美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题

周天婷　汪晓勤　（华东师范大学教师教育学院　200062）
沈中宇　（华东师范大学数学科学学院　200241）

1　引言

早期的三角学是作为天文学的一部分而出现的.在古希腊人看来，圆是最完美的平面图形，而球是最完美的立体，天体都是球形的，天体的运动都是沿着圆形轨道作匀速圆周运动.因而早期的三角学一直是球面三角学，而且研究球面三角学的目的是解决天文学上的问题.当时的天文学家只关注“量天的学问”，并不关注“量地的学问”.后来由于间接测量、测绘工作的需要才出现了平面三角.直到 16 世纪，三角学才从天文学中分离出来，成为数学的一个独立分支[1].三角学的英文是 trigonometry，由 trianguium（三角形）和 metricus（测量）两个单词拼合而成，即三角学也是一门测量之学.但如今，人们更多地将其作为一门抽象的学科，与测量的联系甚少.事实上，《普通高中数学课程标准（2017 年版）》（下称《课标》）就要求掌握余弦定理、正弦定理；能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.在人教版、沪教版等高中教科书中，解三角形这一章的最后一节都是以有关解三角形的实际应用而收尾.解三角形的高考题也大多是带有实际背景的应用题，要求学生利用所学的解三角形的相关知识去解决实际问题.

《课标》提出了培养学生核心素养的要求，而解三角形的实际应用问题可以在问题解决的过程中培养学生的数学建模、数学抽象、数据分析、数学运算等数学核心素养.翻阅美英早期三角学教科书，三角学是和测量紧密结合在一起的，例如测量物体的高度、不可直接测量的两个点之间的距离、一块土地的面积、航海问题等等.此特点在早期三角学教科书的练习中体现得非常明显.

本文研究美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题，试图回答以下问题：早期三角学教科书中有关高度的应用问题有哪些类型？这些问题有哪些特点？

2　研究对象

笔者选取的是 1700—1899 年出版的 80 种美英三角学教科书，若以二十年为一段，则各教科书的时间分布情况如图 1 所示.

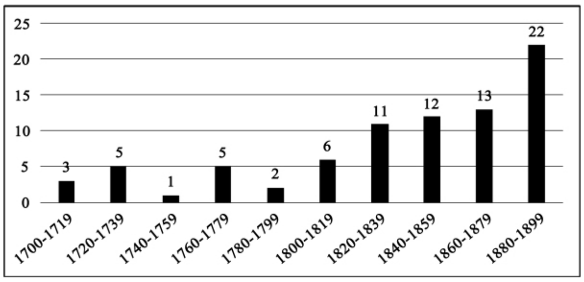

图 1

有关高度测量的实际应用题目所在的章节大致在“高度和距离”“解三角形的应用”“解直角三角形”“解斜三角形”4 类.由于解三角形的实际应用价值，早期教科书往往会将“高度和距离” 放为单独一章节供学生学习.

3　有关高度问题的分类

3.1　构建一个三角形

构建一个三角形来解决实际问题的应用是最简单的，主要分为三种类型.

类型一为直接通过解直角三角形来求物体（塔、石碑、山、树、云、气球等）的高度.典型的问题是：

问题 1　如图 2，先测量 $\angle C$，假设其为 $52°30'$；再测量距离 AC，假设为 85 英尺，求塔 AB 的高度.[2]

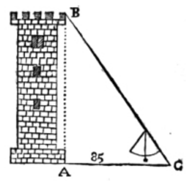

图 2

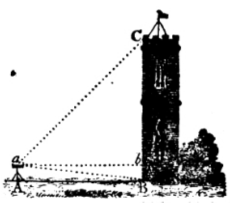

图 3

类似的问题是已知高 AB，求距离 AC 的问题.在实践中，很难直接从地面测量角度，因此，也

有一些教科书将测角仪的高度考虑在内[3]，如图 3 所示.当然也有一些教科书直接从实际情境中抽象出直角三角形作为插图[4].

类型二为通过解斜三角形来求高度.典型的问题是：

问题 2 如图 4，一个高为 160.43 英尺的塔坐落在一座小山丘上，在距离塔底 B 600 英尺(即 AB 的长度)的山脚测量塔顶的仰角(即 $\angle CAB$)为 $8°40'$.求点 A 到塔顶的距离(即 AC)以及小山丘的坡度(即 $\angle BAD$).[5]

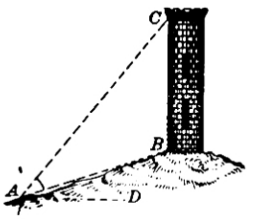

图 4

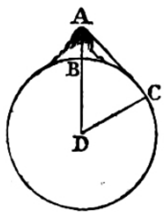

图 5

也有教科书直接将实际情境抽象出几何图形[6].这种情形本文不再一一呈现.

类型三为与圆有关的测高问题.典型的问题是：

问题 3 如图 5，假设特纳利夫岛高 AB 为 2 英里，地球半径为 3 979 英里，求从海上一点 C 处到特纳利夫岛顶 A 处的距离，即求 AC 的距离.[7]

3.2 构建两个三角形

现实情境中，由于河流、灌木丛、沼泽地等的阻隔，测量地与建筑物之间的距离无法直接测得.此时，构建一个三角形已不足以求得建筑物的高度，于是人们想到了构建两个三角形来求高度.在早期三角学教科书中，这种情形大致分为五类.

类型一为在水平面上作一根基线，构建两个三角形.典型的问题是：

问题 4 如图 6，欲知塔高，但塔的一边有一些树木，另一边的土地凹凸不平，因此，在点 D 处测得 $\angle CDB = 51°30'$，又测得 $AD = 75$ 英尺.在点 A 处测得 $\angle CAB = 26°30'$，求塔高.[3]

一些教科书还会考虑测角仪的高度.还有反过来设问，即已知塔高，求 AD.另外，还有一类典型问题如下：

问题 5 如图 7，已知塔高，两个观察点 A，B 在同一竖直平面内，从 A，B 出分别观察船上的点

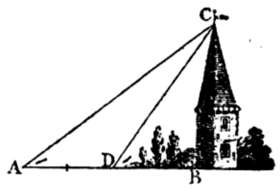

图 6

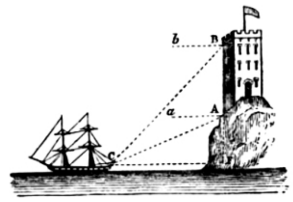

图 7

C，测得俯角 $\angle aAC$ 和 $\angle bBC$，求船离岸边的距离.[8]

若将图 7 横过来看，其实与上述塔高问题如出一辙.

类型二为在竖直平面上作一根基线构建两个三角形.典型的问题是：

问题 6 如图 8，从一扇离房屋底部很近的窗户 A 看一个教堂的顶部，测得仰角 $\angle CAD = 40°21'$，从另一扇在窗户 A 竖直上方距离 20 英尺的窗户 B 看这个教堂的顶部，测得仰角 $\angle CBE = 37°36'$，求教堂的高度.[7]

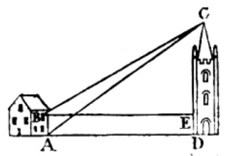

图 8

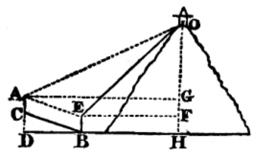

图 9

19 世纪末，有教科书将其抽象成几何图形[9].还有一些问题，如已知高塔的高度求低塔的高度或柱高，也是大同小异.

类型三为在同一平面内任意角度作一条基线，构建两个三角形.典型的问题是：

问题 7 如图 9，物体 O 放置在山顶，从基地 B 开始在斜坡上测量基线 BC 为 130 码，在 B 处竖直放置一根棒 BE，其长度与测角仪 AC 的长度均为 1 码.在基地 A 处测得仰角 $\angle OAG = 27°10'$，俯角 $\angle GAE = 8°45'$，在基地 B 处测得仰角 $\angle OEF = 39°40'$.求山高 OH.[7]

类型四为在不同平面内作一条基线，构建两个三角形构成立体图形.典型的问题是：

问题 8 如图 10，物体 B 在山顶上，想知道 BC 的高度.现在假设不方便测量水平基线，于是在任意方向作了一根基线 AB' 并测量，接着测量

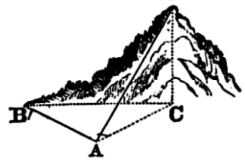

图 10

$\angle CB'A$，$\angle CAB'$，$\angle BAC$.求山高.[10]

也有教科书直接将实际情境抽象成几何图形，发现可以通过测量不同角度来解决问题[11]，如图 11 所示.可以先测量底面的三角形的两个角，再测量任意一个竖直的三角形在地面的仰角，抑或是如图 12 所示，先测量地面基线与顶点所构成的三角形的两个角，再与前一种方法一样测量任意一个竖直的三角形在地面的仰角即可[12].

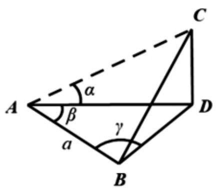

图 11

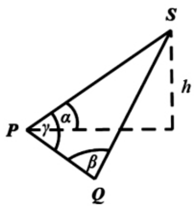

图 12

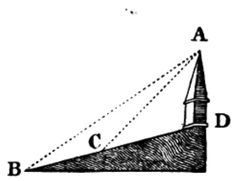

图 13

类型五为物体在斜坡上，无法直接通过一个直角三角形来求高度，故构造两个三角形来求解.典型问题是：

问题 9　如图 13，欲知斜坡上的方尖碑的高度，从其底部测量 CD 距离为 40 英尺，在点 C 测得仰角 $\angle ACD=41°$，沿着直线 DC 继续测量 CB $=60$ 英尺，在点 B 点测得仰角 $\angle ABD=23°45'$，求方尖碑的高度.[13]

3.3　构建三个三角形

当水平面上的人要测量坐落于一座山上的物体高度时，构建两个三角形已经不足以计算出物体的高度，此时需要构建三个三角形来解决问题，还有其他类型的问题也需要构建三个三角形.在美英早期三角学教科书中大致分为五类.

类型一为测量坐落于一座山上的物体的高度，而且在山的一边有空地便于测量.典型的问题是：

问题 10　如图 14，塔 CF 坐落在一座小山上，观察者在点 D 测量仰角 $\angle CDB$，$\angle FDB$，在位于 BD 延长线上的点 A 测量仰角 $\angle CAB$，并测量距离 AD，求塔高.[14]

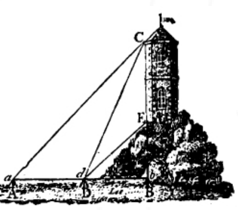

图 14

类型二为在类型一的基础上，山的一侧为斜坡，因而无法确定水平基线.典型的问题是：

问题 11　如图 15，AB 为坐落在一座小山上的塔，观察者在一个斜坡 CE 上.在点 C 观察塔的顶部和底部，测得仰角 $\angle ACP$ 和 $\angle BCP$.在斜坡上测量直线段 EC 的距离，并在点 E 测得仰角 $\angle AEL$ 和俯角 $\angle LEC$.求塔 AB 的高度.[14]

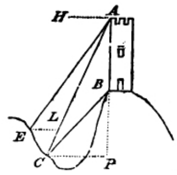

图 15

类型三为在类型二的基础上，斜坡上无法测得与塔在同一平面上的基线，因此可以在不同平面构成立体图形求解.典型的问题是：

问题 12　如图 16，柱子 AB 竖直放置在山顶，BC 为坐落在水平面上的小山，在水平面作一根基线 $DE=380$ 英尺，并测得 $\angle ADC=59°$，$\angle ADB=26°$，$\angle ADE=70°20'$，$\angle EDC=65°30'$.求柱高.[6]

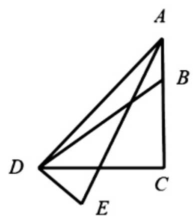

图 16

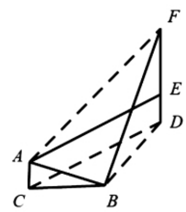

图 17

类型四为在斜坡上构造三个三角形形成立体图形以求高度的问题.典型的问题是：

问题 13　如图 17，欲知杆 FD 的高度，测得基线 $AB=250$ 英尺，点 A 比点 B 高出 12 英尺，即 $AC=12$ 英尺.BC 和 BD 均为水平线，在点 B 测得仰角 $\angle DBF=12°24'$，在水平面上，测得 $\angle DBC$ $=35°15'$ 以及 $\angle DCB=27°51'$.求杆 FD 的高度.[15]

类型五为有关两个建筑物高度的问题.典型的问题是：

问题 14　如图 18，点 A，B，C 位于同一水平面上，在点 C 处向两座塔的顶部测得 $\angle ECD=58°20'$，两座塔的高度分别为 $DA=169$ 英尺，$EB=$

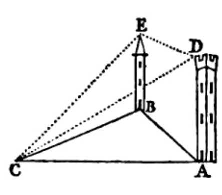

图 18

213 英尺，在点 C 处的仰角分别为 $\angle DCA = 3°18'$，$\angle ECD = 4°21'$.求 CA，CB 和 AB.[7]

3.4 构建三个以上的三角形

构建三个及以上三角形在早期教科书中很少见到.通过在地面作一根基线，再测量基线的两个端点以及基线上一点对所测物体的仰角来计算物体高度的问题十分典型，如：

问题 15 如图 19，在 1784 年的布莱克希思有一个卢纳迪热气球，为了测量这个热气球的高度，在地上测量了一根长为 1 英里的基线 BC，在点 B 测量这个热气球的仰角为 $\angle OBA = 46°10'$，在点 C 测量这个热气球的仰角为 $\angle OCA = 54°30'$，在基线 BC 上一点 P 测量这个热气球的仰角为 $\angle OPA = 55°8'$.求这个热气球的高度 OA.[16]

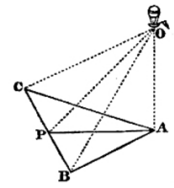

图 19

一些教科书还讨论了当点 P 取为基线中点时的情况[17].

4 特点分析

4.1 从简单到复杂

美英早期三角学教科书中，解三角形的应用问题都是从最简单的问题开始逐步加深难度，几乎都是以构建一个直角三角形就可以解决的类型，即类似于问题 1 这样的问题，来开启一章的内容.当建筑物周围有小树丛或河流等障碍时，测量者到建筑物底部的距离无法直接测得，或建筑物矗立在斜坡上等情况，都需要构建两个三角形去解决，如问题 4 和问题 9.当物体坐落在山上或其他高地而测量者位于水平地面上时，构建两个三角形已不足以求出物体的高度了，于是构建三个三角形去解决问题，如问题 10 和问题 11.随着现实中的问题越来越复杂，为了解决问题所构建的三角形个数逐步增加，对学生的要求也在一步步加大.

4.2 从平面到立体

从构建两个三角形去解决高度测量问题的前四种情形中，我们可以发现，如果要从同一个平面内去解决问题，那么可以在水平面上作一根基线(如问题 4)，若是水平面上作基线不太方便，也可以在竖直平面上做一根基线(如问题 6)，若测量者位于斜坡上，那也可以在同一平面内以任意一个角度作一条基线，构建三角形解决相关问题(如问题 7).对于同一平面这样一个要求在实际测量过程中比较困难，而任意作一根基线并测出它的距离还是易于做到的，这也就是类型四对相关问题的解法(问题 8).虽然在思维容量和计算上更复杂一些，但对于测量的要求却大大降低.当然，构建三个三角形中的前三个类型即问题 10～12，其本质就是构建两个三角形问题的推广，因此，从构建平面图形到构建立体图形也是自然而然的事情了.

4.3 从具体到抽象

现在的人教版和沪教版的教科书上对于实际应用问题都是非常具体的，而美英早期三角学教科书主要是 19 世纪中后期，除了具体实际问题之外，也会将其抽象出模型来直接告知边的长度和角的大小，让学生计算边长或角度.其实，抽象出模型也有利于培养学生的数学建模核心素养，而一个模型也可以用于很多类型的问题.如问题 4 与问题 5，当从具体问题抽象出模型之后，可以发现这两个问题只是扭转了一个角度而已，其本质是一样的.再如问题 6 抽象出来的模型可以运用于其他求高度的问题，也有利于培养学生将具体问题转化为已知模型的能力.

5 结论与启示

美英早期三角学教科书中，几乎每一种都有解三角形的实际应用问题，从侧面证实“三角学”也是“测量之学”.而从实际问题出发，让学生通过阅读题目，构建三角形，抽象成已知一些边角的值去求所需的边角的解三角形问题，提高学生解决实际问题的能力的同时，也培养了学生数学建模、数学抽象、直观想象等数学核心素养.当然，抽象成解三角形的问题之后，也需要学生进行思考、计算.如问题 14 在测得基线长度、基线上在端点处的仰角以及基线上的中点或任意一点处的仰角后去计算热气球的高度，这并非易事.需要利用热气球的高度来表示出基线上测得仰角的三点到热气球的竖直下方的距离，再利用水平面上两个三角形的内角互补、余弦值互为相反数的特点，通过余弦定理用边进行表示，再代入计算，才能得到最终结果.解决问题的过程中总共构建了五个三角形，不仅需要思考如何解三角形，还需要比较复杂的运算，解决问题的同时培养学生数据分析和数学运算等数学核心素养.

再从有关高度测量的问题来看，与高度有关的测量问题远不止现行教科书中所呈现的少数几种情况.以沪教版高一年级第二学期第五章第六节解斜三角形为例，教科书中提及高度测量的问题有"例 9：如图 20 所示，在金茂大厦底部同一水平线上的 B 处和 C 处分别测得金茂大厦顶部 A 的仰角，并知道 BC 之间的距离，求金茂大厦的高度."与本文中的问题 4 如出一辙.还在练习 5.6(4) 中提及"大楼的顶上有一座电视塔的高度已知，在地面某处测得塔顶和塔底的仰角，求此大楼的高度."这一问题与本文中的问题 5 基本一致.在整个解三角形的应用中，高度测量问题有如上所述的一道例题与一道练习.

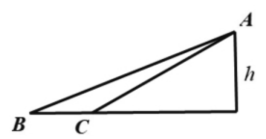

图 20

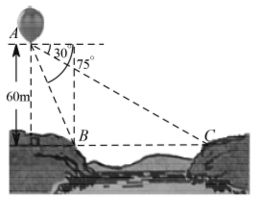

图 21

在课堂上，教师可以让学生去发挥他们的聪明才智，思考如何测量某物体的高度、在测量过程中会遇到哪些阻碍、可以通过怎样的测量去解决可能会发生的实际问题，根据现实条件可以调整测量的方法去解决所遇到的阻碍，即构造不同形状和个数的三角形去解决.从美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题的类型来看，在实际生活中可能会遇到阻碍的高度测量问题基本都有所涉及；以这些问题的特点来看，从简单到复杂、从平面到立体、从具体到抽象、从构造一个三角形到构造三个或以上的三角形去解决相关问题的这样一个过程，非常符合学生的认知规律.

在编制练习题、试卷的过程中，美英早期教科书给我们提供了很多很好的思路.例如 2014 年四川高考题"如图 21 所示，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B，C 的俯角分别为 $75°$，$30°$，此时气球的高是 60 cm，则河流的宽度 BC 为多少？"与问题 4 所抽象出的模型的推广"已知高度求距离"大同小异.因而在编制练习题、试卷的过程中，美英早期教科书也给了我们提供了很多实际问题的素材.

参考文献

[1] 徐章韬.三角学历史发展中认识视角的变迁及其教育意蕴[J].数学教学，2010(04)：29-30；36.

[2] Hawney W.The Doctrine of Plane & Spherical Trigonometry[M].London：J.Darby et al.，1725：224.

[3] Keith T.An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry[M].London：T. Davison，1810：71-72.

[4] Twisden J F.Plane Trigonometry，Mensuration & Spherical Trigonometry[M].London：Richard Griffin & Co.，1860：367.

[5] Crockett C W.Elements of Plane & Spherical Trigonometry[M].New York：American Book Company，1896：112.

[6] Griffin W N.The Elements of Algebra and Trigonometry[M].London：Longmans，Green & Co.，1875：281，295.

[7] Bonnycastle J.A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry[M].London：Cadell & Davies et al.，1818：57，68，72.

[8] Galbraith J A.Manual of Plane Trigonometry[M].London：Cassell，Petter & Galpin，1863：80.

[9] Hobson E W，Jessop C M.An Elementary Treatise on Plane Trigonometry[M].Cambridge：The University Press，1896：190.

[10] Greeanleaf B.Elements of Plane & Spherical Trigonometry[M].Boston：Robert S.Davis & Co.，1876：62.

[11] Bowser E A.Elements of Plane & Spherical Trigonometry[M].Boston：D.C.Heath & Co.，1892：99.

[12] Nixon R C J.Elementary Plane Trigonometry[M].Oxford：The Clarendon Press，1892：287.

[13] Nichols F.A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry[M].Philadelphia：F.Nichols，1811：44.

[14] Peirce B.An Elementary Treatise on Plane Trigonometry[M].Cambridge & Boston：James Munroe & Co.，1835：54.

[15] Wood D V.Trigonometry，Analytical，Plane & Spherical[M].New York：John Wiley & Sons，1885：79.

[16] Hann J.The Elements of Plane Trigonometry[M].London：John Weale，1854：96.

[17] Hackley C W.A Treatise on Trigonometry，Plane & Spherical[M].New York：George P.Putnam，1852：110.