，有学生选择了竖式乘法，得出同样的结果。

接着，让学生利用待定系数法得到 $p = a + b, q = ab$ ，尝试分解 $x^2 - 5x + 6$ 。在教师引导下，学生总结：应该把常数项 6 分解为两个整数的乘积，因为整数分解为两个整数乘积的情形相对会少一些。教师总结因式分解的步骤：拆分常数项，验证一次项；根据多项式竖式乘法，第二步可以通过“交叉相乘再相加”来验证，故需引入十字交叉线。教师在书写结果时，引导学生要竖分横写。至此，十字相乘法应运而生。在练习巩固环节设计了四个二次三项式的因式分解问题，其中，对于 $3x^2 + 10x - 8$ ，要求学生保留尝试的过程。

小结部分，让学生总结本节课所学内容。整节课数学史融入非常自然，顺利地解决了执教者之前的困惑。

2.3.3 学生反馈

课后，研究者对全班 36 名学生进行了问卷调查，并对其中 4 名学生进行了半结构式访谈。在问卷调查中，81% 的学生认为，拼图活动有助于思考形如 $x^2 + px + q$ 的二次三项式的因式分解问题。78% 的学生理解十字相乘法的重要性，72% 的学生能正确理解“十字交叉线”的书写格式及意义（如图 8），认为：十字交叉线是用来检验因式分解结果正确性的。对于因式分解中二次项系数不为 1 的测试题，学生的正确率为 42%，可见对于二次项系数不为 1 的因式分解等教学难点，学生是有潜力突破的（如图 9）。

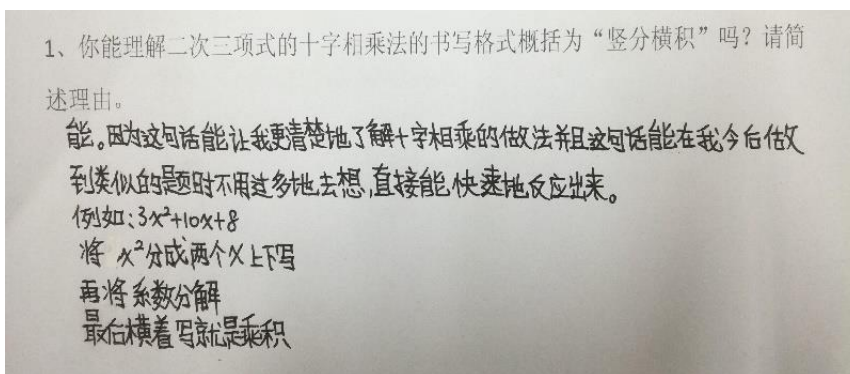


图 8

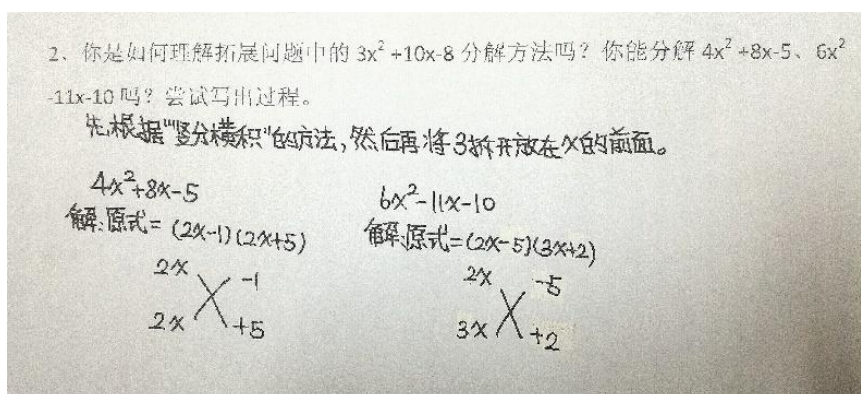


图 9

在半结构式访谈中，多数学生提到：虽然已经学习了因式分解的提公因式法、公式法、分组分解法等，但是十字相乘法更能够化繁为简，简便地进行因式分解；同时利用十字交叉线进行相乘再相加，便于验算。不少学生提到印象深刻的微视频中讲解了数学家的故事与思想方法，帮助他们了解十字相乘法的由来与用法，生动有趣。同时，十字相乘法帮助他们关注因式分解中二次项系数、一次项系数、常数项系数之间的联系，启发理性地思考，多角度地看待事物之间的联系。

2.3.4 同行评议

课结束以后，研究者和执教者一起进行了深入研讨。研究者指出了本节课的一些优点，首先是前置的两个学习活动，一是拼图活动，让学生有充分的时间动手操作探究，二是历史文献的阅读，能够拓宽学生的眼界。其次是能够将十字相乘法和之前学过的完全平方公式法以及后面的分组分解法联系起来，体现数学知识之间的联系。再者就是微视频的使用，能够清楚地向学生介绍待定系数法，渗透数学思想。

从整个教学过程来看，数学史的运用方式有附加式、复制式和顺应式。（1）附加式：微视频介绍笛卡儿的生平。（2）复制式：待定系数法的使用以及课堂上展示历史文献中对于二次三项式的因式分解方法。（3）顺应式：类比两位数乘法的竖式计算，对多项式竖式乘法进

行适当的改变，便于学生的理解。

本节课体现了数学史的以下价值。(1) 知识之谐：让学生经历从二位数的竖式乘法到二项式的竖式乘法，再到十字相乘法的过程，使十字相乘法以及交叉线的出现自然而然。(2) 方法之美：一是让学生阅读历史文献，感受历史上因式分解方法的多样性；二是让学生了解待定系数法，并利用它探究二次三项式 $x^2 + px + q$ 可分解的条件。(3) 能力之助：通过课前历史文献的阅读，培养学生的阅读能力和归纳能力。(4) 文化之魅：微视频让学生了解因式分解的历史以及数学家笛卡儿的思想。(5) 德育之效：激发学生的兴趣，让学生感悟数学背后的人文精神。

本节课也存在不足之处，如没有对十字相乘法和配方法、分组拆分法等进行对比，从中得出不同方法的优劣性和选择的适切性。

2.4 整理与写作

2.4.1 教学反思

第二轮教学后，执教者围绕“十字相乘法”的教学，进行了以下几个方面的反思。

(1) 通过拼图活动引导学生思考一类二次三项式的分解问题，符合学生的认知规律；借助待定系数法引出十字相乘法、通过竖式乘法解释十字交叉线，过程均比较自然。

(2) 经过本次教学，真正借鉴和重构历史，引导学生从二次项系数为 1 逐步过渡到二次项系数不为 1 的因式分解。

(3) 在课堂教学融合数字教材讲解、微视频播放、Aischool 平台讲解习题等内容，带动教学内容的数字化呈现，提高课堂教学效率。

(4) HPM 视角下的数学方法教学，带领学生走进历史、走进数学，帮助学生理解数学知识和方法，获得“做数学”的乐趣，感悟数学家的理性精神。

2.4.2 课例呈现

课例由教师和研究者共同撰写，共分为五个部分，一是引言，说明选题的重要性和必要性。二是史料的选取，交代与教学内容密切相关的史料和课堂上的运用方式。三是教学设计与实施，按照教学环节展开。四是学生反馈，对问卷调查的结果进行统计和分析。五是结语，说明本节课中数学史对学生的教育价值、教师的收获和反思。

3 若干启示

“十字相乘法”课例经历了从选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作四个

环节, 最终形成一个 HPM 课例。从课例研究中, 我们得到如下启示。

(1) 注重教育取向, 深入史料研究。数学史揭示了知识发生和发展的动因, 因而提供了解决师生疑难问题的答案, 为教学设计提供了思想的启迪。因此, 教育取向的数学史研究是 HPM 课例开发的基础, 没有对历史的深刻理解, 就无法产生高水准的 HPM 课例。

(2) 注重教育实际, 立足课堂教学。HPM 课例研究扎根于一线教学实际, 关注数学史与课堂教学的有效融合。课堂教学是以学生为本, 因此在进行教学设计与研讨时, 应该将学生心理发展顺序与知识的历史顺序、逻辑顺序相互统一。同时, 需要考虑在有限的课堂教学空间里最优化地呈现数学史与数学教学的相关内容, 可以根据史料编制数学例题, 或借助微视频辅助拓展新知等。

(3) 注重师生反馈, 加强交流合作。在课例试讲、正式课过程中, 需要关注学生的课堂表现与课堂前后的反馈, 如对学生的问卷调查与访谈, 能够及时了解学生的基本情况, 便于反馈教师, 有效地调整教学。同时, 需要关注教师在每个研究阶段的行动与反思, 如教学观摩与研讨、收集分析教学反思等, 能够及时了解教师在知识、信念与能力三个维度上的发展。最后, HPM 课例研究需要加强 HPM 学习共同体的交流与合作, 促进研讨与设计、实施与评价两个环节的良性互动。

参考文献

- [1] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 19-23.
- [2] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准[S]. 上海: 上海教育出版社, 2002.
- [3] Wentworth, G. A. *Academic Algebra* [M]. Boston: Ginn & Co., 1913: 137.
- [4] 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的“因式分解”内容 [J]. 中学数学月刊, 2016(11): 36-39.
- [5] Sheldon. *Complete Algebra* [M]. New York: Sheldon & Co., 1888: 62.
- [6] Nicholson, J. W. *An Elementary Algebra* [M]. New Orleans: F. F. Hansell & Brothers, 1888: 65.
- [7] Gillet, J. A. *Elementary Algebra* [M]. New York: Henry Holt & Co., 1896: 120-131.
- [8] Jocelyn, L. P. *An Algebra for High Schools and Academies* [M]. Philadelphia: Sheldon & Co., 1902: 118-119.
- [9] Hawkes, H. E. *Complete School Algebra* [M]. Boston: Ginn & Co., 1919: 130.

HPM 视角下的高中“函数概念”课例研究*

刘思璐¹, 沈中宇²

(1.华东师范大学教师教育学院,上海,200062;2.华东师范大学数学科学学院,上海,200241)

1 引言

所谓“HPM 课例”,是指以解决某个教学问题为主旨、以不同方式将数学史融入具体知识点的教学的案例,包括教学的缘起、设计、改进、实施、反馈和评价整个过程。近年来,随着 HPM 课例研究的开展以及 HPM 课例的逐渐增多,越来越多的一线教师对 HPM 产生浓厚的兴趣,他们希望深入学习 HPM 的有关知识,并将数学史运用于课堂教学之中。但对于一线教师来说,独立开发一个较为理想的 HPM 课例却并非易事,因为教师手头往往缺乏有用的历史素材,即使有了历史素材,对于数学史的运用方式也不甚了解。因此,让一线教师深入了解 HPM 课例的研究方法和形成过程,是十分必要的。

函数是高中数学的核心概念之一,沪教版高中数学教科书(一年级第一学期第三章第一节)虽然引入了集合语言,但仍采用“变量说”(人教版教科书采用“集合对应法则”定义,即“对应说”)。对于函数概念的教学,迄今人们已经做了很多实践研究。但是,教学实践中仍存在问题有待于进一步解决,例如,学生在初中已经学习了函数的定义(沪教版初中教科书采用“变量依赖关系”定义,而人教版初中教科书则采用“变量对应关系”定义),为什么到了高中还需要学习函数的新定义?如何在课堂上重构函数概念的历史,引导学生从“变量说”顺利过渡到“对应说”? HPM 视角下的函数概念教学能否体现数学史的多元教育价值?

为此,HPM 工作室开展了将数学史融入函数概念教学的课例研究,先后历经选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作四个环节,最终形成了有一定特色的 HPM 课例。本文呈现课例研究的完整过程,为函数概念的教学以及未来的 HPM 课例研究提供参考。

2 HPM 视角下的函数概念课例研究

2.1 选题与准备

2.1.1 确定课题

课例研究的课题是 HPM 工作室在每个学期的期末根据下学期各学段的教学内容来确定

* 本文系 HPM 工作室系列论文之一。

的。高中函数概念既是初中函数概念的进一步抽象化，又是整个函数模块的基础，对后续数学学习至关重要，自然成为工作室的首选。HPM 工作室成员根据自己的教学进度，自愿报名承担开课任务。

针对函数概念的教学，基于过去的教学实践以及已有的实践研究，工作室确定了以下需要解决的问题：

- (1) 函数概念发生演变的历史动因是什么？
- (2) 经过初中阶段的数学学习，学生对于函数概念的认知起点是什么？
- (3) 初中已经学习了函数的定义，为什么到高中还要学习新的定义？
- (4) 如何从变量说过渡到对应说？

2.1.2 搜集史料

确定课题之后，工作室的研究者对函数概念的演进历史进行了研究。主要搜集以下史料。

1748 年，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中采用“解析式说”来定义函数：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。”^[1]但到了 1755 年，欧拉采用“变量依赖说”重新定义了函数：

“如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些变量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数。该定义适用范围很广，包含了一个量由其他量确定的所有方式。因此，若 x 表示变量，其他所有以任意方式依赖于 x 或由 x 确定的量均称为 x 的函数。”^[1]

在探讨从解析式说演变为变量依赖说的历史动因时，我们发现“弦振动问题”扮演着重要的角色：一根两端固定的弹性弦受力后呈现某种初始形状，如何确定刻画振动弦在某时刻形状的函数？对于该问题的研究引发数学家重新审视函数的定义，函数概念的外延因此得到了进一步拓广：用不同区间的解析表达式分段定义的函数；徒手绘制的函数，可能并不能用任何分析表达式给出^[2]。

函数概念从“变量依赖关系”演变为“变量对应关系”，与傅里叶级数的研究密切相关。数学家们一直试图用通用解析式来表示所有的函数，傅里叶（J. Fourier, 1768-1830）在不严谨的条件下给出了“所有函数都可以用傅里叶级数来表示”的结论。1837 年，德国数学家狄利克雷（G. L. Dirichlet, 1805-1859）发表题为“用正弦和余弦级数表示完全任意的函数”的文章，拓展了当时的函数概念：

“设 a 、 b 是两个确定的值， x 是可取 a 、 b 之间一切值的变量。如果对于每一个 x ，有惟一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时， y 也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一个连续函数。在整个区间上， y 无需按照同一种规律依赖于 x ，也无

需单单考虑能用数学运算来表示的关系。”^[2]

为说明该规则具有完全任意的性质，狄利克雷举出了“性状极怪”的函数实例：当 x 为有理数时， $y = c$ ；当 x 为无理数时， $y = d \neq c$ （今称狄利克雷函数）。^[3]其意义在于：突破了以往人们对于函数的印象，是第一个既不是由一个解析式表示、也不是徒手绘制的曲线，说明了函数作为任意配对的概念。^[2]

集合论诞生后，函数定义得到了进一步抽象，1939 年，布尔巴基学派在《集合论》中给出了函数新定义：

“设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同。 E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对每一个 $x \in E$ ，都存在唯一的 $y \in F$ ，它满足与 x 的给定关系。我们将联系的每一个元素 $x \in E$ 和 $y \in F$ 的运算称为函数； y 称为 x 处的函数值。函数是由给定的关系决定的，两个等价的函数关系确定了同一函数。”^[4]

上述定义中的“关系”就是我们今天所说的“对应法则”。

2.1.3 初步设计

在课例研究准备阶段，开课教师（即后文中的“执教者”）首先独立完成教材分析和学情分析。工作室为开课教师提供与函数相关的数学史料以及已有的相关教学设计。教师研读上述材料，思考如何将历史融入教学，并提出自己的困惑，如“关于函数概念，初中采用变量说，高中采用对应说，两者之间有何关系？”“教材中出租车费、男子 110 米栏记录的实例，仅仅是为了说明分段函数和函数的图像表示吗？”等等。

教师根据历史材料，结合实践经验以及已有的教学设计，初步完成教学设计（I），见表 1。教学目标为：（1）理解函数的概念，理解抽象函数符号 $f(x)$ 的意义；（2）理解和掌握用图示法，列表法和解析法表述函数；（3）会根据具体情况确定函数的定义域以及判断两个函数是不是同一函数；（4）通过经历函数概念变化的过程，提升数学抽象的能力。

表 1 “函数的概念”教学设计（I）

教学环节	教学过程	数学史素材
复习引入	回忆初中函数的概念并举例，介绍章头三位数学家。	笛卡儿、欧拉和李善兰简介
新课探究	探究 I： （1）写出简单问题中的函数关系式； （2）男子 100 米栏世界纪录统计表，生活中的例子。 （3）讨论“解析式”定义的局限性。 探究 II： （1）展示欧拉的“变量依赖关系”定义；	欧拉的函数定义

	(2) 讨论 $y = 0 (x \in R)$ 是否函数; (3) 讨论“变量依赖关系”定义的局限性。 探究 III: (1) 展示狄利克雷的“变量对应关系”定义; (2) 呈现“变量说”的现代标准定义。 探究 IV: (1) 用集合语言来描述两个变量之间的对应关系; (2) 呈现变量说的课本定义。	狄利克雷的函数定义
知识应用	通过例题让学生巩固函数的概念。	
课堂小结	总结本节课主要内容和主要方法。	

2.2 研讨与设计

2.2.1 历史分析

工作室研究者通过对函数概念历史的研究, 得到以下教学启示。

(1) 为了顺利实现从“解析式”定义到“变量依赖关系”定义的过渡, 可借鉴数学史上的“弦振动问题”, 让学生产生认知冲突。具体方案是: 先给学生们听一段优美的吉他曲, 启发学生想象吉他琴弦振动的形状, 引出“函数是否一定有解析式”这一问题。

(2) 为了顺利实现从“变量依赖关系”定义到“变量对应关系”定义的过渡, 可利用数学史上的狄利克雷函数, 让学生产生新的认知冲突。考虑到狄利克雷函数的抽象性, 一开始采用文字语言来描述该函数。

(3) 制作时长一分半左右的 HPM 微视频, 简单介绍狄利克雷的生平、狄利克雷的函数定义及其意义, 让学生感受数学知识背后的理性精神。

2.2.2 交流研讨

基于以上教学启示, 研究者与执教者再一次就教学设计进行深入交流和研讨。研讨过程中, 研究者与执教者达成共识, 学生在本节课中需要实现函数概念的三次跨越: 从“解析式”定义到“变量依赖关系”定义、从“变量依赖关系”定义到“变量对应关系”定义、从“变量对应关系”定义到“集合对应法则”定义, 在此基础上, 知道如何判断两个函数是否同一函数。

大家在研讨中提到, 本节课所涉及的历史上的函数定义较多, 教师应该最后给学生一个标准的函数定义。执教者提出新的问题: 在“变量对应关系”定义(不用集合语言)的基础上, 如何自然地引入集合语言?

2.2.3 改进设计

基于研讨结果以及历史研究的启示,执教者对教学设计(I)进行改进,见表2。

教学设计(II)在教学目标上,删掉“理解抽象函数符号 $f(x)$ 的意义”,增加“形成动态的数学观”和“经历函数概念变化的过程,提升数学学习的兴趣和信心”。

表2 “函数的概念”教学设计(II)

教学环节	教学过程	数学史素材
复习引入	同教学设计(I)	同教学设计(I)
新课探究	探究 I: (1) 引出欧拉“解析式说”; (2) 吉他琴弦振动的形状、股票趋势图和随手画的一段曲线; (3) 同教学设计(I)。 探究 II: (1) 同教学设计(I); (2) 男子 100 米栏世界纪录统计表、常值函数 $y = 0$ ($x \in \mathbf{R}$) 和狄利克雷函数(文字语言); (3) 同教学设计(I)。 探究 III: (1) 同教学设计(I); (2) HPM 微视频; (3) 验证前面六个例子。 探究 IV: (1) 用文氏图表示狄利克雷函数; (2) 展示布尔巴基学派的集合对应关系定义; (3) 呈现课本定义。	同教学设计(I) 振动弦问题 同教学设计(I) 狄利克雷函数 同教学设计(I) 布尔巴基学派的函数定义
知识应用	同教学设计(I)	
课堂小结	总结本节课主要内容和学习感悟。	

同时,为了检测教学效果、了解学生对函数概念的理解,研究者参考已有的调查问卷^[5],编制函数概念的前、后测工具。

2.3 实施与反馈

2.3.1 第一轮教学

第一轮教学为试讲,执教者采用了教学设计(II)。教学过程中,执教者利用“狄利克雷函数”引入“变量对应法则”定义。通过用文氏图表示狄利克雷函数的定义域(有理数集与无理数集的并集,即实数集),再对应到因变量 y 的取值(1和0)所构成的集合。再用集合的形式写出狄利克雷函数的分段解析式,顺利引出函数概念在集合语言下的“变量对应说”,并让学生去体验集合语言的简洁性和数学语言的演进性。

从学生填写的前、后测调查问卷和访谈录音有如下发现。大多数学生课前对于函数持有

“解析式”意象，而课后都有了“对应”意象。另外，学生对于函数概念有了动态的数学观，承认函数的复杂性，但也看到历史上数学家特别是狄利克雷对于数学的热爱。函数概念演进的艰辛而缓慢的过程，为学生提供了思想启迪。但是，从散点图的考查可以看出，仍有部分学生认为“函数是连续的图像”，说明他们对于变量对应关系仍然缺乏深刻的理解。

执教者对于第一轮教学进行了反思，认为本节课存在三个问题：一是学生回忆初中函数概念时，“解析式”的出现并不自然；二是学生对于振动弦形状和股票走势图的例子没有反应，“变量依赖说”引入不够流畅；三是“对应”这个词的引入不自然。听课教师和研究者也提出若干建议，如狄利克雷所使用的“对应”一词可用来解释前面所有的函数例子，建议让学生拿这个词与其他词作比较，从而得出前者的优越性。最后，执教者意识到，不仅要关注“对应”这个词，还应强调它的合理性。

2.3.2 第二轮教学

本轮教学为正式授课，工作室的一线教师和大学研究者均前往观摩，根据第一轮教学之后的研讨与反思，执教者对教学设计（II）做了一些调整，形成了教学设计（III），见表 3。

在教学目标上，删掉“理解和掌握用图示法，列表法和解析法表述函数”，增加“理解函数的三要素”和“感受数学的理性精神”。

在试讲所用的教学设计（II）中，执教者虽然先给出了布尔巴基学派的“集合对应法则”定义（对应说），但是紧接着又回到了沪教版教科书中的定义（集合语言下的变量对应说）。而在正式课的教学设计（III）中，执教者不再拘泥于沪教版教科书中的定义，最后呈现给学生的是布尔巴基学派的“集合对应法则”定义。

表 3 “函数的概念”教学设计（III）

教学环节	教学过程	数学史素材
情景引入	教师课前播放吉他曲，并将三位数学家的图片根据本节课的内容改为欧拉，狄利克雷，李善兰。	欧拉、狄利克雷、李善兰简介
新课探究	探究 I： （1）同教学设计（II）； （2）吉他琴弦振动的形状（在 PPT 上做了将一根琴弦振动时的形状描绘下来再移动到直角坐标系中的动画）和随手画的一段曲线； （3）同教学设计（I）。 探究 II： （1）同教学设计（I）；	同教学设计（I） 同教学设计（II） 同教学设计（I）

新课探究	(2) 校运会男子 100 米纪录统计 (让学生更有生活感和熟悉感)、常值函数 $y = 0 (x \in R)$ 和狄利克雷函数 (自然语言); (3) 同教学设计 (I)。 探究 III: (1) 展示简化版狄利克雷对函数的定义, 即“一般地, 在一个变化过程中, 如果有两个变量 x 与 y , 并且对于 x 的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与其对应, 那么我们就说 x 是自变量, y 是 x 的函数。” ^[6] ; (2) 同教学设计 (II); (3) HPM 微视频 (内容改为“函数概念的历史”)。 探究 IV: (1) 同教学设计 (II); (2) 同教学设计 (II)。	同教学设计 (II) 同教学设计 (I) 函数概念的演进历史 同教学设计 (II)
知识应用	同教学设计 (I)	
课堂小结	同教学设计 (II)	

2.3.3 学生反馈

我们对全班 37 名学生在情感和认知两方面进行了前后测。在对函数概念的理解上, 大多数学生对函数的印象课前是初中学过的各类函数, 课后是函数“对应说”的定义和函数三要素。在用语言刻画函数对应关系的考查上, 学生正确率从 45.9%变为了 83.8%。在考查函数的表格对应问题上, 将前测有规律的数据变为无规律的数据后, 学生的正确率从 70.3%变为了 67.6%。在通过函数图像考查对应关系“唯一性”的问题上, 将前测无规律的变化图像变为了开口朝右的抛物线, 学生正确率从 45.9%变为 54.1%。在函数图像为离散的点集问题的考查上, 学生的正确率从 21.6%变为了 59.5%。

后测卷加了一个问题, 让学生说说本节课上印象最深刻的内容。多数学生提及函数的演进过程、函数的对应关系和函数的三要素, 还有一部分学生提到函数的严谨化、质疑的精神和坚持不懈的努力等。从表格题和图像题中进一步发现, 不少学生认为函数必须是有规律的, 并没有在学习“集合对应关系”定义后发生改变, 这既说明了学生对于函数新定义尚缺乏深刻理解, 同时也印证了数学教育研究所发现的概念定义和概念意向分离的现象。

2.3.4 同行评议

第二轮教学之后, 工作室教师与研究者对本节课进行了点评。与已有的 HPM 视角下的函数概念教学设计相比, 本课例做了许多创新。一是用狄利克雷函数来凸显变量依赖关系定

义的局限性，二是以狄利克雷函数情形中的集合语言的自然引入；三是现代“集合对应法则”定义的呈现，突破了沪教版教科书中的定义。此外，执教者的课堂总结很棒：任何数学概念都经历不断演进的过程，正如同学们的数学学习一样，刚开始有反复、有疑惑、甚至有错误，但在今后的学习过程中会不断改进、渐至佳境。这样的总结既让学生树立动态的数学观，又让学生正确看待自己数学学习的过程。

但是，对应说的必要性问题仍然未得到很好的解决，未来需要作进一步的历史研究，以为教学提供借鉴；此外，在讲常值函数 $y = 0$ 的例子时，可以多给学生一些思考时间，因为这里存在强烈的认知冲突。

2.4 整理与写作

2.4.1 教师反思

第二轮教学之后，执教者围绕函数概念的教学，进行了深刻的反思。根据反思单，我们发现执教者在四个方面的变化。

首先，执教者对函数概念有了更深刻的认识，知道不应仅从解析式上去判断对应法则。

其次，执教者认识到学生对函数的理解（函数为解析式）具有历史相似性，需要用反例来纠正他们的观点，使他们的理解不断深入。

再次，执教者以往是通过让学生反复解题来达到理解概念的目的，经过本次教学，执教者意识到，借鉴和重构函数概念的历史，可以让学生真正经历概念的形成过程，从而加深对它的理解，因而 HPM 是概念教学的有效途径。

最后，HPM 视角下的函数概念教学，让学生得以穿越时空与历史上的数学家对话，从而让他们亲近数学，获得积极的情感体验，并感悟数学背后的理性精神。

2.4.2 课例呈现

最后呈现的课例主要分为 5 部分，分别是引言、史料选取与运用、教学设计与实施、学生反馈和结语。

引言对教材作简要分析，概述函数概念已有的教学设计，总结有待解决的教学问题，说明 HPM 视角的必要性。“史料选取与运用”部分介绍函数概念的历史、本节课所选择的史料素材以及数学史的运用方式^[7]。“教学设计与实施”部分按函数概念的各个教学环节展开，中间展示一些关键的教学片段。“学生反馈”部分呈现函数概念前、后测结果以及对结果的质性分析。“结语”部分为数学史在本节课中所体现的教育价值以及执教者和研究者的反思。

3 启示

经历选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作四个步骤，最终形成了“函数的概念”这一 HPM 课例。从课例形成过程中，我们获得了以下启示。

首先，重视教育取向的数学史研究，促成对史料的深入挖掘。历史研究是 HPM 课例研究的基础，有了深入的历史研究和翔实的历史素材，我们才能获得思想的养料，为教学活动的设计提供参照，才能有理有据地对教学设计进行改进和创新。

其次，关注学生对课堂教学的反馈，达成数学史与课堂教学自然融合。理想的 HPM 课例需要将知识的历史顺序、逻辑顺序和学生的心理顺序统一起来，在以史为鉴的同时，关注学生的最近发展区，步步为营，以最易为学生理解和接受的方式展开教学。

再次，加强教师对教学的反思，优化数学史的教学价值。通过 HPM 教学课例研究过程中教师填写的教师反思单和与教师研讨，可以及时了解教师每一阶段困惑并促进其发展。我们发现随着课例研究的深入，教师的对数学史教育价值的理解会随之加深，从为了数学史而数学史到利用数学史达成多元的教育价值，从促进学生知识理解到发展学生动态的数学观。

最后，强调分工合作，利用专业学习共同体的力量开发完善的课例。一个理想的 HPM 课例往往是团队协作的结果。课前通过团队研讨改进教学设计，课后通过分工来完成课堂实录、问卷调查和同行评议等。经过研讨、修改、实践、反思诸环节的循环，确保课例实施的有效性。

参考文献

- [1] 汪晓勤.19 世纪中叶以前的函数解析式定义[J]. 数学通报, 2015, 54(05):1-7, 12.
- [2] Kleiner, I. Evolution of the function concept: A brief survey[J]. *College Mathematics Journal*, 1989, 20(4): 282-300.
- [3] 吴文俊. 世界著名数学家传记(上)[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [4] 钟萍,汪晓勤.函数概念:基于历史相似性自然过渡[J].教育研究与评论(中学教育教学), 2016, (02): 62-68.
- [5] Reed, Beverly M. *The Effects of Studying the History of the Concept of Function on Student Understanding of the Concept* [D]. Ohio: Kent State University, 2007.
- [6] 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心编著. 八年级上册数学书[M]. 北京: 人民教育出版社, 2016.
- [7] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1):16-18.

教学实践

基于数学史的三角形内角和探究活动的设计与实施

瞿鑫婷¹, 汪晓勤¹, 贾彬²

(1. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2. 建平远翔学校, 上海, 200129)

1 引言

探究性学习 (Inquiry-based learning) 是近几十年来全球科学和数学改革中一个热门话题。1991 年, 全美数学教师协会 (NCTM) 指出, 探究是学生学习数学概念 and 知识最重要的环境之一, 包括探索、猜想、逻辑推理和评估^[1]。2001 年颁布的《全日制义务教育数学课程标准》(实验稿) 中, 使用了“探索”这一刻画数学活动水平的过程性目标动词, 体现了对学生在数学思考、解决问题等方面的要求^[2]。2011 年颁布的《义务教育数学课程标准》将“数学探究”作为初中数学课程的主要内容之一, 明确指出: “学生学习应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。认真听讲、积极思考、动手实践、自主探索、合作交流等, 都是学习数学的重要方式。学生应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程。”^[3]杜威 (J. Dewey, 1859-1952) 认为, 探究是发现和学习的基础^[4]。研究表明, 基于探究活动的数学教育能加强学生对数学的理解和思考, 培养学生积极的态度和信念, 提升学生参与度, 同时提高创造力以及解决问题的能力^[5]。

美国数学家和数学史家 M·克莱因 (M. Kline, 1908-1992) 曾指出: 数学史是数学教学的指南^[6], 据此我们也可以说, 数学史也是探究性教学的指南。英国学者福韦尔 (J. Fauvel, 1951-2000) 指出, 数学史为学生提供了探究机会^[7]。数学上的概念、定理等都是经过漫长的历史不断演进而来的, 在数学教学中借鉴有关主题的历史发展过程来设计探究活动, 让学生经历知识的发生发展过程, 体会数学研究的方法, 积累数学活动经验, 加深对数学的理解, 从而践行了弗赖登塔尔 (H. Freudenthal, 1905-1990) 的“再创造”理论, 并体现《课程标准》的教学要求。

近年来, HPM 视角下的初中数学教学日益受到一线教师的关注, HPM 专业学习共同体所开发的 HPM 课例受到他们的欢迎。许多初中一线教师希望在实践中运用数学史, 改善教学效果; 但由于手头缺乏资料且未掌握数学史融入数学教学的具体方法, 他们在具体实践中遇到了很大的困难。为此, 本文通过一个典型的初中 HPM 课例来呈现基于数学史的初中数

学探究活动的设计和实施方式，为 HPM 视角下的初中数学教学提供参考。

2 探究式教学的过程

美国哥伦比亚大学的西格尔 (M. Siegel) 教授早在 1998 年就提出了数学探究式教学的四个环节^[8]：准备与聚焦、探索与发现、综合与交流、评价与延伸，诸环节的具体活动内容概述如下。

(1) 准备与聚焦：教师通过介绍数学活动，唤起学生对定义、证明等的初步想法，并在学生已有的知识基础上挑战学生的固有信念，激发学生的学习兴趣，确定探究的主题和目标。

(2) 探索与发现：学生针对教师提出的开放式问题提出猜想，并进行分析、推理与试验，得到初步的结果。

(3) 综合与交流：教师协助学生进行小组讨论，借由辨析、论证、研讨的过程，获得最后结果。在此过程中，学生表达自己的想法（如运用表格、图形、证明等），回应他人的意见，教师适时引导或帮助学生得出一般结论。

(4) 评价与延伸：教师归纳学生的数学发现，对学生的参与、表现和学习进行评价，引导学生反思探究活动过程，学会将一般结论进行类比，应用在其他数学情境中，并对新知加以整理和拓展，激发更深层次的探究。

本文利用西格尔的四阶段框架，对基于数学史的三角形内角和定理的探究活动进行深入分析。

3 三角形内角和课例分析

3.1 三角形内角和定理的历史

(1) 三角形内角和的发现

公元前 6 世纪，古希腊数学家泰勒斯 (Thales) 通过拼图发现三角形内角和定理。泰勒斯可能已经知道等腰三角形底角相等，因而知道等边三角形三个内角相等（也可能凭生活经验知道这一事实）。他先是发现，将六个同样的正三角形的某一个顶点置于同一点，恰好填满该点周围区域，因而六个内角之和等于四直角，三个内角之和等于二直角。接下来，将六个同样的等腰三角形的不同顶点置于同一点，其中的每一个顶点出现两次，结果也恰好填满该点周围区域，没有缝隙。因而六个内角之和等于四直角，三个内角之和等于二直角。

最后，用六个同样的不等边三角形来拼图，发现同样的结论。

(2) 三角形内角和定理的证明

为了证明三角形内角和定理，古希腊数学家（如毕达哥拉斯学派、欧几里得）的做法都是过三角形某个顶点，作对边的平行线，从而将三个内角转化为一个平角。今日教科书大多也采用这样的方法。18 世纪，法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut, 1713-1765）则利用平行线将三个内角转化为一对同旁内角。

19 世纪末 20 世纪初，西方教科书编者将古希腊的方法推广到一般情形：不在某一顶点处作某一边的平行线，而是过三角形某一条边上的任一点作另两边的平行线^{[9][10]}，甚至过三角形所在平面内任一点处同时作三条边的平行线。最后一种方法多用于三角形外角和定理的证明。

(3) 避免使用平行线的尝试

古希腊数学家普罗克拉斯（Proclus, 410-485）试图不用平行线来证明三角形内角和定理。如图 1，过三角形 ABC 的三个顶点 A 、 B 和 C ，分别作底边 BC 的垂线。则 $\angle BAD = \angle EBA$ ， $\angle CAD = \angle ACF$ 。因此， $\angle BAC = \angle ABE + \angle ACF$ 。因此 $\angle A + \angle B + \angle C = \angle EBC + \angle FCB = 180^\circ$ 。这种方法可以推广到一般的非垂直情形。

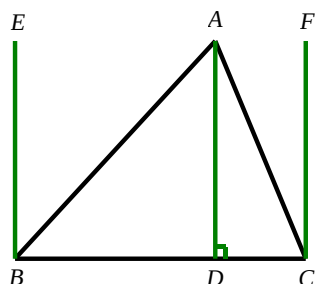


图 1 普罗克拉斯的证明

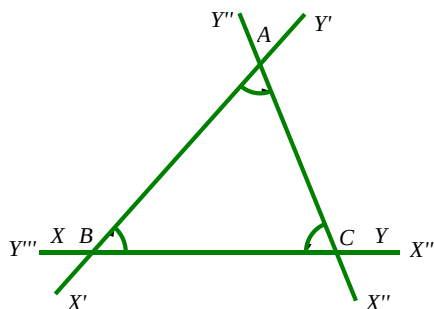


图 2 提波特的证明

1809 年，德国数学家提波特（B. F. Thibaut, 1775-1832）首次利用旋转方法证明了三角形内角和定理。如图 2，将 BC 所在的直线 XY 绕点 B 沿逆时针方向旋转角度 B ，到 BA 所在直线 $X'Y'$ ；将 $X'Y'$ 绕点 A 沿逆时针方向旋转角度 A ，到 AC 所在直线 $X''Y''$ 。最后 $X''Y''$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转角度 C ，到直线 BC 所在直线 $Y'''X'''$ 。从 XY 到 $Y'''X'''$ ，总共转过 180° 度。

图 3 给出了基于平行线的证明方法的演进过程。

3.2 三角形内角和探究活动的设计与实施

在课例“三角形内角和”中，教师根据三角形内角和定理的历史设计了如下探究活动。

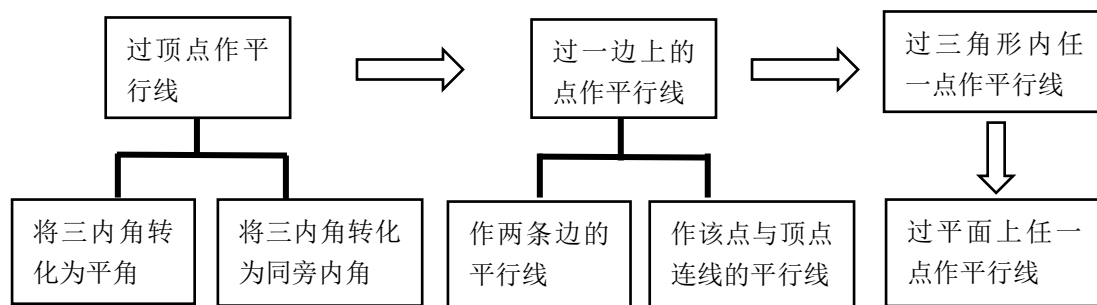


图 3 基于平行线的三角形内角和定理证明方法的演进过程

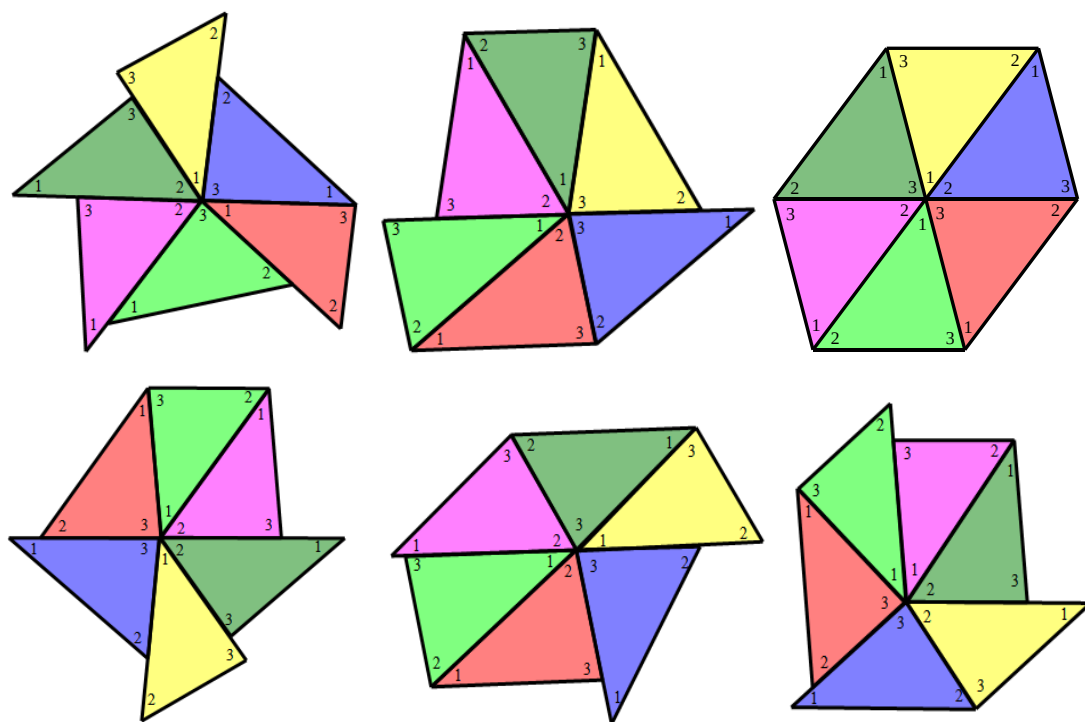
(1) 准备与聚焦

上课一开始，播放微视频（时长约 2 分钟），追溯三角形内角和定理的历史：泰勒斯受生活中地砖镶嵌的启示，通过六个同样的等边三角形的拼图，发现三角形内角之和等于两个直角；之后，毕达哥拉斯和欧几里得相继通过平行线证明了该定理。在学生观看视频后，教师要求学生分组合作，探究以下问题：

- 利用不等边三角形，能否发现三角形内角和定理？
- 能否用不同于教科书和视频中的方法（即毕达哥拉斯和欧几里得的方法）来证明三角形内角和定理？

(2) 探索与发现 (I)

学生将六个完全相同的不等边三角形在一个点的周围无缝隙、无重叠地拼成不同的图形，部分拼图如图 4 所示。



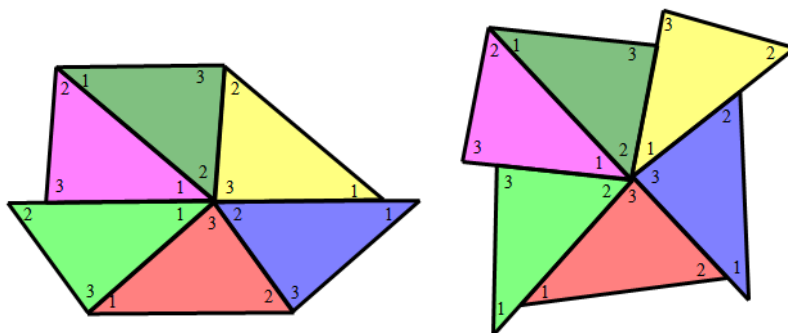


图 4 学生的部分拼图方案

从这些拼图方案中都能够发现三角形内角和等于 180° 度。就本节课而言,“探索与发现”的目标之一并非三角形内角和定理的结论(学生在小学的时候已经知道结论),而是定理结论的发现过程。学生通过探究得到的结果是:通过不等边三角形的拼图,也能发现三角形内角和定理;从特殊到一般,这是三角形内角和性质的一般发现过程。

(3) 探索与发现 (II)

“探索与发现”的目标之二是三角形内角和性质的新说理方法,学生采用了新的转化方法。部分学生将三角形的三个内角转化为同旁内角,与克莱罗的证明一致,如图 5。

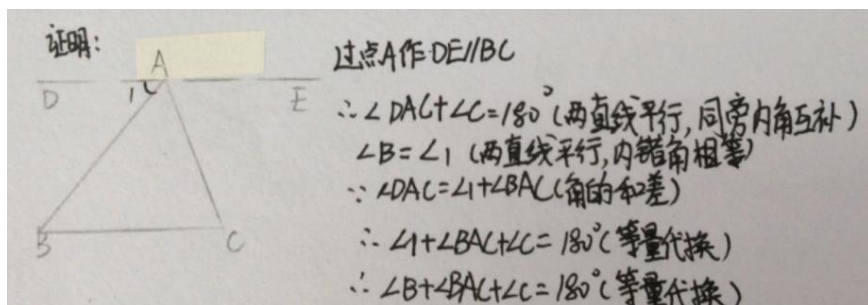


图 5 学生的说理方法之一

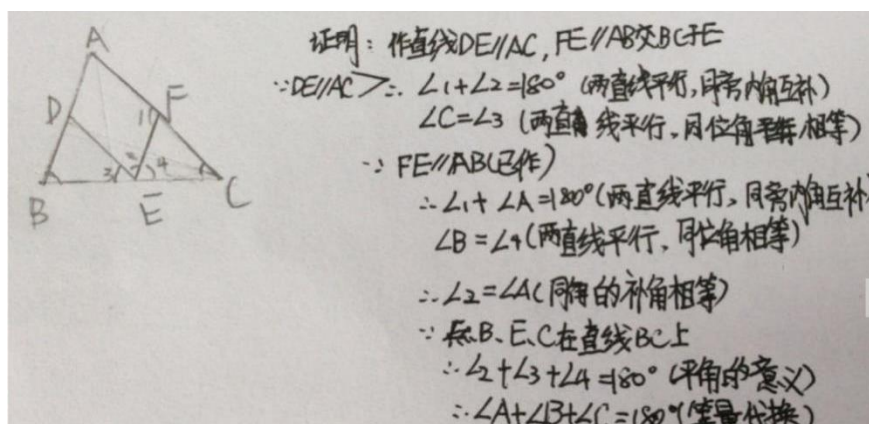


图 6 学生的说理方法之一

部分学生仍将三角形三个内角转化为平角,但将平角的顶点转移到三角形的某一条边

上, 如图 6、图 7 所示。

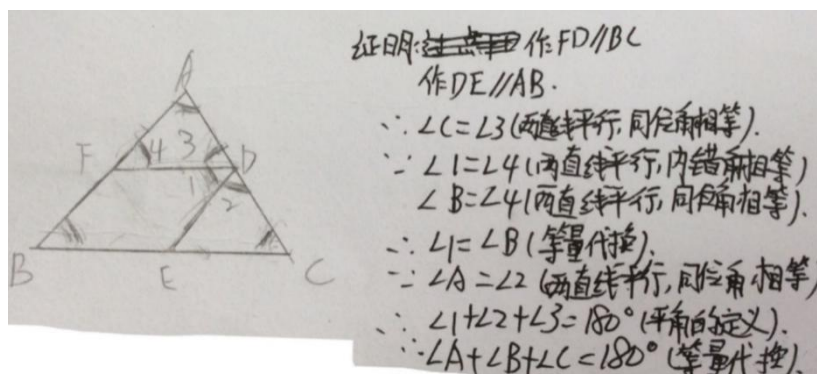


图 7 学生的说理方法之三

学生通过探究得到的初步结果是: 为实现角的转化, 不仅可以过三角形顶点, 还可以过三角形一边上的某一点作平行线。

(4) 综合与交流

在本环节, 教师引导学生思考新的问题: 将三角形的三个内角进行转化时, 所构造的角的顶点可否不位于边上? 通过讨论, 部分学生猜想, 顶点可以位于三角形的内部, 教师要求学生画图验证自己的猜想。图 8 给出了部分学生的证明。

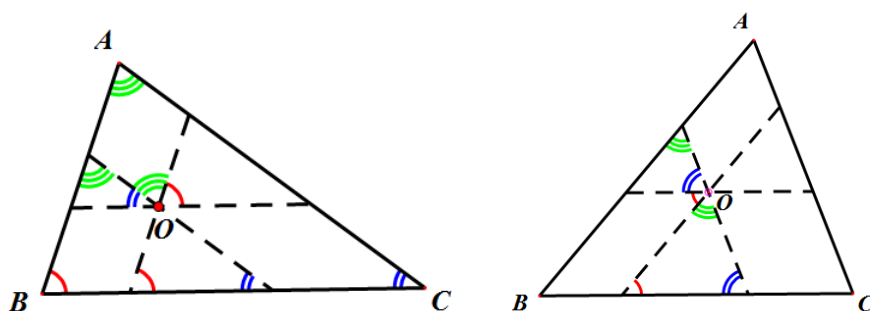


图 8 学生的说理方法之四

上述证明大大激发了学生的思维。部分学生开始思考: 顶点位于三角形内部, 是否最一般的情形呢? 经过讨论, 有学生将顶点设在三角形外, 如图 9 所示。

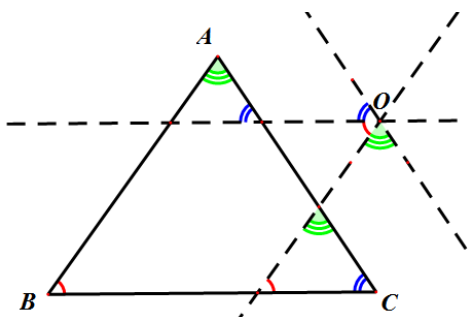


图 9 学生给出的说理方法之五

至此, 学生通过探究, 实现了平角顶点从三角形的顶点、到三角形一边上的一点、再到三角形所在平面内任意一点的演进过程。

(4) 评价与延伸

教师对学生给出的证明与历史上数学家的证明进行对比, 对学生的表现给予了积极的评价; 总结三角形内角和定理背后的数与形、形与形互相转化的数学思想, 以及从特殊到一般的数学探究方法。最后, 教师提出进一步探究的课题:

- 过三角形一条边上的任意一点作另两条边的平行线, 这种方法与毕达哥拉斯学派和欧几里得过一个顶点作平行线的方法有何联系?
- 过三角形一条边上的任意一点, 是否可以作出其他辅助线来对三角形内角和定理进行说理? 由此得到的新证明与毕达哥拉斯学派和欧几里得过一个顶点作平行线的方法有何联系?
- 运用在三角形内或三角形外任一点处作平行线的方法, 能否对三角形外角和定理进行说理?
- 如果规定不能使用平行线, 如何对三角形内角和定理进行说理?

4 结 语

以上我们看到, 三角形内角和定理的探究活动基本满足西格尔的探究教学四阶段。在准备与聚焦阶段, 教师基于学生的认知起点, 创设泰勒斯铺地砖这种贴近生活的情境, 激发学生学习兴趣, 并提出探究任务。在探索与发现阶段, 教师引导学生分组进行拼图、讨论、说理论证等一系列探究活动, 实现从特殊到一般的发现过程, 并初步完成从特殊到一般的说理过程。在综合与交流阶段, 教师引导学生对说理做出更进一步的探究, 最终实现了说理方法的一般化。在评估与延伸阶段, 教师评价学生的表现, 让学生获得数学发现的成功体验, 体现了“探究之乐”。同时, 教师总结本节课所涉及的数学思想和探究方法, 并提出拓展性问题, 激发学生课后进一步的探究与思考。

在基于数学史开展的数学探究活动中, 一方面, 数学史是探究性教学的指南, 教师可依据数学定理的历史演进过程设计和实施探究活动; 另一方面, 探究活动是数学史的重构, 数学史创造了探究活动的机会。通过探索数学史上不同的证明方法, 拉近了学生与古代数学家的距离, 使数学课充满人文气息。因此, 数学史是沟通历史与现实、数学与人文的桥梁。

参考文献

- [1] Chin, E. -T. & Lin, F. L. A survey of the practice of a large-scale implementation of inquiry-based mathematics teaching: from Taiwan's perspective[J]. *ZDM*, 2013, 45: 919–923.
- [2] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.
- [3] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.
- [4] Dewey, J. *Logic: The Theory of Inquiry* [M]. New York: Holt, 1938.
- [5] Häikiöniemi, M. Teacher's reflections on experimenting with technology-enriched inquiry-based mathematics teaching with a preplanned teaching unit [J]. *Journal of Mathematical Behavior*, 2013, 32: 295–308.
- [6] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [7] Fauvel, J. Using history in mathematics education [J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.
- [8] Siegel, M., et al. Supporting students' mathematical inquiries through reading [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1998, 29(4): 378-413.
- [9] Betz, W., Webb, H. E. *Plane Geometry*[M]. Boston, Ginn and Company, 1912: 104.
- [10] Stone, J. C., Millis, J. F. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Benj. H. Sanborn & Company, 1916: 39.

学术资讯

2018 年 HPM 研究成果

一、HPM 理论探讨

1. 陈晏蓉, 汪晓勤. 基于数学史的新知引入课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2018, (01): 38-44.
2. 丁倩文, 汪晓勤. 基于数学史的初中数学问题提出课例分析[J]. 中学数学月刊, 2018, (03): 44-48.
3. 何伟淋, 汪晓勤. 数学符号史在高中数学教学中的应用与价值[J]. 中小学数学(高中版), 2018, (05): 9-13.
4. 王鑫, 沈中宇. 国际视野下小学 HPM 课例评析[J]. 教学月刊(小学版), 2018, (05): 12-16.
5. 岳增成. HPM 与数学德育[J]. 教学月刊小学版(数学), 2018, (05): 7-11.
6. Wang, K., Wang, X., Li, Y., & Rugh, M. S. A framework for integrating the history of mathematics into teaching in Shanghai. *Educational Studies in Mathematics*, 2018, 98(2): 135-155
7. 王鑫, 汪晓勤, 岳增成. 基于数学史的数学探究活动设计课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2018, (10): 54-58.
8. 汪晓勤. HPM, 让课堂更美好[J]. 小学教学(数学版), 2018, (Z1): 1.
9. 汪晓勤. HPM 研究之旅[J]. 小学教学(数学版), 2018, (Z1): 4-9, 2.
10. 汪晓勤. 国际 HPM 研究概述[J]. 小学教学(数学版), 2018, (Z1): 10-14.
11. 马艳荣, 汪晓勤. 基于数学史的高中数学问题串初探[J]. 中学数学教学参考, 2018, (10): 7-10.
12. 孙丹丹, 岳增成, 沈中宇, 栗小妮. 国际视野下的数学史与数学教育——“第八届数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学”综述[J]. 数学教育学报, 2018, 27(06): 92-97.

二、教育取向的历史研究

13. 沈中宇, 汪晓勤. 平面概念与公理的历史发展[J]. 数学通报, 2018, 57(02): 6-11.
14. 张亚琦, 汪晓勤. 乘法公式: 从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 2018, (4): 48-51.
15. 栗小妮, 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的根式定义[J]. 数学通报, 2018, 57(04): 9-12, 52.
16. 岳增成, 汪晓勤. 中国台湾地区数学教育研究十二年[J]. 数学教育学报, 2018, 27(4): 18-24.

三、教学实践与案例开发

17. 王鑫, 栗小妮, 汪晓勤. HPM 视角下初中数学概念教学的若干特点——基于“反比例函数”同课异构教学案例的分析[J]. 中小学数学(初中版), 2018, (Z1): 114-117.
18. 栗小妮, 沈中宇. “完全平方公式”: 从历史中找动因、看形式[J]. 教育研究与评论(中学教育), 2018, (03): 46-51.

19. 贾彬, 栗小妮. HPM 视角下的“演绎证明”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (05): 44-49.
20. 冯晶. 有机融入出奇效 合作研讨成典范——“大数的认识”课例生成记[J]. 教学月刊小学版(数学), 2018, (05): 16-19.
21. 马思聪. 追溯历史, 重构教学路径——数学史融入“平行”的教学[J]. 教学月刊小学版(数学), 2018, (05): 20-23.
22. 刘轩如. 数学史: 人文与理性的融通[J]. 教学月刊小学版(数学), 2018, (05): 24-27.
23. 张益明, 丁倩文. “两角和与差的余弦公式”: 从历史中找价值、看证明[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (06): 33-38.
24. 高振严, 何伟淋. “线面垂直判定定理”: 从历史看证明、找模型[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (07): 35-40.
25. 张莉萍, 栗小妮. HPM 视角下的“三角形中位线定理”的教学[J]. 数学教学, 2018, (07): 11-15.
26. 袁芳, 马艳荣. HPM 视角下的“和差术应用”专题复习课[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (08): 52-57.
27. 陈晏蓉, 汪晓勤. 线面垂直判定定理的同课异构课例分析[J]. 中小学数学(高中版), 2018, (9): 19-23.
28. 顾海萍, 孙丹丹. HPM 视角下的“邻补角、对顶角”教学[J]. 中学数学月刊, 2018, (09): 45-48.
29. 岳增成, 刘轩如. 发生教学法视角下发生教学法视角下“分数的初步认识”教学探索[J]. 小学数学教师, 2018, (10): 32-35.
30. 汤雪川, 栗小妮, 孙丹丹. “等腰三角形的性质”: 从历史中找应用, 看证明[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (11): 52-61.
31. 向荣, 陈莎莎, 沈中字. HPM 视角下的周期函数概念教学[J]. 中小学数学(高中版), 2018, (11): 45-50.

四、HPM 与教师专业发展

32. 汪晓勤, 齐春燕. 职初教师关于数学史课程的观点探析[J]. 高等理科教育, 2018, (6): 25-30.

五、数学史融入教材研究

33. 王鑫, 汪晓勤, 邹佳晨. 高中数学教科书阅读材料“对数的发明”使用现状及启示[J]. 数学教学, 2018, (08): 1-5, 29.

六、技术与 HPM

34. 余庆纯, 汪晓勤. HPM 微课在和角公式教学中的应用[J]. 中学数学月刊, 2018, (12): 33-36.

(周天婷、姜浩哲、沈中字整理)