“等腰三角形的性质”:从历史中找应用,看证明*

汤雪川[1],栗小妮[2],孙丹丹[3]

(1.上海市徐汇区长桥中学,200444;2.华东师范大学教师教育学院,200062;
3.华东师范大学数学科学学院,200241)

摘　要:分析沪教版高中数学教材设计的不足,梳理相关的历史素材,对“等腰三角形的性质”分两个课时设计和实施教学:第一课时主要让学生通过折纸操作、添加“三线之一”说理等活动,归纳发现、演绎证明“等边对等角”,进而得到“等腰三角形三线合一”,并且运用它们解决历史现实(水准仪)和教材逻辑(“SSS”的说理)的问题;第二课时主要让学生运用多种方法对“等边对等角”进行说理,并且反思各种方法的本质以及之间的联系。课后反馈表明,这样的教学取得了较好的效果。

关键词:HPM　等腰三角形的性质　应用　证明

等腰三角形“等边对等角”的性质和“等角对等边”的判定是边与角互相联系和转化的重要依据,是平面几何知识体系中支柱性的定理之一。在沪教版初中数学教材中,“等腰三角形的性质和判定”是七年级第二学期第十四章《三角形》第3节《等腰三角形》中的内容,被安排在“三角形的有关线段、分类和内角和”(第1节《三角形的有关概念和性质》中的内容)“全等三角形的性质和判定”(第2节《全等三角形》中的内容)后。教材先用一个小节呈现“等腰三角形的性质”:直接利用问题“等腰三角形的两个底角具有怎样的大小关系”来引入,然后通过画顶角的平分线并沿着其翻折的实验操作以及线段重合的说理,得到“等边对等角”的性质,接着运用全等三角形的判定“SAS”和性质“对应角相等”,

对其进行严格说理(论证),最后反思说理的过程,基于三角形全等,得到剩下的一组对应边相等和一组对应角相等,进而得出“等腰三角形三线合一”的性质,揭示等腰三角形的轴对称性。

这样的设计一方面凸显了直观感知,能够增进学生的兴趣、提升学生的认识,另一方面加强了逻辑推理,能为学生后续逐渐进入论证几何的定理系统打下基础。不少教师在教学中也采用了类似的设计,只是侧重点略有不同。但是,这样的设计仍然存在一些不足。首先,虽然数学的研究对象是抽象化的思想材料,但是过分脱离现实(生活)来源的教学不符合学生的心理特点,难以激发学生的学习动力,会令学生感到枯燥和无用。其次,为了便于翻折后对线段重合进行说理,也考虑到教材之前未给出(后续会给出)全等三角形的判定“SSS”的说理及特殊情况下全等三角形的判定“SSA”,运用它们说理显得不够严谨,应该画顶角的平分线,而不画底边上的中线或高;但是直接画顶角的平分线,而不说明为什么不能画底边上的中线或高,则会限制学生的思维,显得不够自然、透彻。此外,吹毛求疵地看,教材之前是运用全等三角形的判定“SSS”,对角平分线的尺规作图方法进行说理的,因此,“画顶角的平分线”的说理方法也显得不够严谨。

对此,我们尝试追寻“等腰三角形的性质”的历史踪迹,看看其到底有什么实际的运用,有哪些证明的方法,采用 HPM 视角改进这一内容的教学。

一、历史素材梳理

(一)“等腰三角形三线合一”的实际运用

1. 古埃及、古巴比伦时期。

在古代埃及和巴比伦,新庙址的测量是按照严格的几何和天文方法进行的,且是法老和僧侣阶级的特权——在埃及神话里,还有专门掌管测量的女神。一些测量工具和基本的几何图形往往成为神圣的符号而被人们用作护身符。古代的水准仪是由一个等腰三角形及悬挂在顶点处的铅垂线组成的,如图 1 所示。水准仪中三角形的底边猜测是用绳子做成的,因为绳子的中点非常容易确定。测量时,调整底边的位置,如果铅垂线经过底边中点,就表明底边垂直于铅垂线,即底边是水平的。古代人通过生活经验的积累,找到了这种判定水平的方法,实际上用到的就是“等腰三角形三线合一”的性质。

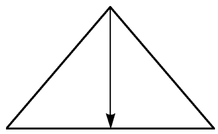

图 1

2. 古罗马时期。

古罗马时期的一块墓碑如图 2 所示。也许,我们不认识墓碑上刻着的名字,也不知道长眠于地下的人生前经历了怎样跌宕起伏的人生。但是,从墓碑顶上的等腰三角形和中间的铅垂线可以断定,墓碑的主人生前是一位土地丈量员。也许,他并不精通数学,但是,他每天都在使用“等腰三角形三线合一”的性质。

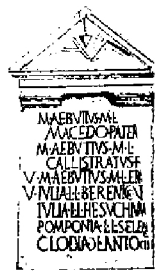

图 2

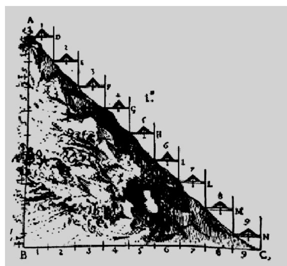

图 3

3. 文艺复兴时期。

在文艺复兴时期,水准仪这种工具也被广泛地应用着。17 世纪意大利数学家博默多罗的《实用几何》一书中的一幅插图(如图 3)告诉我们,那个时代的测量员正是利用水准仪来测量山的高度的。由于山的高度是竖直方向高度的累加,需要在斜坡上找到水平线

作为每次测高的基准，因此要用到水准仪。

（二）“等边对等角”的证明方法

1. 欧几里得的证明方法。

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中给出了“等边对等角”最早的证明方法。《几何原本》第一卷命题 5 说的是：“在等腰三角形中，两个底角彼此相等，并且若向下延长两腰，则与底角相邻的两个角也彼此相等。”欧几里得的证明如下：如图 4，分别延长等腰三角形的两腰 AB 和 AC，在 AB 的延长线上任取一点 E，在射线 AC 上截取 AD，使得 $AE=AD$，联结 CE、BD。先证明 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 全等（“SAS”），可得 $BD=CE$，$\angle ADB=\angle AEC$，$\angle ABD=\angle ACE$；由 $AE=AD$，$AB=AC$ 可得 $BE=CD$，再证明 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CEB$ 全等（“SAS”），可得 $\angle CBD=\angle BCE$，$\angle DCB=\angle EBC$；由 $\angle ABD=\angle ACE$，$\angle CBD=\angle BCE$，根据公理 3（等量减等量，差相等），得 $\angle ABC=\angle ACB$。

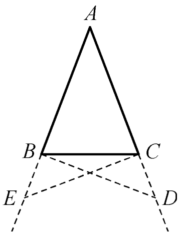

图 4

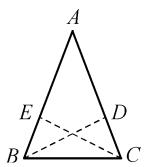

图 5

中世纪，欧洲数学教育水平低下，学生初读《几何原本》，学到命题 5 时，就觉得很难。因此，这个命题也被戏称为“驴桥”，意思为笨蛋的难关——也有人推测，欧几里得作出的图形很像一座简单的桁架桥，因而有“驴桥”之名。

《几何原本》的最大特色在于演绎体系的建立，即新命题证明的依据只能是之前的公理、公设或已经证明的命题。由于命题 5 之前没有出现“SAS”以外的全等三角形判定方法，所以这里不能用“SAS”以外的三角形全等判定方法证明“等边对等角”。由于命题 13 才是“两条直线相交所成的角中，相邻两个角或者是两个直角，或者它们的和等于两个直角”，因此这里不能由 $\angle EBC=\angle DCB$ 直接得出 $\angle ABC=\angle ACB$。

此外，有了“等边对等角”，就可以把边转化为角，就可以对全等三角形的判定“SSS”进行说理了。因此，从历史的角度看，如果运用全等三角形的判定“SSS”，对“等边对等角”进行说理，则有循环论证之嫌。

2. 帕普斯的证明方法。

3 世纪末，古希腊数学家帕普斯给出了“等边对等角”巧妙的证明方法：将等腰 $\triangle ABC$ 想象成两个三角形，由 $AB=AC$，$AC=AB$，$\angle BAC=\angle CAB$，可得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACB$ 全等（“SAS”），从而得到 $\angle ABC=\angle ACB$。

3. 普罗克拉斯的证明方法。

5 世纪，古希腊数学家普罗克拉斯（Proclus，410～485）也曾给出过“等边对等角”的证明方法。与欧几里得的方法类似，他的方法是直接在两腰 AB 和 AC 上取点 E 和点 D，使得 $AE=AD$，然后联结 EC、DB（如图 5），两次利用“SAS”得到三角形全等。

二、教学设计与实施

分析历史素材可知，“等腰三角形的性质”重要的实际应用是测量水平线，主要的证明方法本质上是从顶点出发在两腰所在的直线上截取相等的线段（欧几里得是在腰的延长线上截取，帕普斯是直接截取腰，普罗克拉斯是在腰上截取，另外可以在腰的反向延长线上截取），构造两个三角形，多次（一般为两次）运用全等三角形的判定“SAS”。这些历史素材可以激发学生的学习动力，还可以让学生感受证明方法的多样性，体会欧氏几何公理体系的严密性和“运动联系”“变化统一”的思想，因此，应该运用、渗透到教学中。

此外，教材中的折纸操作活动属于实验几何内容，具有很强的体验性，符合学生的认

知水平，便于学生先猜想后证明，体会科学研究的基本过程。而且，由此引出添加顶角的平分线或底边上的中线或底边上的高，构造全等三角形进行说理，是自然的、易懂的。因此，教学中也应该保留这些内容，并结合历史素材说清楚背后的道理，指出其是否严谨。

综上，考虑到课堂容量的限制，我们对“等腰三角形的性质”分两个课时设计和实施教学：第一课时主要让学生通过折纸操作、添加“三线之一”说理等活动，归纳发现、演绎证明“等边对等角”，进而得到“等腰三角形三线合一”，并且运用它们解决历史现实（水准仪）和教材逻辑（“SSS”的说理）的问题；第二课时主要让学生运用多种方法对“等边对等角”进行说理，并且反思各种方法的本质以及之间的联系。

（一）第一课时

1.引入史实，激发思考。

基于等腰三角形的性质在古代用于测量的史实，利用古罗马时期的墓碑设置问题引入，激发学生的好奇心和求知欲；利用学生熟悉的工具制作简单的水准仪，进一步吸引学生的注意，引发学生的兴趣。

师 （出示图2）猜一猜图中的是什么？有没有和数学学科相关的内容？

生 等腰三角形、铅垂线、直尺、梯形。

师 什么是等腰三角形？

生 有两边相等的三角形叫作等腰三角形。

师 等腰三角形作为特殊的三角形，其边与角有特殊的名称，分别是——

生 等腰三角形中，相等的两条边叫作腰，另一条边叫作底边，相等两边的夹角叫作顶角，另两个角叫作底角。

师 非常好！这其实是一块墓碑。图中等腰三角形和铅垂线的组合是一种测量、检验水平线（即与水平面平行的直线）的工具。今天，老师也模仿古人，做了一个简单的水准仪。

（演示：取一把等腰三角尺，在其底边的中点处做一个记号，在其顶点上系一条铅垂线，利用这一教具展示水平线与非水平线的检验。）

师 这个工具究竟具体能够做些什么呢？老师先卖一个关子，请同学们带着这个疑问来进行今天的学习。本节课我们就来研究等腰三角形的性质。

2.类比旧知，确定方向。

通过回忆三角形相关知识的学习过程，帮助学生利用类比的方式，得到研究等腰三角形性质的方向，即从边、角、特殊线段等角度研究等腰三角形特有的性质。

3.动手操作，归纳猜想。

借助三角形纸片，让学生自由观察、操作（直观感受）得到等腰三角形特有的性质，为后续逻辑推理提供经验支撑和思考的基础，初步感受实验感知与逻辑推理两者之间的联系与区别。

师 请你利用课前准备好的等腰三角形纸片，观察、操作并猜想等腰三角形可能具有哪些性质。

（学生活动。）

师 等腰三角形的边有哪些特有的性质？

生 等腰三角形的两腰相等。

师 是的，这是定义。你是如何验证这一性质的？

生 看出来的。

生 用直尺量出来的。

生 对折等腰三角形纸片，两边重合。

师 等腰三角形的角有哪些特有的性质？

生 等腰三角形的两个底角相等。

师 你是如何得到这一性质的？

生 目测、度量、叠合都能得出。

（教师通过几何画板演示：图形在运动，等腰三角形的元素——底角和腰的大小在相应变化，但是两个底角之间、两条腰

之间的等量关系没有变化。)

师 这种图形中元素与元素之间不变的数量或位置关系就是图形的性质。

4.逻辑思考,说理证明。

通过符号语言,让学生自由添加辅助线,表达“等边对等角”的说理,体会化归的数学思想,为后续“等腰三角形三线合一”的得出打下基础,进一步感受实验几何与论证几何的区别。当学生添加的是底边上的中线时,通过“小故事”,帮助学生初步感受循环论证的问题;当学生添加的是底边上的高时,通过几何画板演示,让学生知道所用的全等判定方法只在一些特殊的情况下成立,为后续学习埋下伏笔。

师 刚才大家通过观察、操作得到的结论可以用符号语言表达为:在$\triangle ABC$中,已知$AB=AC$,则有$\angle B=\angle C$。但是,眼见(观察)不一定为实,而且度量、叠合(操作实验)不可避免地会有误差。即使没有误差,也只是验证了有限多个结果,并不能说明对所有的(无限个)等腰三角形都是成立的。因此,我们应该用逻辑推理(理性认识)的方法来证明这一性质。那么,如何通过几何说理的方式证明这个结论正确呢?

生 (出示图6)取BC的中点,构造三角形全等说明。

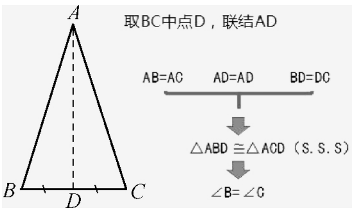

图6

师 你能想出这种方法,真棒!通过添加辅助线构造出可说明全等的三角形,将等角的问题转化为全等的问题。但是严格地说,我们用来证明其他命题的命题必须是已经证明过的。请大家回忆一下:我们前面学习全等三角形的判定“SSS”时,对它进行说理了吗?

生 没有。

师 因此,不能用“SSS”来说明等腰三角形的底角相等。其实,“SSS”的说理需要用到等腰三角形的底角相等,也即需要用等腰三角形的底角相等来说明“SSS”:这里,老师有一个故事——瘦子问胖子:“你为什么这么胖?”胖子回答:“因为我吃得多。”瘦子又问胖子:“你为什么吃得多?”胖子回答:“因为我胖啊。”请大家想一想:这里犯了一个怎样的错误?

生 形成了一个循环。

师 说理的前提就是说理的结论,成了一个循环,是无意义的,逻辑上有错误。用“SSS”来说明等腰三角形的底角相等也有循环论证的嫌疑。

生 (出示图7)那我们可以作$\angle BAC$的平分线,构造全等。

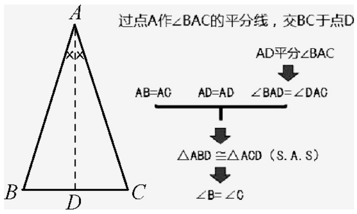

图7

生 (出示图8)作高也可以。

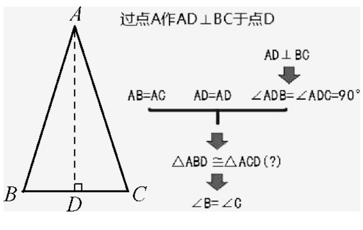

图8

师 作高后,要说明$\triangle ABD$和$\triangle ACD$全等,可以找到的条件从边和角的角度来看,其实是什么?

生 两边及其中一边的对角。

师　也就是“SSA”。这可是我们没有学过的全等三角形的判定方法哦！它正确吗？

（通过几何画板演示：两边及其中一边的对角对应相等的两个三角形 ABC 和 DEF 不一定全等，但是当 $\angle C$ 与 $\angle F$ 由原来的钝角、锐角变成相等的直角时，两个三角形是可以全等的。）

师　这是后续要学习的一种特殊的判定两个三角形全等的方法。

5.回顾反思，获取新知。

引导学生回顾“等边对等角”的说理过程，得出“等腰三角形三线合一”；结合前面的折叠操作，得到等腰三角形的轴对称性，强化实验感知与逻辑推理。

师　回顾刚才的说理过程，等腰三角形中，哪几条线段十分特殊，特殊在哪里？

生　高、中线、角平分线。

生　它们重合。

（教师通过几何画板演示从不等腰到等腰，三角形“三线”逐渐合一的过程，揭示特殊线段之间不变的位置关系。）

师　等腰三角形各有三条高、中线、角平分线，它们都重合吗？

生　是底边上的高、底边上的中线、顶角的平分线重合。

师　这样，我们就得到了等腰三角形的第二条性质：等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合，简称“等腰三角形的三线合一”。如何对这条性质进行说理？

生　在顶角平分线的条件下，可以利用全等三角形的性质说明顶角的平分线平分底边且垂直于底边，即顶角的平分线就是底边上的中线，也是底边上的高。而等腰三角形底边上的中线、底边上的高都只有一条，它们自然就都是顶角的平分线。

师　为什么底边上的中线、底边上的高都只有一条？

生　因为过两点有且只有一条直线；过一点有且只有一条直线垂直于已知直线。

师　等腰三角形的边、角、特殊线段的关系都是其局部的性质。从图形整体来看，它有怎样的特有性质？想想前面纸片的折叠。

生　等腰三角形是轴对称图形。

师　其对称轴是什么？有几条对称轴？

生　对称轴是顶角的平分线所在的直线，也就是底边上的中线或高所在的直线。有一条对称轴。

6.运用新知，解决问题。

介绍历史上水准仪的用途，让学生利用“等腰三角形三线合一”的性质解释水准仪的原理，呼应课堂引入，并让学生感受等腰三角形的性质在现实生活中的用处，提升学习动力。再让学生利用“等边对等角”的性质说明三角形全等的“SSS”判定方法，进一步表明“教材之前没有对‘SSS’判定方法进行说理，是因为当时还未学习‘等边对等角’，缺少说理的依据”。

师　大家还记得刚上课时看到的那个墓碑吗？我们不认识墓碑上刻着的名字，也不知道长眠于地下的人生前经历了怎样跌宕起伏的人生。但是，从墓碑顶上的等腰三角形和中间的铅垂线，我们可以猜测他生前是一位土地丈量员。在文艺复兴时期，这种工具也被广泛地应用着。（出示图 3）17 世纪意大利数学家博默多罗的《实用几何》一书中的一幅插图告诉我们，那个时代的测量员正是利用水准仪来测量山的高度的。你能用所学的知识，说明他们是如何测量山高的吗？

生　另做一个有长度刻度的铅垂线。先使铅垂线指向山脚最低处；调整水准仪，使其保持水平，且底边的一个端点贴住山上的某个点，另一个端点贴住铅垂线上的某个点；记录此时底边的一个端点贴住

的山上的那个点以及底边的另一个端点贴住的铅垂线的刻度(长度)。再使铅垂线指向刚才山上的那个点,重复之前的操作。不断重复这样的操作,直至底边的一个端点贴住的山上的那个点为山顶。最后将记录的铅垂线的刻度(长度)加在一起,就可以得到山的高度。

师 如何调整水准仪,使其保持水平?

生 当水准仪的铅垂线指向底边的中点时,底边为水平线。

师 为什么这一工具能判断是否为水平线呢?能否用所学的等腰三角形的性质来解释水准仪测水平线的合理性?

生 当铅垂线指向底边中点时,铅垂线与底边上的中线叠合,根据"等腰三角形三线合一",底边上的中线垂直与底边。

生 (补充)因为铅垂线与水平线是垂直的,这样就保证了与水准仪底部紧贴的线为水平线,从而保证了竖直方向的高度是准确的。

师 为什么铅垂线的长度加在一起,就可以得到山的高度?

生 铅垂线的长度是竖直方向的高度。

师 回答得非常棒!由于山的高度是竖直方向高度的累加,需要在斜坡上找到水平线作为每次测高的基准,因此我们要用到水准仪。这里还运用了图形平移的知识,将求山高的问题转化成了求若干竖直方向线段长的问题。

师 大家还记得前面说明"等边对等角"时,老师说过"'SSS'的说理需要用到等腰三角形的底角相等"吗?

(出示例题:在$\triangle ABC$与$\triangle DEF$中,已知$AB=DE$,$BC=EF$,$AC=DF$。试说明$\triangle ABC$与$\triangle DEF$全等的理由。)

师 本题是要说明"SSS"判定方法的合理性,因此不能使用"SSS"判定方法。而另外三种全等的判定方法("SAS""ASA""AAS")都与角有关,因此要找到一组对应角相等。怎么找呢?

生 利用"等边对等角"。

师 可是题目条件中相等的线段在分散的两个三角形中,怎么办呢?

生 通过图形的运动,将它们组合到一起。(出示图9)不妨设BC、EF分别是两个三角形的最长边,把两个三角形拼在一起,使边BC与EF重合,并使点A、D在公共边两侧,再联结AD;两次运用"等边对等角"说明$\angle EDF=\angle BAC$,再由"SAS"可得结果。

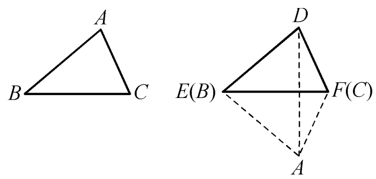

图9

(二)第二课时

1.另辟新径。

为了引出"等边对等角"的其他证明方法,从第一课时中"作顶角的平分线"出发,提示学生尝试作底角的平分线,使学生想到作两腰上的高和中线,进而引导学生想到截取相等线段。在此过程中,让学生发现共同点,感悟"特殊到一般""变中有不变"的思想。

师 上节课,为了说明等腰三角形的两个底角相等,我们利用等腰三角形的特殊线段,构造了两个全等三角形,使两个底角为它们的对应角。那么,有没有其他方法能对等腰三角形的两个底角相等进行说理呢?(学生思考。)

师 上节课,我们通过添加顶角的平分线,构造了两个全等三角形。那么,添加两个底角的平分线,能否构造所需的全等三角形?

生 我按老师的提示作了图,但是没有证明出来,感觉无处下手。

师 其实通过作底角的平分线，的确可以对“等边对等角”进行说理，但还需要作其他辅助线，用到一些同学们目前还没有学到的知识，暂时行不通。那么，能否考虑其他特殊线段呢？

生 （出示图10）我尝试了作两腰上的高，证法如下。

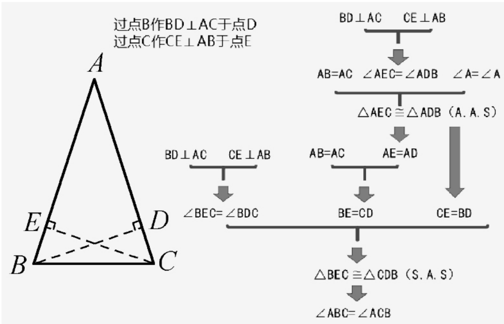

图 10

师 很好，上节课我们说过，为了避免循环说理，证明“等边对等角”时不能使用全等三角形的判定“SSS”，该同学在这里就没有使用 $BC=CB$ 这组公共边，利用“SSS”进行说理。此外，从结论出发，找需要的条件（分析法）受阻时，可以从条件出发，看能够得到哪些结论（综合法），对接已知与未知，这是解决数学问题的常用思考方式。（稍停）还有没有同学添加了其他的辅助线？

生 （出示图11）我尝试了作两腰上的中线，证法如下。

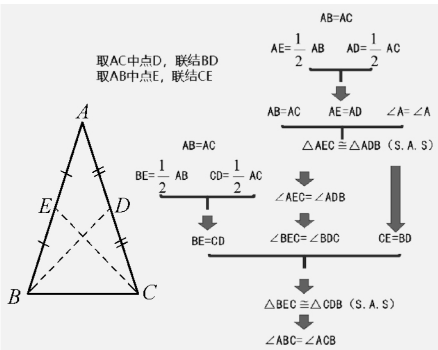

图 11

师 很好，为了避免循环说理，你也没有使用 $BC=CB$ 这组公共边。现在，请同学们思考一下：从辅助线的结构来看，这几种方法有无共同点？

生 都通过添加辅助线，构造了新的三角形；都无法通过一组全等，证得结果，需要借助另一组全等，得到等边或等角。

师 很好，我们都先证明了 $\triangle ABD$ 全等于 $\triangle ACE$，一种是通过作腰上的高，利用“AAS”；一种是通过作腰上的中线，利用“SAS”。请大家思考一下：要想用“SAS”证明全等，除了作腰上的中线，还有其他作辅助线的方法吗？

生 是不是可以直接在 AB、AC 上截取两条相等的线段？

师 很好，大家可以尝试一下，具体的证明方法跟前面的非常类似。

（学生尝试。）

师 （出示普罗克拉斯的证明方法：在 AB、AC 上分别截取 AE、AD，使得 $AE=AD$，分别联结 BD、CE……）这种方法正是古希腊数学家普罗克拉斯采用的方法。

2.化静为动。

引导学生以运动的视角来看待以上点 E、D 的选择，引出帕普斯和欧几里得的证明方法。

师 如果以运动的视角来看待点 E、D 的选择，上述情况只不过是点 E、D 在边 AB、AC 上移动时经过的几个特殊位置。当点 E、D 在边 AB、AC 上移动时，$\triangle AEC$ 始终全等于 $\triangle ADB$，因此 $\angle AEC$ 始终等于 $\angle ADB$。那么，试想一下：当点 E、D 运动到点 B、C 时，你能得出什么结论？

生 此时，点 E 与点 B 重合，点 D 与点 C 重合，$\angle AEC$ 仍然等于 $\angle ADB$，而且 $\angle AEC$ 就是 $\angle ABC$，$\angle ADB$ 就是 $\angle ACB$。

师　很好！这种方法正是古希腊数学家帕普斯的方法，即将等腰三角形看作两个三角形，用“SAS”说理。（稍停）刚才的若干种方法中，点 E、D 在两腰上移动。那么，同学们大胆猜想一下：点 E、D 还可以移动到哪儿？

生　能否让点 E、D 在两腰所在直线上运动呢？

师　好想法！那在 $AE=AD$ 的前提下，当点 E、D 运动到边 AB、AC 的延长线上时，你能否对“等边对等角”进行说理？

（学生得到欧几里得的证明方法。）

师　很好，这位同学的说理非常类似古希腊著名数学家欧几里得对“等边对等角”的说理。

（教师简单介绍欧几里得的生平和“驴桥定理”。）

3.课堂小结。

师　上节课，我们曾利用简单的方法，对“等边对等角”进行了说理，那么本节课，我们为什么还要“舍近求远”，跟随历史上几位著名数学家的脚步，对“等边对等角”进行多种不同方法的说理呢？

生　因为可以掌握更多的“等边对等角”的说理方法。

生　可以体会几何说理的严密性要求。

生　而且这些方法之间联系密切。

师　很好，老师希望同学们能通过“等边对等角”的其他证明方法，进一步熟练掌握全等三角形的判定与性质，提高对图形的解读能力，体会数学的严密性，学着用运动联系的眼光看待问题，感悟其中的变化统一，这在很多数学问题的解决过程中是非常重要的。此外，不知道同学们有没有注意到，教材对角平分线的尺规作图程序的说理用的是全等三角形的判定“SSS”？所以严格地说，对“等边对等角”的说理也不能用角平分线的尺规作图程序。

三、学生反馈

两节课后，我们都从收获、感受、疑惑、应用等维度对学生进行了问卷调查。

（一）第一课时后

91.3％的学生对等腰三角形的两条性质表示完全理解；65.2％的学生表示十分喜欢水准仪测量山高的环节，觉得很有趣；26.1％学生表示钦佩古人的智慧，对很久以前就有现在所学的知识感到很惊奇；17.4％的学生仍不理解为什么不能用“SSS”来证明“等边对等角”。

（二）第二课时后

绝大部分学生能理解用两次全等来证明“等边对等角”的若干种方法；34.8％的学生表示本节课的内容虽然在开始时难以理解，但是随着学习的深入，逐渐弄懂了；26.1％的学生表示本节课学习的过程虽然有些累，但是比较有趣，古代数学家们的故事很吸引人，自己要学习他们不断进取的精神；43.5％的学生提到原来“等边对等角”的说理有这么多不同的方法，感受到了说理方式的多样性；13％的学生提到思考的过程比结果更重要，能够锻炼自己的思维。

对于“类比欧几里得证明‘等边对等角’的方式，通过反向延长两腰的方式来证明‘等边对等角’”这一题目，61％的学生能完整地通过两次全等正确地进行说理；4 位学生在说理过程中出现了循环论证的错误；还有 4 位学生没有使用题目要求的方法，而采用了上课时呈现过的方法；个别学生仍提及为什么不能作底边上的中线（用“SSS”）来说理；1 位学生时间不够，没有作答。

四、教学反思

第一课时中，数学史料选取适切：古罗马墓碑中的数学元素体现了人文性，文艺复兴时期的水准仪测山高问题体现了趣味性，让

学生感受到了古人的智慧,激发了学习的兴趣。数学史料应用方式多元:水准仪测山高问题采用了顺应式,即依据史料提出问题;"SSS"的说理问题采用了复制式,即直接采用历史上的问题。数学史料融入自然:水准仪测山高问题的解决是以图形的平移为基础的,符合学生的认知顺序。数学史的教育价值深刻:类比"三角形性质"的学习历程,探究"等腰三角形性质"的过程体现了"知识之谐"与"探究之乐";通过添加辅助线将等角问题转化为全等问题体现了"方法之美"与"能力之助";古罗马墓碑中的数学元素以及说理过程中不断克服困难、打通思路的历程体现了"文化之魅"与"德育之效"。

第二课时中,数学史素材的选取体现了"方法之美":从第一课时中"添加顶角的平分线"出发,自然引入"添加不同的辅助线",复制式及顺应式地融入了历史中不同的"等边对等角"的证明方法;用运动的观点串联这些证明方法,体现了"特殊到一般""变中有不变"的思想方法。数学史素材的选取体现了"德育之效":站在巨人的肩膀上,将古代数学家们零散、孤立的证明方法融会贯通,一方面可以让学生感受数学家们不满足于某一种方法,不断追求的进取精神,另一方面也揭示了"数学是一门动态的、演进性的学科,而非一潭死水;只要深入探索,都会有所创新"的本质。

当然,在上述教学过程和学生反馈中,我们也发现,对于还未明确认识何为证明、何为几何公理体系的七年级学生而言,理解说理的环环相扣以及循环论证尚存在困难,不能一蹴而就,需要在今后的几何证明教学中不断渗透,加深理解。因此,教材也是考虑到学生的认知水平不足以理解公理化思想,才采用添加顶角平分线的方法来证明"等边对等角"的。但是为了逐渐提升学生的逻辑推理能力,教师还是要把握好每一个合适的教学切入点,不断强化学生的公理化意识。

---

*本文系本刊连载的汪晓勤教授团队开发的 HPM 案例之一,也系华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

参考文献:

[1] 佟胜海."等腰三角形"教学设计及评析[J].教育实践与研究(B),2010(6).

[2] 卓敏亚.基于"过程教育"的教学探索及反思——以"等腰三角形的性质定理(第1课时)"为例[J].中学数学(初中版),2014(8).

[3] 魏晓丽,王冰."等腰三角形的性质"教学设计及点评[J].中国数学教育,2013(Z3).

[4] 张维强."等腰三角形性质"教学的再发现——"同课异构"课题研究之反思[J].中小学数学(中学版),2011(10).

[5] 林晴岚,杨勤春.基于中学数学课堂教学中例题"有效"设计的实践研究——以人教版《等腰三角形性质(第一课时)》为例[J].福建教育学院学报,2014(2).

[6]【古希腊】欧几里得.几何原本[M].兰纪正,朱恩宽译.西安:陕西科学技术出版社,2003.

[7] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's elements*[M]. Cambridge: The University Press,1968.

[8] 吴文俊.世界著名科学家传记·数学家 II[M].北京:科学出版社,1992.

[9] 陈霄剑.学生为什么这么快就知道添加辅助线[J].中小学数学(中学版),2014(10).

[10] 张奠宙,过伯祥,方均斌,龙开奋.数学方法论稿[M].上海:上海教育出版社,2012.

[11] Schreiber, P. Art and architecture[A]. In: Grattan-Guinness, I. (Ed.). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*. London: Routledge,1994.

[12] 汪晓勤.数学文化透视[M].上海:上海科学技术出版社,2013.