上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2013 年第 2 卷第 2 期

莱昂哈德·欧拉

(Leonard Euler, 1707–1783)

刊首语

在各位作者和编委会的共同努力下，《上海HPM通讯》第2卷第2期与大家见面了。

本期的封面人物是莱昂哈德·欧拉，十八世纪最杰出的数学家之一。

欧拉于1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔，1783年9月18日于俄国彼得堡去世，一生大部分时间在俄国和普鲁士度过。

欧拉是科学史上最多产的一位数学家，据不完全统计，他共写下了886本书籍和论文，其中分析、代数、数论占40%，几何占18%，物理和力学占28%，天文学占11%，弹道学、航海学、建筑学等占3%，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了47年。欧拉著作的惊人多产并不是偶然的，他那顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神，使他在双目失明以后也没有停止对数学的研究，在失明后的17年间，他还口述了几本书和400篇左右的论文。

欧拉所从事的数学研究工作几乎遍布了数学的每一个领域，因此在很多数学领域中都可以看到欧拉的名字：初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，空间解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数，微分方程中的欧拉方程，变分学中的欧拉方程，级数中的欧拉常数，复变函数的欧拉公式等等。欧拉还引入了G 函数和B 函数，证明了椭圆积分的加法定理，最早引入二重积分等等。他对数学分析的贡献独具匠心，《无穷小分析引论》一书便是他划时代的代表作，当时数学家们称他为"分析学的化身"。欧拉最大的功绩是扩展了微积分的领域，为微分几何及分析学的一些重要分支，如无穷级数、微分方程等的产生与发展奠定了基础。

欧拉还创设了许多数学符号，比如 $f(x)$（1734年），π（1736年），i（1777年），e（1748年），sin和cos（1748年），tg（1753年），△x（1755年），Σ（1755年），等等。

纵观历史长河，能跟欧拉媲美的数学家的确不多，也有历史学家把欧拉和阿基米德、牛顿、高斯列为有史以来贡献最大的四位数学家，依据是他们都有一个共同点，就是在创建纯粹理论的同时，还应用这些数学工具去解决大量天文、物理和力学等方面的实际问题，他们的工作是跨学科的，不断地从实践中吸取丰富的营养但又不满足于具体问题的解决，而是把宇宙看作是一个有机的整体，力图揭示它的奥秘和内在规律。

读读欧拉，读读欧拉，他是我们所有人的大师。(拉普拉斯斯, P. S. Laplace, 1749- 1827)

目　录

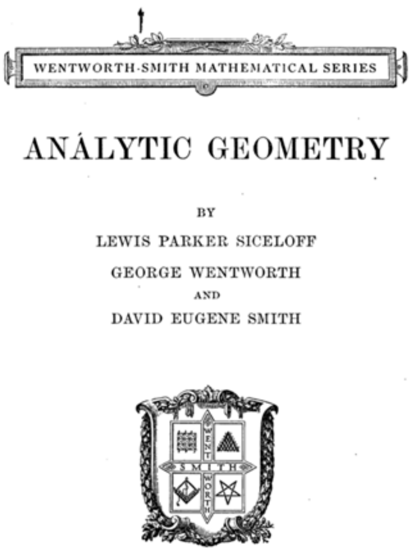
CONTENT

法国初中数学教材中的数学史

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

数学教材中运用数学史，有着悠久的历史。早在 19-20 世纪之交，美国数学教育家、ICMI 创始人之一史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）在其数学教材和数学教师培训教材中即大量运用数学史，如他参编的《解析几何》（图 1）介绍解析几何的历史[1]，《立体几何》介绍几何学的历史[2]，但早期数学教材中的数学史是以附录形式出现的。随着人们对数学史与数学教育关系认识的加深以及数学史、数学教育研究的不断进步，数学史在教材中的呈现方式已经发生了很大的变化。



WENTWORTH-SMITH MATHEMATICAL SERIES

ANALYTIC GEOMETRY

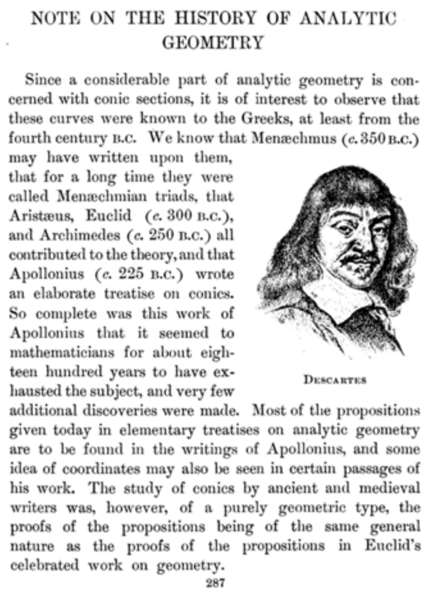
BY

LEWIS PARKER SICELOFF

GEORGE WENTWORTH

AND

DAVID EUGENE SMITH



NOTE ON THE HISTORY OF ANALYTIC GEOMETRY

Since a considerable part of analytic geometry is concerned with conic sections, it is of interest to observe that these curves were known to the Greeks, at least from the fourth century B.C. We know that Menæchmus (c. 350 B.C.) may have written upon them, that for a long time they were called Menæchmian triads, that Aristæus, Euclid (c. 300 B.C.), and Archimedes (c. 250 B.C.) all contributed to the theory, and that Apollonius (c. 225 B.C.) wrote an elaborate treatise on conics. So complete was this work of Apollonius that it seemed to mathematicians for about eighteen hundred years to have exhausted the subject, and very few additional discoveries were made. Most of the propositions given today in elementary treatises on analytic geometry are to be found in the writings of Apollonius, and some idea of coordinates may also be seen in certain passages of his work. The study of conics by ancient and medieval writers was, however, of a purely geometric type, the proofs of the propositions being of the same general nature as the proofs of the propositions in Euclid's celebrated work on geometry.

DESCARTES

287

图 1　《解析几何》中的数学史

Tzanakis 和 Arcavi 总结了数学史在数学教学中的三种运用方式：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识。[3]而 Jankvist 则提出另三种方式：启发法、模块法和基于历史法[4]。这些分类法针对的是数学课堂教学，而对数学教材的历史分析不尽合适，且过于粗略。借鉴已有的分类方法，我们按数学史与数学知识的关联程度，将数学教材运用数学史的方式分成五类，见表 1。

表 1　数学教材运用数学史的五种方式

类 别	描　述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
点缀式	孤立的图片，如数学家画像、数学图案、反映数学主题的绘画或摄影作品等	直接运用法	启发法
附加式	文字阅读材料，包括数学家生平、数学概念、符号、思想的起源、历史上的数学问题、思想方法等	直接运用法	启发法
复制式	正文各栏目中直接采用历史上的数学问题、问题解法、定理证法等	直接运用法	启发法
顺应式	正文各栏目中对历史上数学问题进行改编，使之具有适合于今日课堂教学的情境或属性	—	—
重构式	正文各栏目中借鉴或重构知识的发生、发展历史，以发生法来呈现知识	间接运用法	基于历史法

按表 1 所列的五种方式，我们对法国初中数学教材 Maths 3-6[5]中的数学史进行考察。

1 点缀式

点缀式数学史材料主要出现于各章的章头。《数学 5》（初二）“分数运算”章的章头给出一幅分形图——科赫雪花曲线，其面积和周长计算均涉及分数运算。在科赫雪花的右边，给出了曲线形成的过程。

由于分数运算在古埃及数学中占有重要地位，《数学 4》（初三）“分数运算”一章的章头给出一幅约公元前 1400-1390 的古埃及祭司画像（图 2）。

《数学 3》（初四）“乘法公式与零积方程”一章的章头给出了法国当代著名数学家、菲尔兹将得主阿兰·康尼斯（Alain Connes）及其代数手稿的图片，说明字母符号运算在数学上的重要性。同册“毕达哥拉斯定理”一章的章头给出了 16 世纪意大利画家拉斐尔（Raphael, 1483-1520）的名作《雅典学派》的一部分，画中的毕达哥拉斯正在展卷阅读（图 3）。同册“泰勒斯定理及其逆定理、放大与缩小”一章主要介绍相似三角形性质及其应用。历史上，“相似三角形对应边成比例”这一性质主要用于远距离测量，许多测量仪器均利用了这一性

质。本章章头给出16世纪末的一幅德国版画——“几何学家在测量”（1594），画上生动描

图2 古埃及祭司

图 3 毕达哥拉斯

绘了16世纪几何学家利用象限仪等工具进行测量（建筑物高度、井深、天体位置等）的场景（图4）。

图4 几何学家在测量

点缀式数学史材料与正文内容的关联在于：或引出相关主题，或反映相关主题的历史，或反映相关主题的实际用途，但与正文内容并没有直接的依存关系，删除这些材料，对正文没有影响。事实上，其最大的功能在于“装饰”，故名“点缀式”。

2 附加式

附加式数学史材料主要出现在章头、习题和章末阅读材料中。表2给出了《数学4》和《数学3》部分章头的数学史例子。

表 2　部分章头附加式数学史料

册次	章名	数学史
4	正负数的运算	中国人早在公元前 200 年就用红色算筹表示正数，黑色算筹表示负数；印度婆罗摩笈多（约 598-660）用负数表示债务；阿拉伯阿布 • 瓦法（Abu'l-Wafa, 940-998）给出正负数的乘法运算
4	分数运算	古埃及象形文中单位分数的表示方法、非单位分数的拆分、莱因德纸草书上的分子为 2 的分数拆分表
4	字母运算	高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）求$1+2+3+\cdots+100$的方法；韦达（F. Viète, 1540-1603）的字母算术
4	不等式、序与运算	符号“>”、“<”、“+”、“−”、“×”、“÷”、“=”的历史；阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）求圆周率的方法及结果：$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$
4	勾股定理	古巴比伦泥版上的勾股定理、伯里加尔（H. Perigal, 1801-1898）、伽菲尔德（J. A. Garfield, 1831-1881）与勾股定理
4	中位线与平行线	泰勒斯（Thales, 前 6 世纪）测量金字塔的高度
4	直角三角形与锐角的余弦	阿尔·巴塔尼（al-Battani, 850-929）和阿布·瓦法计算和制作最早的余弦表；韦达出版第一部真正意义上的三角学著作
3	方程与不等式、二元一次方程组	罗伯瓦尔（Roberval, 1602-1675）发明天平；字母表示未知数的历史：从花拉子米（Al-Khwarizmi, 780?-850?）的“物”到今天的 x
3	平方根	无理数的起源、斐波纳契与斐波纳契数列
3	乘法公式与零积方程	13 世纪法国艺术家和建筑师维拉尔 •德 •霍内科特（Villard de Honnecourt）羊皮书中的设计作品——两个同心正方形，其中大正方形是小正方形的两倍。
3	直角三角形与三角关系	18 世纪法国《大百科全书》中对“三角学”一词的定义
3	球	阿基米德证明球及其外切圆柱体积之间的关系；18 世纪卡西尼家族重新测绘法国地图

有大量阅读材料出现在某道习题之后，冠以标题“你知道吗”，或出现在习题栏目最后，冠以标题“供好奇者阅读”。

《数学 6》“小数”一章习题栏目介绍古埃及象形文记数法。“欧几里得除法与小数除法”一章介绍 17 世纪法国数学家勒・金德（F. Le Gendre）《完美算术》中的除法；“分数”一章介绍从公元前 3000 年的美索不达米亚到 15 世纪阿拉伯的分数历史；“角”一章介绍角度制的起源；“特殊三角形与正方形”一章介绍谢尔宾斯基正方形和三角形（图 5）；“周长与面积”一章介绍中国古代的七巧板。

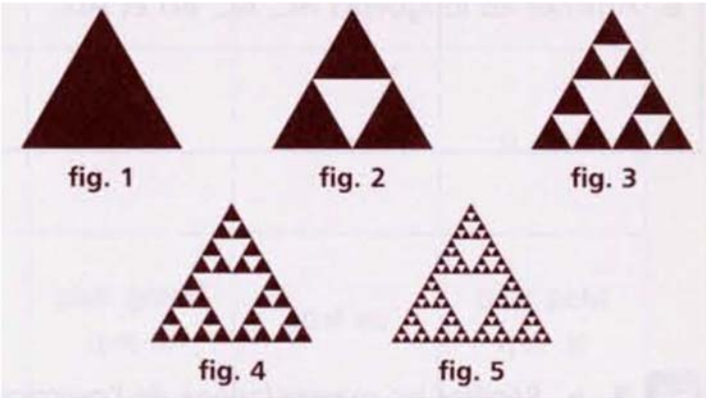


图 5 谢尔宾斯基三角形

《数学 4》“分数运算”一章的一道习题要求在空格处填入适当的分数（图 6），使每行每列以及每条对角线之和相等。之后介绍幻方历史知识，涉及丢勒（A. Dürer, 1471-1528）作品《忧郁 I》中的四阶幻方（图 7）以及中国的九宫图（图 8）。

	$\frac{1}{4}$	
	$-\frac{7}{4}$	
	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{11}{4}$

图 6 分数幻方

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 7 丢勒幻方

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 8 洛书

《数学 3》“方程、不等式与二元一次方程组”一章在习题栏目的最后，附加了著名的叙拉古皇冠问题（图 9）：公元前 3 世纪，叙拉古国王希伦让金匠铸造皇冠，出金 800 克。皇冠铸好后，为确定金匠是否在其中掺银，希伦让阿基米德测定皇冠中金银的成分。阿基米德将皇冠浸入水中，测得被排开的水的体积为 50ml。已知每 cm^3 金重 19.3 克，每 cm^3 银重 10.5 克，用 V 表示皇冠中黄金的实际体积，V’表示皇冠中白银的实际体积，引导学生列出关于 V 和 V’的二元一次方程组。

图 9　阿基米德在浴缸中

同册“乘法公式与零积方程”一章的习题栏目最后，附加了毕达哥拉斯数问题，涉及普林普顿 322 号泥版上的 15 组毕达哥拉斯数所满足的公式和欧几里得的一般公式 $\left(k\left(n^2+m^2\right), 2knm, k\left(n^2-m^2\right)\right)$，其中 n 和 m 为正整数，$n>m$。“不等式、序与运算”一章的末尾给出求 $\sqrt{2}$ 近似值的海伦（Heron, 公元 1 世纪）算法。

附加式数学史材料的功能是：追溯有关主题的历史，为有关主题做铺垫；介绍有关问题的历史背景；或直接提供历史上的数学名题。但这些材料主要为学有余力者、有好奇心者提供探究机会，不属于教材的正文，故名“附加式”。

3 复制式

复制式数学史料主要出现在活动和习题栏目中。

《数学 5》各章习题栏目最后设有“发现”板块，板块中的不少问题均为数学史问题。“正负数”一章的“发现”板块介绍了负数的历史，指出世界上最早使用负数的是中国人，而在 17 世纪的西方，笛卡儿仍然不接受负数，并将其看作“小于一无所有的数”；之后给出直角坐标系，让学生探讨各象限中点的坐标的符号。“正负数加减”一章介绍印度数学家婆罗摩笈多在《婆罗门修正体系》中所提出的有关零的运算法则，让学生举例加以说明；“中心对称”章介绍法国式花园的历史，让学生判断 17 世纪法国建筑师洛利斯（D. Loris）《世界花圃大全》中的六幅作品（图 10）的对称性并寻找对称轴或对称中心；“平行四边形”一

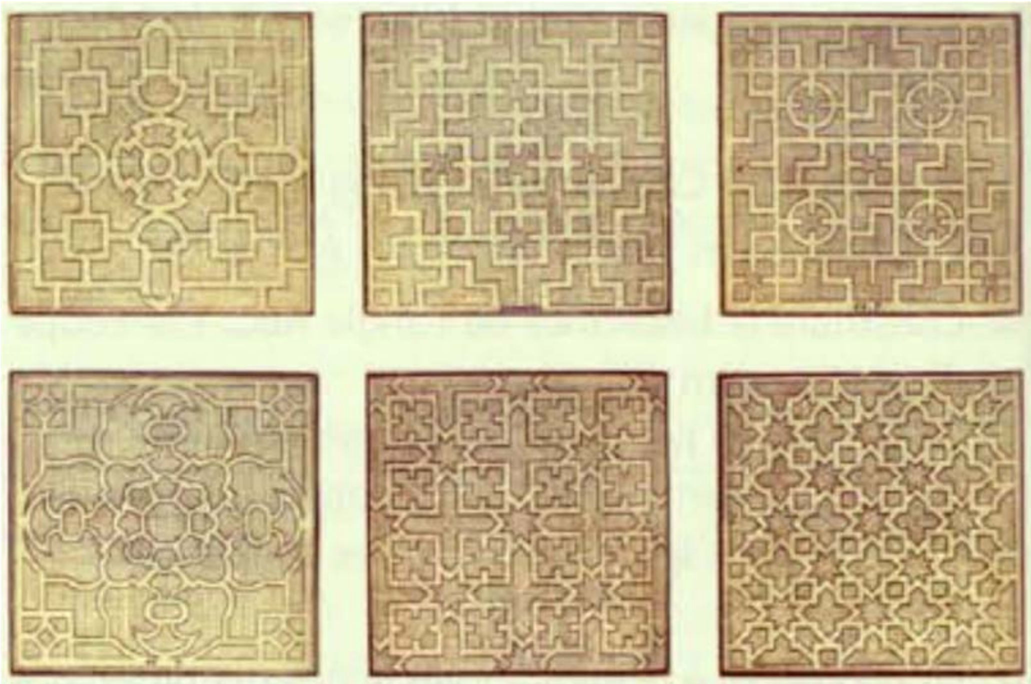


图 10 洛利斯的花圃设计图案

章介绍瓦里格农（P. Varigonon, 1654-1722）平行四边形，即顺次连接四边形四边中点所得的四边形，要求学生给出有关证明，并探讨正方形、矩形、菱形的瓦里格农平行四边形。“面积”一章介绍由《几何原本》第一卷命题 37 所得到的“欧几里得蝴蝶形”——两平行线之间的两个同底三角形去掉公共部分后所得图形，要求学生证明欧氏蝴蝶形翅膀面积相等。

同册“分数运算”一章习题栏目中有一题，要求在图 11 所示三角形的空格中填入适当分数，使成莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）三角形。另一题为霍鲁斯（古埃及神话中的天神）眼睛问题，如图 12 所示。先介绍关于霍鲁斯眼睛的埃及神话故事，然后提出问题：霍鲁斯眼睛各部分所表示的分数之和为多少？所差部分对应的分数为多少？

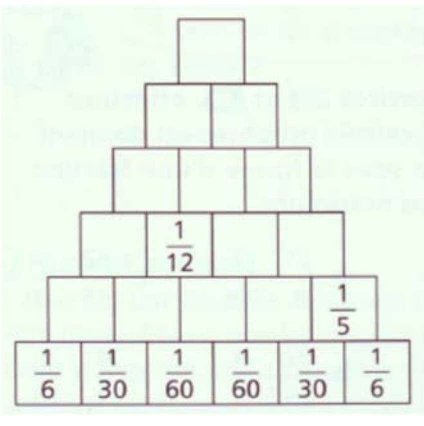


图 11 莱布尼茨三角形

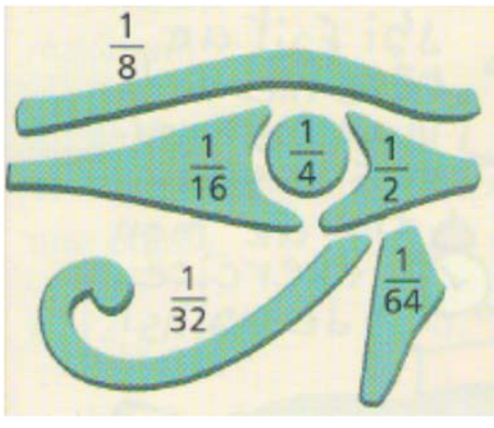


图 12 霍鲁斯眼睛分数问题

《数学 4》“正负数运算”一章的习题栏目中，有一题要求学生用本章的数学语言来翻

译婆罗摩笈多的运算法则："零减去债务，得财产；零减去财产，得债务。""字母运算"一章的一道习题再现了美国总统伽菲尔德对勾股定理的证明，之后还附加了一则介绍伽菲尔德生平的阅读材料。"整数指数幂"一章的一道习题即为莱因得纸草书问题 79："某地有 7 座房屋，每座房屋中有 7 只猫，每只猫吃掉了 7 只老鼠，每只老鼠吃掉了 7 个容积单位的种子，每个容积单位种子可产出 7 hekat 的麦子。求该地共有几座房屋、几只猫、几只老鼠、几个容积单位种子、几 hekat 麦子？"要求用幂来表示答案。之后还附加了关于古埃及谷物、果实以及液体容积度量单位 hekat 的介绍（1 hekat 约等于 4.785 升），以及作为分割 1 hekat 所产生的霍鲁斯眼睛分数。

同册"毕达哥拉斯定理"一章的习题中，有一题要求证明毕达哥拉斯定理的逆定理，法国教材再现了欧几里得《几何原本》第 1 卷命题 48 所用的反证法。

《数学 3》"平方根"一章的活动部栏目给出 $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ 等的作图，称为"毕达哥拉斯螺线"（图 13），再现了毕达哥拉斯学派几何学家德奥多罗（Theodorus, 465-398 B.C.）的方法。

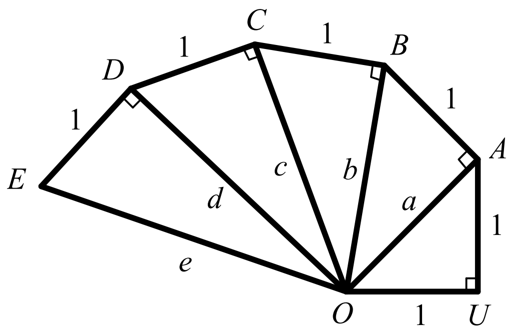


图 13 毕达哥拉斯螺线

复制式数学史材料的功能是直接呈现历史上的数学问题或数学方法，几乎不作改编，故名"复制式"。复制的历史问题或方法是教材正文不可分割的组成部分。

4 顺应式

顺应式数学史材料主要出现在方法和习题栏目中。

《数学 5》"分数运算"一章的一道习题利用了中国古代七巧板：图 14 中每一小块图形的面积使整个正方形面积的几分之几？①、④、⑤、⑥四块图形的面积之和使整个正方形面积的几分之几？

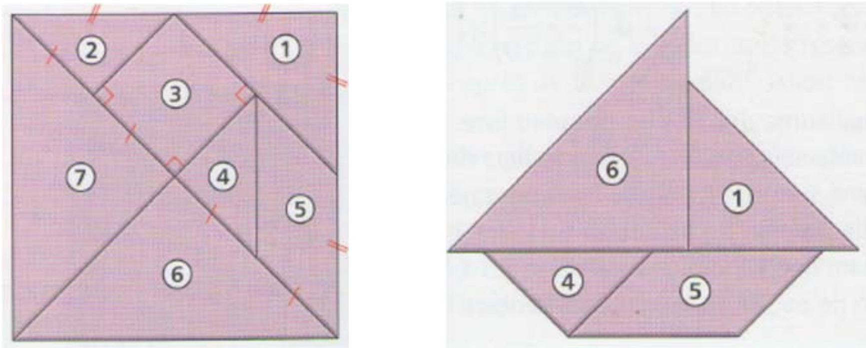


图 14　由七巧板改编的问题

《数学 4》“毕达哥拉斯定理”一章的“方法”栏目为例题部分，介绍勾股定理及其逆定理的各种应用。其中一道应用题是：“一颗大树在离地 6 米处被大风折断，树梢触地，树根离树梢 8 米。假设树干与地面垂直，问：大树原来的高度是几米？”（图 15）问题改编自中国《九章算术》勾股章问题：“今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问折者高几何。”[6] 印度数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114-1185）也提出过类似问题：“竹高 32 尺，为风所折，竹梢抵地，去本 16 尺，问折者高几何。”[7]

图 15 大风折树问题

同章习题栏目中，有一勾股定理应用题（图 16）：“为了和朱丽叶在一起，罗密欧使用了 7 米长的梯子。已知朱丽叶房间的窗户离地 5.6 米，问：为了和朱丽叶在一起，罗密欧至少需要将梯子下端置于离墙多远处？假设墙与地面垂直。”问题改编自古巴比伦泥版（约公元前 1700 年）BM 85196 上的问题：“长 30 英尺的梯子靠墙直立，当顶端沿墙下移 6 英尺时，底端离墙移动多远？”[8]

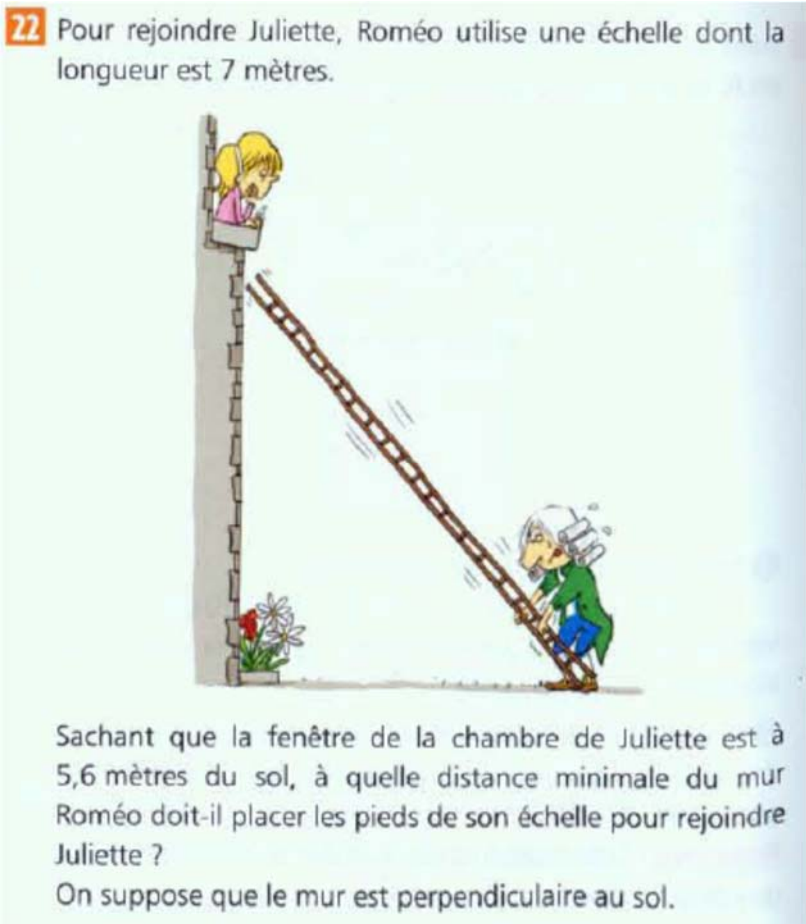


图 16 梯子问题

《数学 3》“乘法公式与零积方程”一章的习题栏目有如下问题：如图 17，已知 AC 和 BD 是 AB 的两条垂线，M 是 AB 上一点。已知 $AC = 7$cm，$BD = 5$cm，$AB = 10$cm，$AM = x$ cm。问：M 位于何处时与 C、D 等距？问题改编自斐波那契（L. Fibonacci, 1170?-1250?）《计算之书》中的“二鸟饮泉”问题：“二塔相距 50 步，高分别为 30 步和 40 步。二塔间有

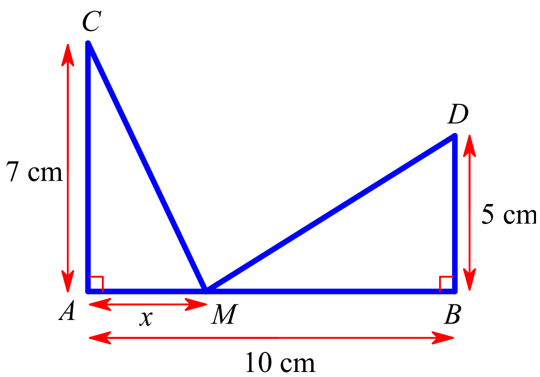


图 17 “二鸟饮泉”问题

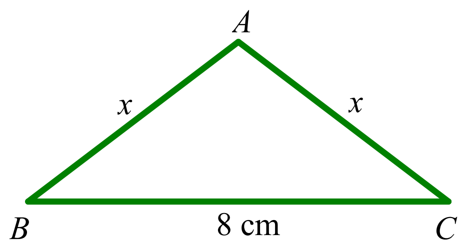


图 18 周长问题

喷泉，塔顶各有一鸟。二鸟同时自塔顶出发，沿直线飞往喷泉，同时抵达。求二塔与喷泉中心之距。”[9]

顺应式数学史材料的功能是古为今用、推陈出新。这类材料表面上看已经没有了历史的痕迹，但它们既传承了历史，又顺应了时代，故名“顺应式”。

5 重构式

重构式数学史材料或出现于新概念的引入中，或隐含于某个知识点的整个脉络中。

《数学 4》“不等式、序与运算”一章对不等式的处理遵循了发生法。在“方法”栏目中，一道应用题相当于已知$145 \le x \le 155$，求$1000-5x$的范围。“习题”栏目中很多类似问题，如：已知$-3 \le x < 5$，求$2x+4$，$6-5x$，$\frac{x-2}{3}$，$\frac{7-3x}{8}$的范围；已知$4.5 < x < 4.6$，求图 16 中等腰三角形 *ABC* 周长的范围。在这些问题之后，设置了两道相反的问题，即已知 x 的一次多项式的范围，求 x 的范围。于是，一元一次不等式悄然出现，尽管其正式内容安排在下一册。这种由一次多项式所属区间的问题过渡到相反的问题（不等式），正如由多项式求值问题过渡到相反的问题（方程）一样，是对数学史的借鉴和重构，是对发生法的恰当运用。

《数学 3》“乘法公式与零积方程”一章的活动栏目引入了“零积方程”概念——一边为两个一次因式乘积、一边为零的方程。首先，从一个具体的数乘以零，到一个字母乘以零，引导学生得出一般结论：若$a=0$或$b=0$，则$a \times b=0$；若$a \times b=0$，则$a=0$或$b=0$。接着，给出零积方程$(x+5)(2x-3)=0$。让学生思考：为什么称该方程为零积方程？它是一元一次方程吗？使$x+5$和$2x-3$等于零的 x 的值各为多少？零积方程$(x+5)(2x-3)=0$的根是什么？最后，让学生解方程$(3x-4)(7-x)=0$，并利用因式分解法解方程$2x^2-x=0$、$(2x-1)(-3x+2)+3(2x-1)=0$以及$x^2-2x+1=0$。

从历史上看，最早用因式分解法来解方程的是 17 世纪英国数学家哈里奥特（T. Harriot, 1560-1621）。在《实用分析术》（1631）中，哈里奥特正是从零积方程出发来导出一般方程的 [10]：若$a=b$，则$a-b=0$，于是$(a-b)(a+c)=0$，故得$a^2-ba+ca=bc$；若$a=b$或$a=c$，则$a-b=0$或$a-c=0$，于是$(a-b)(a-c)=0$，故得$a^2-ba-ca=-bc$。由此反过来考虑上述两个一般方程的根。无独有偶，在笛卡儿（R. Descartes, 1596-1690）《几何学》（1637）中，我们也看到了这一点。他将一元一次方程$x-2=0$和$x-3=0$相乘，得一元二次方程$x^2-5x+6=0$，得出其根为 2 和 3。[11]因此，历史上先有零积方程，后有因

式分解法，正是零积方程导致了因式分解法的诞生。法国初中教材借鉴、重构了一元二次方程因式分解法的历史，为后面的一元二次方程的解法埋下了伏笔，使知识的过渡变得水到渠成、自然而然。

综上，点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式涵盖了数学教材运用数学史的所有方式，运用这一分类方法，我们可以对数学教材作出较为合理的历史分析，据此，我们就可以从数学史的视角对不同国别数学教材进行定量和定性的比较研究了。

参考文献

[1] Siceloff, L. P., Wentworth, G., Smith, D. E. *Analytical Geometry*. Boston: Ginn & Company, 1922. 287-288

[2] Wentworth, G., Smith D.E. Solid Geometry. Boston: Ginn & Company, 1913. 453-457

[3] Tzanakis, C., Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 201-240

[4] Jankvist, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71: 235-261

[5] Ancel-Lepesqueur, C. *et al*. *Math* (3e-6e) . Paris: Belin, 2007

[6] 郭书春. 汇校九章算术. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社, 2004. 414-415

[7] 婆什迦罗. 莉拉沃蒂 (林隆夫日译, 徐泽林等汉译) . 北京: 科学出版社, 2008. 107-108

[8] van der Waerden, B .L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 58-59

[9] Siegler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag, 2002. 543-544

[10] Bruce, I. *Harriot's Artis Analyticae Praxis*. *http://www.17centurymaths.com/contents/contentspraxis.htm*

[11] Descartes, R. *La Géométrie*. Nantes: SAF, 1984

跨越时空的对话

彭 刚

(华东师范大学数学系，上海，200214)

M·克莱因：诸位，在西方文明中数学一直是一种主要的文化力量；以神圣的数学之名，我们欢聚一堂. 首先有请古希腊泰勒斯先生。

泰勒斯：今天我们来探讨几何学. 几何学源远流长，人类最初的几何知识从对世界万物形的直觉中萌发出来. 伟大的历史学家希罗多德告诉我们，古埃及的几何学产生于尼罗河泛滥后土地的重新丈量，“几何学”一词的希腊文意即“测地”；但在古代印度，几何学的起源则与宗教有关。

古希腊时代以前的数学都以经验的积累为特征，几何学也不例外；但经验不是获取知识的唯一方法，经验也不能给人类以推理能力，我们需要一种推理方法的确能保证它所导出的结论具有确定性。

M·克莱因：古希腊学者们所发明的推理方法就是演绎法，即从已认可的事实推导出新命题，承认这些事实就必须接受推导出的命题；而几何学便从此进入了推理几何阶段，对于各种各样几何图形的性质作系统化和深刻的分析。

泰勒斯：的确如此. 尽管历史学家把论证数学的开端归功于由我领导的爱奥尼亚学派，但实际上我们的兴趣主要还是在自然哲学方面，比如宇宙起源理论等。 我本人也有很多传说，比如说我早年经商，进行橄榄榨油机生意发了大财，在巴比伦我预报了公元前 585 年的一次日蚀，甚至还说我夜晚散步在全神贯注观察星星时，不小心跌到沟中成了落汤鸡——但传说毕竟是传说。

M·克莱因：关于泰勒斯先生的传说有些还是有记载的，比如新柏拉图派哲学家普罗克鲁斯先生在其著作中便介绍说泰勒斯先生证明了下面关于三角形的一个很基本的性质：等腰三角形两底角相等。

三角形是仅次于线段和直线的最基本、最简单的几何图形，而空间中的大部分基本性质都已经在三角形的几何性质中充分体现，因此三角形是古希腊几何学所研究的主要内容之

一。

泰勒斯：不错，今天我们要探讨的问题便是与三角形有关：

如图 1，G 为△ ABC 重心，过 G 的直线交 AB 于 M，交 AC 于 N。求证:$\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$。

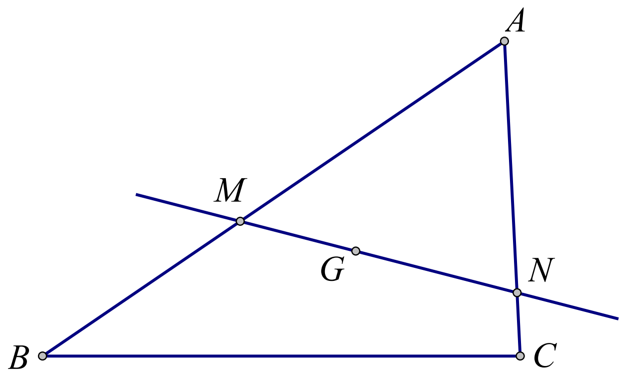


图 1

毕达哥拉斯：泰勒斯先生，正所谓万物皆数，BM 与 MA，CN 与 NA 应该均可公度！

希帕苏斯：我的名字就是一种传说，哪怕再次面临着被扔到汹涌的大海的危险，我也要说出我的发现：毕达哥拉斯先生，世上确实存在不可公度的线段！比如正方形的边长和对角线长$\{a,b\}$之间的辗转丈量就是永无休止因而是不可公度的(如图 2)！

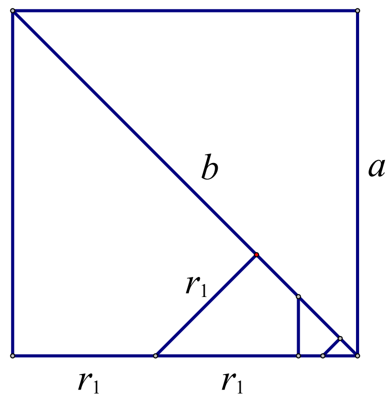


图 2

欧多克斯：向伟大的希帕苏斯先生致敬！其实无论 BM 与 MA，CN 与 NA 是否可公度，利用比例理论我都可以证明“如果两个三角形的高相同,则它们的面积之比等于两底之比”。我将利用这个结论来解决泰勒斯先生所提出的问题。

如图 3，取 D 为 BC 中点，设$\frac{BM}{MA}=k,\frac{CN}{NA}=t,S_{\vartriangle CNG}=S_{\vartriangle CNG}=S$．由 G 是重心可得：

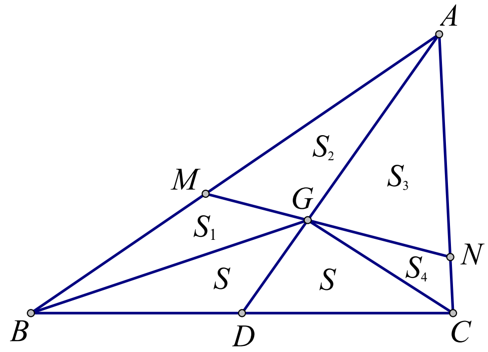


图 3

$$S_{\triangle BMG}=S_1=\frac{2k}{k+1}S,S_{\triangle AMG}=S_2=\frac{2}{k+1}S,S_{\triangle ANG}=S_3=\frac{2}{t+1}S,S_{\triangle CNG}=S_4=\frac{2t}{t+1}S,$$

所以 $\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_2+S_3}{6S}=\dfrac{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{t+1}}{3}$. 又由 M,G,N 三点共线可知

$\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}=\dfrac{1}{(1+k)(1+t)}$, 从而有 $\dfrac{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{t+1}}{3}=\dfrac{1}{(1+k)(1+t)}$ 即 $k+t=1$.

芝诺：欧多克斯先生的解法巧妙之至，可惜现在我没有时间来研究它。 阿基里斯到底能不能追上乌龟呢？我要好好思考一下。

托勒密一世：伟大的阿基里斯怎么能追不上一只乌龟呢？芝诺先生真是幽默，不过想要理解欧多克斯先生的解法，我还要学习一下几何学才行。 尊敬的欧几里得先生，您是几何学的集大成者，请告诉我，学习几何学有何捷径呢？

欧几里得：几何学无王者之道！尊敬的托勒密王可参阅我编写的《原本》(Elements)一书。欧多克斯先生的方法确实不错，但我发现了更为精巧的方法，应该可以加到我的《原本》中去：

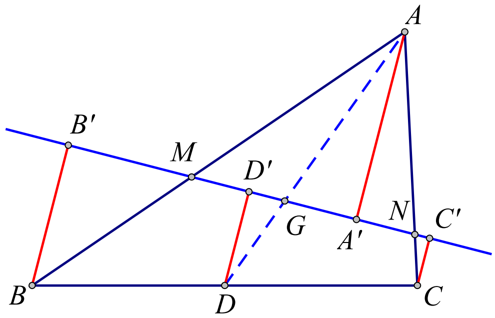


图 4

如图 4,同样取 D 为 BC 中点,连接 AD。 分别过点 A,B,C,D 作直线 MN 的垂线于 A',B',C',D', 则 $\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=\dfrac{BB'+CC'}{AA'}=\dfrac{2DD'}{2DD'}=1$。

阿基米德: Εύρηκα! Εύρηκα!

M·克莱因: 欧几里得先生不愧为几何学大师，其方法简洁明了，所作辅助线有如神来之笔，体现了几何学的神奇魅力，让人惊叹！

欧几里得先生的《原本》以亚里士多德先生的形式逻辑为方法论基础，将前人的工作整理、汇编，构建了历史上第一个数学公理体系，堪称西方科学的“圣经”！

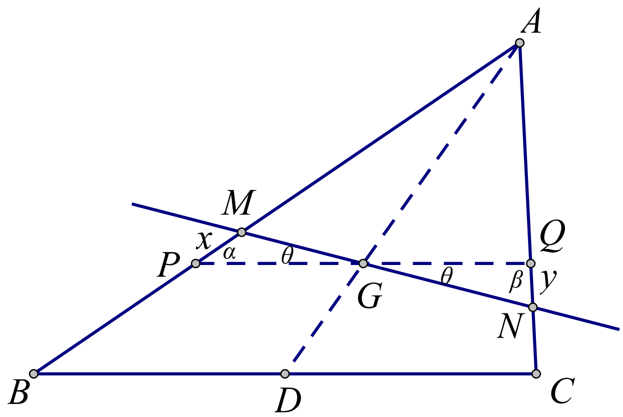


图 5

艾布·瓦法: 欧式几何果然名不虚传，不过我却要对尊敬的托勒玫先生表示感谢，您的著作《大成》虽然是探讨天文学，但对三角学的贡献却是里程碑式的。受您的启发，我编写了《天文学大全》，其中关于三角形的正弦定律，可以来解决这个几何问题。

如图 5，过 G 作 PQ∥ BC 交 AB 于 P，交 AC 于 Q。设

$AB=c,AC=b,BC=a,PM=x,QN=y,\angle MPG=\alpha,\angle GNQ=\beta,\angle PGM=\angle NGQ=\theta,$

则 $\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=1\Leftrightarrow\dfrac{\frac{c}{3}-x}{\frac{2c}{3}+x}+\dfrac{\frac{b}{3}+y}{\frac{2b}{3}-y}=\dfrac{c-3x}{2c+3x}+\dfrac{b+3y}{2b-3y}=1\Leftrightarrow\dfrac{c}{2c+3x}+\dfrac{b}{2b-3y}=1$

即 $\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=1\Leftrightarrow bx=yc+3xy$。

由正弦定理可得 $\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{PG}{\sin\alpha},\dfrac{y}{\sin\theta}=\dfrac{GQ}{\sin\beta},\dfrac{AM}{\sin(\pi-\beta)}=\dfrac{AN}{\sin\alpha},$

因为 $PG=GQ, AM=x+\frac{2c}{3}, AN=\frac{2b}{3}-y$, 所以 $\frac{x}{y}=\frac{x+\frac{2c}{3}}{\frac{2b}{3}-y}$ 即 $bx=yc+3xy$ 。

البرهان ينهي !

M·克莱因：艾布·瓦法先生的解法将此问题的特殊情况与一般情况作对比，虽计算略显复杂，也不失为一种好办法。

三角学确实是为天文学的应用而产生的——这可能是一门比数学历史还要悠久的学科，若知道这一点，人类为何首先关注球面三角学而不是平面三角学便不显得奇怪了。当然，随着 13 世纪纳西尔·丁先生的著作《论完全四边形》的诞生，三角学逐渐脱离天文学而成为一门独立的学科。

三角学的本质是三角形的各种各样几何量之间的函数关系，因此从某种意义上来说三角学就是三角形的解析几何。本质上讲，三角定律揭示的是平面几何的度量结构，其中正弦定律(Law of sines)与面积有关，而余弦定律(Law of cosines)——毕达哥拉斯定理的推广——与长度有关. 因此可以说艾布·瓦法先生的解法与欧多克斯先生的解法本质上是相同的。

笛卡儿：各位先生的解法的确巧妙之至，但太依赖于几何图形了，也许只适合于想象力疲乏的情况下去练习理解力；同样遗憾的是，现在的代数学也太拘泥于各种法则和公式了，似乎变成了一种充满混杂和晦暗、故意用来阻碍思想的艺术而不像一门改进思想的科学。对此，我们要感谢韦达先生，他在数学符号系统化方面的卓越工作，大大提高了代数学的一般性. 我认为，是该到了把代数学以及几何学中一切最好的东西，即几何的直观和计算的程序化结合起来，互相以长补短的时候了。

M·克莱因：笛卡儿先生所言极是，您和费马先生各自独立所发明的解析几何，确实是数学历史上的重要里程碑。 不过费马先生作为数学家与您还是风格迥异，您的哲学思想对后世影响可谓深远。

笛卡儿：Je pense, donc je suis！以任意点为原点建立我的直角坐标系。

设 $\frac{BM}{MA}=k, \frac{CN}{NA}=t, A(x_A,y_A), B(x_B,y_B), C(x_C,y_C)$,

则 $G(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}), M(\frac{kx_A+x_B}{k+1},\frac{ky_A+y_B}{k+1}), N(\frac{tx_A+x_C}{t+1},\frac{ty_A+y_C}{t+1})$ 。

由 M,G,N 三点共线可知

$$\frac{\frac{ky_A+y_B}{k+1}-\frac{y_A+y_B+y_C}{3}}{\frac{kx_A+x_B}{k+1}-\frac{x_A+x_B+x_C}{3}}=\frac{\frac{ty_A+y_C}{t+1}-\frac{y_A+y_B+y_C}{3}}{\frac{tx_A+x_C}{t+1}-\frac{x_A+x_B+x_C}{3}}$$

即

$$\begin{aligned}&3(ky_A+y_B)(tx_A+x_C)-(t+1)(ky_A+y_B)(\sum x_A)-(k+1)(tx_A+x_C)(\sum y_A)\\=&3(kx_A+x_B)(ty_A+y_C)-(t+1)(kx_A+x_B)(\sum y_A)-(k+1)(ty_A+y_C)(\sum x_A),\end{aligned}$$

为方便计算可建立下表（计算左右各项相应的系数）：

x_By_A	$-tk-k$	$t-1-kt$
x_By_B	$-(t+1)$	$-(t+1)$
x_By_C	0	$1-t-k$
x_Cy_A	$k-1-kt$	$-kt-t$
x_Ay_A	$kt-k-t$	$kt-k-t$
x_Ay_B	$t-1-kt$	$-tk-k$
x_Ay_C	$-kt-t$	$k-1-kt$
x_Cy_B	$1-t-k$	0
x_Cy_C	$-(k+1)$	$-(k+1)$

由此可得 $(k+t-1)(x_By_C+x_Ay_B+x_Cy_A-x_By_A-x_Ay_C-x_Cy_B)=0$，由于 A,B,C 三点不共线，故 $x_By_C+x_Ay_B+x_Cy_A-x_By_A-x_Ay_C-x_Cy_B\neq 0$，所以$k+t=1$.

拉格朗日：此法甚好！历史告诉我们，只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是当这两门科学结合成为伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从此数学就以快速的步伐走向完善。

M·克莱因：对微积分的诞生及其蓬勃发展即是最有力的证据，解析几何的妙处还在于提供了解决几何问题的一般方法：将几何元素代数化(点与实数对对应，曲线与方程对应)，因此在代数的帮助下，几何元素也可以自由的进行运算；要知道只通过图形进行论证，一些隐藏较深的数量关系便难以发现，解题途径自然是千奇百怪。不过笛卡儿先生的上述证明应

该还可以简化。

笛卡儿：根据坐标系可以任意建立的原理，取点 G 为原点即可：

$$\begin{cases} \dfrac{ky_A+y_B}{kx_A+x_B}=\dfrac{ty_A+y_C}{tx_A+x_C} \\ x_A+x_B+x_C=0 \\ y_A+y_B+y_C=0 \end{cases}$$

从而有 $(k+t-1)(x_Ay_B-x_By_A)=0$；由于 A,B,G 三点不共线，故 $x_Ay_B-x_By_A\neq 0$，所以 $k+t=1$。

M·克莱因：果不其然！不过相对于纯几何法，解析法往往面临计算过于繁琐的窘境，但随着代数工具的不断改进，这种局面应该会有很大改观。

关孝和：首先我代表东方的数学家们向大家致敬！笛卡儿先生的证明确实可以利用新的代数工具行列式来简化：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_M & y_M \\ 1 & x_N & y_N \\ 1 & x_G & y_G \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{kx_A+x_B}{k+1} & \dfrac{ky_A+y_B}{k+1} \\ 1 & \dfrac{tx_A+x_C}{t+1} & \dfrac{ty_A+y_C}{t+1} \\ 1 & \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} & \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{vmatrix}=2S_{\triangle MNG}=0.$$

进行简单的变形可得：

$$\begin{vmatrix} k+t-1 & (k+t-1)x_A & (k+t-1)y_A \\ t+1 & tx_A+x_C & ty_A+y_C \\ 3 & x_A+x_B+x_C & y_A+y_B+y_C \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(k+t-1)\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & tx_A+x_C & ty_A+y_C \\ 1 & \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} & \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(k+t-1)\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & x_G & y_G \end{vmatrix}=0,$$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & x_G & y_G \end{vmatrix} = 2S_{\triangle AGC} \neq 0$, 所以 $k+t=1$。

M·克莱因：东方的关孝和先生则是从高次方程组消元法入手对这一概念进行阐述的。尽管处理方式不同，最终殊途同归，可谓春天的紫罗兰处处开放！

经过比较我们还可以发现，如果将行列式展开，得到的便是笛卡儿先生最初的计算过程，因此利用行列式不但解释了为何当 A,B,C 三点不共线时有

$$x_B y_C + x_A y_B + x_C y_A - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B \neq 0,$$

同时还给出了相应的几何解释，即它表示的是 $\triangle ABC$ 有向面积的两倍。

另外，根据 $S_{\triangle AGC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ 不难发现 $S_{\triangle ABC} \neq 0$ 与 $S_{\triangle AGC} \neq 0$ 是等价的，从图形上看其实也就是笛卡儿先生所用到的 A,B,C 三点不共线以及 A,G,C 三点不共线本质相同。由此可见，无论计算的工具和途径有何变化，背后所依赖的几何事实却是不变的。

费马：言之有理！关于此问题的解析法，我突然想到一个真正奇妙的证明。

M·克莱因：甚好！费马先生请赐教，不像 $x^n + y^n = z^n$，我们这个问题您有足够的时间和空白来考虑。

费马：即便是以任意点为原点建立直角坐标系，由 M，G，N 三点共线可知存在实数 μ 使得 $\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \mu \frac{kx_A + x_B}{k+1} + (1-\mu)\frac{tx_A + x_C}{t+1}$，所以 $\begin{cases} \frac{\mu}{k+1} = \frac{1}{3} \\ \frac{1-\mu}{t+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$ 即 $k+t=1$。

M·克莱因：妙哉！妙哉！上述方法其实蕴含着平面的一个相当根本的性质，即平面上任意一点的坐标都可以由已知的不共线三点的坐标来表示，且表示法唯一。本质上，这就是我们刚才提到的“几何事实”：平面是实数域上的二维向量空间。 当然，上述解法也可以直接用向量来表达。

格拉斯曼：向量是近代数学的一个重要工具，它最早起源于物理学，人类很早就知道力的合成满足平行四边形法则；除此之外，位置几何是向量理论的又一个重要思想源泉，这一源泉早期可以追溯到莱布尼兹先生的位置几何的概念。

M·克莱因：莱布尼兹先生想创造一种可以作为空间分析的直接方法的系统，确实很有远见。如果说欧式几何的特点是综合，笛卡儿几何的特点是分析，那么向量便同时拥有这两

大特点：它既可以向几何图形一样自由的移动，也可以像数一样自由的运算。另外，笛卡儿先生所提到的直角坐标系可以任意建立的事情，本质上就是向量可以自由的平移！

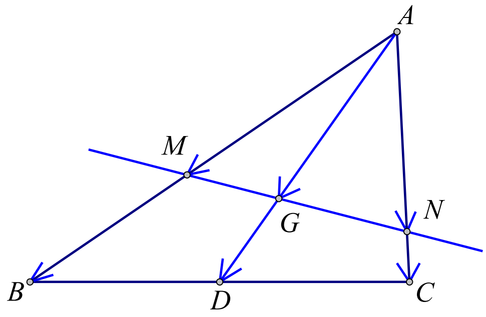


图 6

格拉斯曼：的确如此， 我们来看如何用向量来解决这个平面几何问题，

如图 6，设 $\dfrac{BM}{MA}=k,\dfrac{CN}{NA}=t.$ 由 G 是重心可得 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

由 M,G,N 三点共线可知存在实数 λ 使得

$$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AM}+(1-\lambda)\overrightarrow{AN}=\frac{\lambda}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{1-\lambda}{1+t}\overrightarrow{AC},$$

由于 A,B,C 三点不共线，所以 $\dfrac{\lambda}{1+k}=\dfrac{1}{3},\dfrac{1-\lambda}{1+t}=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=k+t=1$。

M·克莱因：向量工具的优点就是直观明了而又计算简单。 将上述形式演变一下，便可得到本质相同的另一种解法：

如图 7，以 A 为原点建立斜坐标系，设 $\dfrac{BM}{MA}=k,\dfrac{CN}{NA}=t$，则

$$A(0,0),B(1,0),C(0,1),G(\frac{1}{3},\frac{1}{3}),M(\frac{1}{1+k},0),N(0,\frac{1}{1+t}),$$

由 M,G,N 三点共线可知存在实数 λ 使得 $\dfrac{\lambda}{1+k}=\dfrac{1}{3},\dfrac{1-\lambda}{1+t}=\dfrac{1}{3}$，即 $k+t=1$。

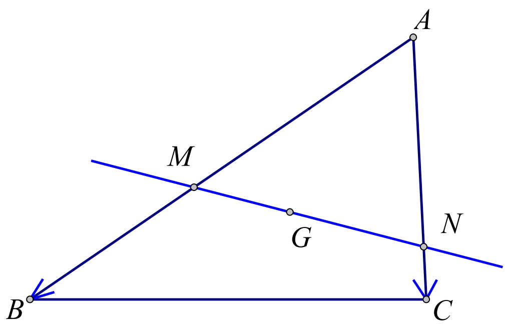


图 7

其实，上述种种解析法无外乎都是把向量法中的向量用坐标形式来表示而已，是形与数

之间的转化。

高斯：向量的概念确实很基本，比如复数也可以用向量来表示，同时向量证法也可以改用复数的语言来表述：

以 A 为原点建立复平面，设 $\frac{BM}{MA}=k,\frac{CN}{NA}=t$, 其中 k,t 都是实数。 设 B, C, M, N, G 所对应的复数分别为 b, c, m, n, g, 则 $g=\frac{b+c}{3},m=\frac{b}{1+k},n=\frac{c}{1+t}$。由 M,G,N 三点共线知：存在实数 λ 使得 $g=\lambda m+(1-\lambda)n$ ，即 $\frac{b+c}{3}=\lambda\frac{b}{1+k}+(1-\lambda)\frac{c}{1+t}$ ，由 A,B,C 三点不共线得 $\frac{\lambda}{1+k}=\frac{1-\lambda}{1+t}=\frac{1}{3}$ 即 $k+t=1$。

M·克莱因：复数与向量确实有天然的联系。在平面上，点、向量以及复数在一定情况下可以等同起来，所以很多几何问题既可以用向量来解决，也可以用复数来解决。

哈密顿：诸位，让我来提醒大家一件非常有趣的事情吧：若点 M 落在线段 AB 延长线上，此时 $t=\frac{CN}{NA}>1,k=\frac{BM}{MA}<0$, 但上述解析法和向量法证明依然成立！

M·克莱因：有意思!

哈密顿：说明此事只需引入线段的方向即可。 当点 M 落在 AB 延长线上时，线段 BM 和 MA 恰好方向相反，因此可以约定此时 $k=\frac{BM}{MA}<0$ 。同理，当 N 落在 CA 延长线上时有 $k=\frac{BM}{MA}>2,\quad t=\frac{CN}{NA}<-1$ 。其实这种思想利用的就是有向线段的概念，我们通常用它来表示向量。

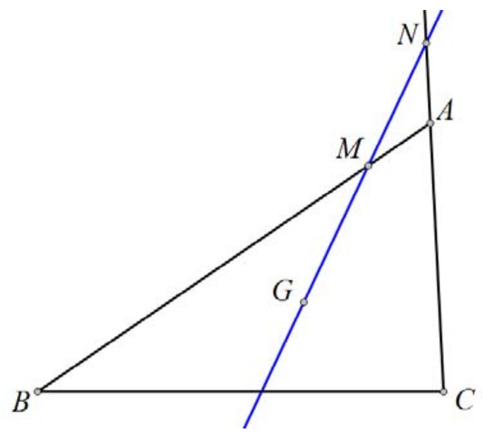


图 8

M·克莱因：这相当于把原命题推广了，甚好！不过当 NG∥ AB 时(如图 9)，$t=\frac{CN}{NA}=2$ ，如果有 $k=\frac{BM}{MA}=-1$ 则结论也成立，但遗憾的是此时 M 点并不存在，上述种种方法中唯一

一个约束就是$k \neq -1$且$t \neq -1$。

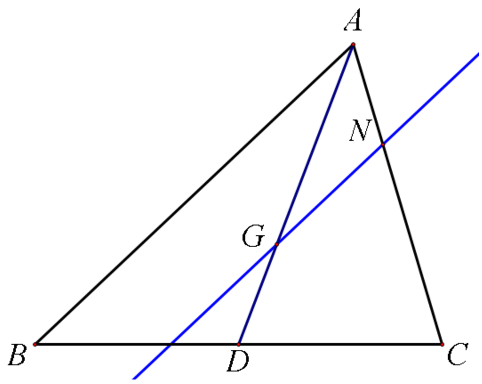


图 9

庞斯列：设平面上所有平行的一组直线相交于无穷远点P_∞，则平面上的点和直线就完全对称了。就此题而言即为 $k=\dfrac{BP_\infty}{P_\infty A}=-1$！

康托尔：*Das Wesen der Mathematik liegt in seiner Freiheit*！

M·克莱因：无穷的数学世界无穷无尽，人类的探索也永无止境。感谢诸位参与此次对话。

最后不得不提及古希腊的柏拉图先生——作为古希腊最有学问的学者，虽然他不是一名数学家，但他深信数学对哲学和了解宇宙的重要作用，倡导为了净化灵魂而去学习数学。这种精神将激励我们永远前行！

参考文献

[1] [美] M·克莱因.古今数学思想(第 1-2 册)[M].张理京等译.上海：上海科学技术出版社，2002.

[2] 项武义. 基础几何学[M]. 北京：人民教育出版社，2004.

[3] 李文林. 数学史概论(第 2 版) [M]. 北京：高等教育出版社，2002.

[4] [美] Victor J.katz. 数学史通论[M]. 李文林等译.北京：高等教育出版社，2002.

[5] [美] M·克莱因.西方文化中的数学[M]. 张祖贵译. 上海：复旦大学出版社, 2004.

[6] 孙庆华. 向量理论历史研究[D]. 西安：西北大学，2006.

[7] 杨浩菊. 行列式理论历史研究[D]. 西安：西北大学，2004.

[8] 梅向明等. 高等几何(第 2 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2000.

制作动态几何课件的关键是什么

徐章韬

(华中师范大学数学与统计学院, 武汉, 430079)

1 引言

几何画板、超级画板都是成功的动态几何软件, 都有很好的教育价值。在使用动态几何的过程中, **我们深刻地感受到: 使用信息技术并不是比拼技术的熟练与否, 能否制作有创意的作品源于对数学知识的深刻理解。**一个精当的例子胜过一打说明。我们以制作椭圆、双曲线、阿波罗尼斯圆和卡西尼卵形线为例来说明。

2 问题

我们知道, 加、减、乘、除四则运算, 可以分别对应于四种不同曲线（设两定点间的距离为 $2c>0$ ）:

到两个定点距离之和等于定长 $2a$ （$2a>2c$) 的点的轨迹是椭圆;

到两个定点距离之差等于定长 $2a$ （$2a<2c$) 的点的轨迹是双曲线;

到两个定点距离之比等于定值 $(\neq 1)$ 的点的轨迹是圆（阿波罗尼斯圆);

到两个定点的距离之积等于定值 (a^2) 的点的轨迹, 叫卡西尼卵形线（双纽线是其特例, 此时 $a=c$ ）。

用动态几何软件可以实现椭圆、双曲线和阿氏圆, 这里产生了两个问题:（1）卡西尼卵形线能否用动态几何软件实现, 如能实现, 又该如何实现? （2）上述四种曲线能否用一种统一的作法实现? 熟悉动态几何软件的人都知道: 现有的作椭圆、双曲线的方法没有用到椭圆、双曲线的定义, 而是其它方法（如几何性质）实现的。概念的定义具有基本的作用, 从直觉上看, 应该能用定义实现, 那么该如何实现呢?

3 探究

椭圆、双曲线的代数定义很容易转化为两条线段的和、差，但卡西尼卵形线却不然，不好从形上考虑。这样，思路就转到了代数上。设其中一个圆的半径是t，另一个圆的半径是a^2/t，如果这两个圆有交点，那么交点分别到两个圆心的距离之积不就是a^2了吗？这个想法简单而朴实，但不知可不可行。不妨先在几何画板里进行实验。（1）先在x轴上作四个动点$(-c,0),C(c,0)$，$A(a,0),T(t,0)$；（2）分别度量A,C,T到原点的距离；（3）以$(-c,0)$为圆心，$|OT|$为半径作圆；以$(c,0)$为圆心，$\dfrac{|OA|^2}{|OT|}$为半径作圆；（4）这两个圆的相交于E,F两点；（5）以T为主动点，分别以E,F为从动点作轨迹；（6）利用属性，把轨迹的象素设为3000，图形显得光滑些。这样就生成了卡西尼卵形线。当分别拖动A,T,C时，就会出现不同的图形。下面是一些截图，如图1、2、3。

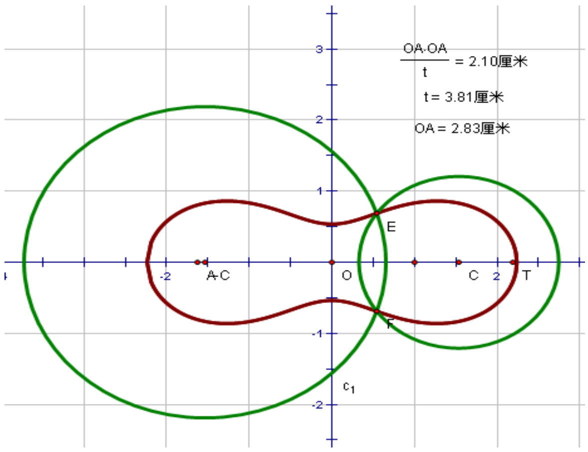


图1 平面凸闭的卡西尼卵形线

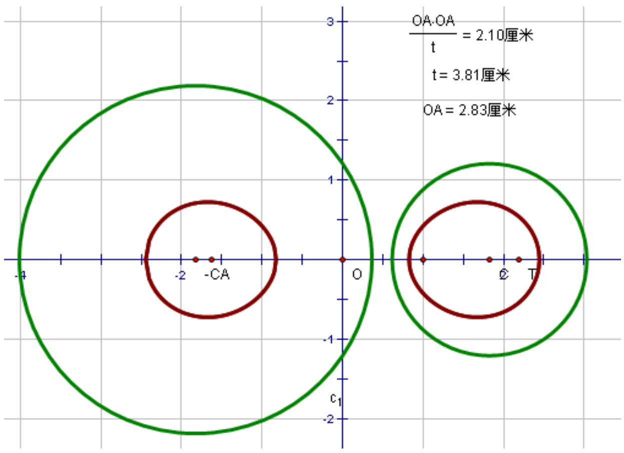


图2 二分支的卡西尼卵形线

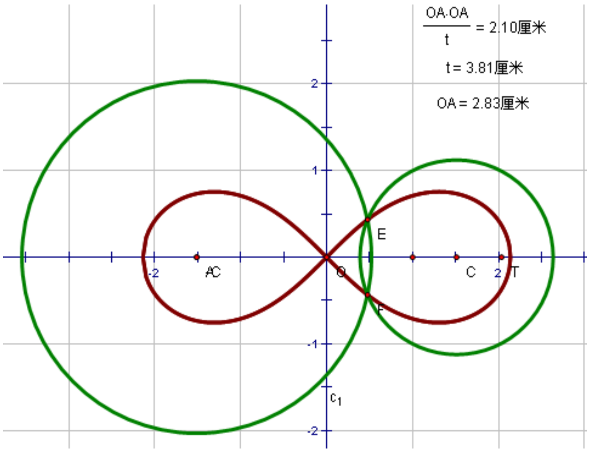


图 3 双纽线：卡西尼卵形线的特例

上面实验的成功激发了进一步探究的激情。

3.1 牛刀初试，阿氏圆中得验证

按上述步骤，设其中一个圆的半径为t，另一个圆的半径为$3t$，就作出到两定点的距离之比是$\frac{1}{3}$的点的轨迹，是一个圆。如图 4 所示。

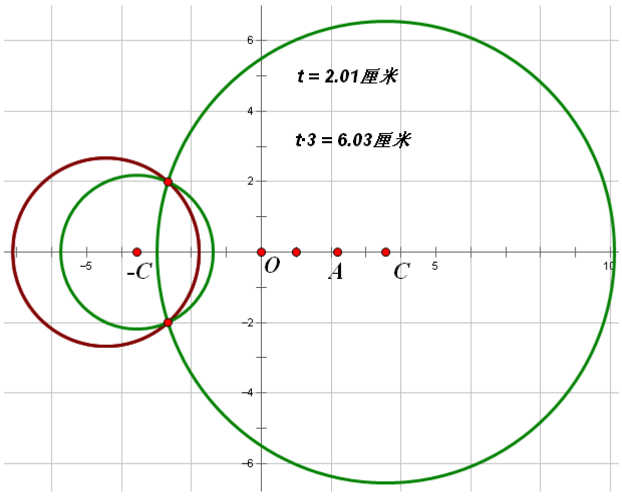


图 4 阿氏圆

3.2 牛刀再试，椭圆中遇小挫折

在上述成功作法的推动下，产生了把这种作法用之于作椭圆与双曲线的念头。这里设其中一个圆的半径是$a+t$，另一个圆的半径是$a-t$，那么这两个圆的交点到两个圆心的距离之和为$2a$。按上述操作步骤在几何画板中进行实验时，只出现了“半椭圆”。如图 5。

为什么会出现这种情况呢？原来，在上述操作中t只能取正值，所以在作卡西尼卵形线和阿氏圆时，不会有问题。但在椭圆定义中，设一个圆的半径为$a+t$，另一个圆的半径为

$a-t$，这样就只有 $a+t>a-t$，只能出现“半椭圆”了！

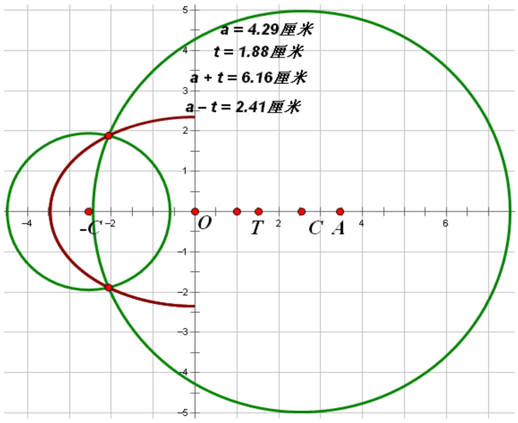


图 5 半椭圆

补救措施是有的。那就要重复上述操作了。比如，第一次，以 $(-c,0)$ 为圆心，$a-t$ 为半径作圆，以 $(c,0)$ 为圆心，$a+t$ 为半径作圆；那么第二次就要以 $(-c,0)$ 为圆心，$a+t$ 为半径作圆，以 $(c,0)$ 为圆心，$a-t$ 为半径作圆；这样才能实现。如图 6 所示。

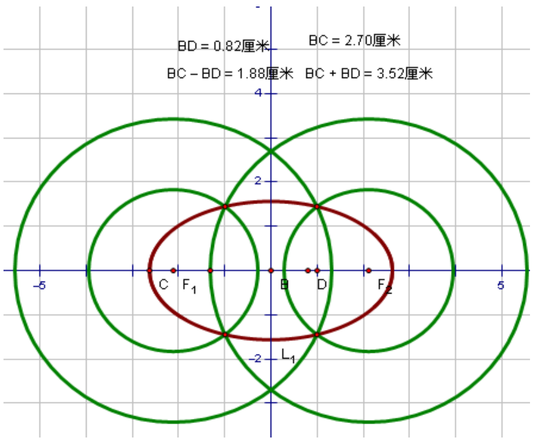


图 6　　完整的椭圆

用同样的方法也可作出双曲线。如图 7。

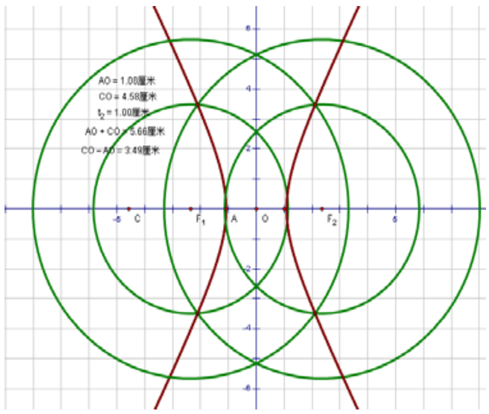


图 7 双曲线

虽然把椭圆、双曲线给作出来了，但总感到有点美中不足。何不用超级画板试试呢？

3.3 牛刀再试，超级画板显威力

超级画板与几何画板虽同为动态几何软件，但超级画板是基于代数原理设计的，以数驭形、以形表数是其突出特点。充分利用超级画板中的变量，就可以弥补几何画板制作椭圆中的美中不足了。

下面是用超级画板制作椭圆的主要步骤：（1）制作两个可以拖动的坐标点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，拖动参数是 c；（2）作坐标点 $A(a+c+t,0)$，拖动参数是 t；（3）以 F_2 为圆心，过点 A 作圆，所作圆的半径是 $a+t$；（4）作坐标点 $B(t-c-a,0)$，拖动参数是 t；（5）以 F_1 为圆心，过点 B 作圆，所作圆的半径是 $a-t$；（6）作变量 a 的变量尺；（7）两个圆的交点是 C,D；（8）以 A 为主动点，分别以 C,D 为从动点，作点的轨迹；（9）利用属性，把轨迹的象素设为3000；图形显得光滑些。

这里 t 可正可负，故 $a+t$ 并不一定大于 $a-t$，这样就能生成完整的椭圆。如图8。

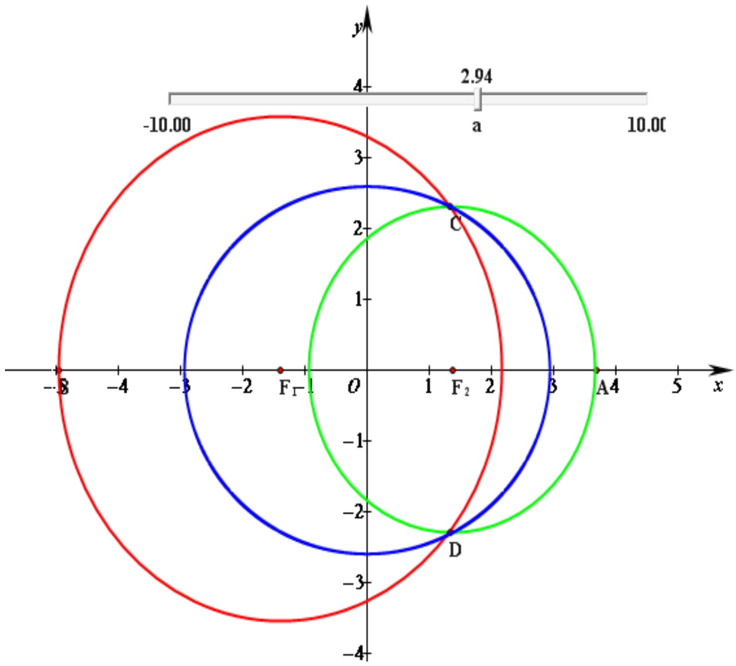


图8 超级画板作的椭圆

类似的，也可作出双曲线，如图9。

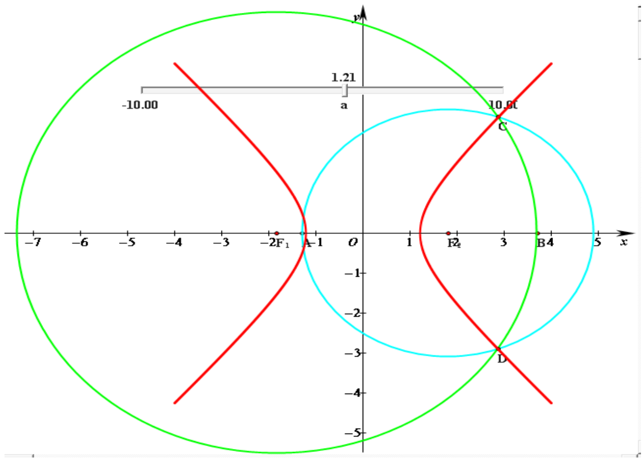


图 9 超级画板作的双曲线

那么，用这种作法，能否作为卡西尼卵形线及阿氏圆呢？如图 10 和图 11。

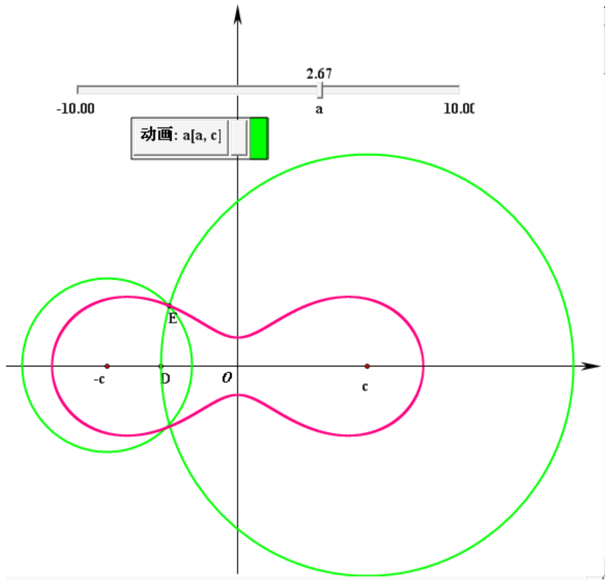


图 10 超级画板作卡西尼卵形线

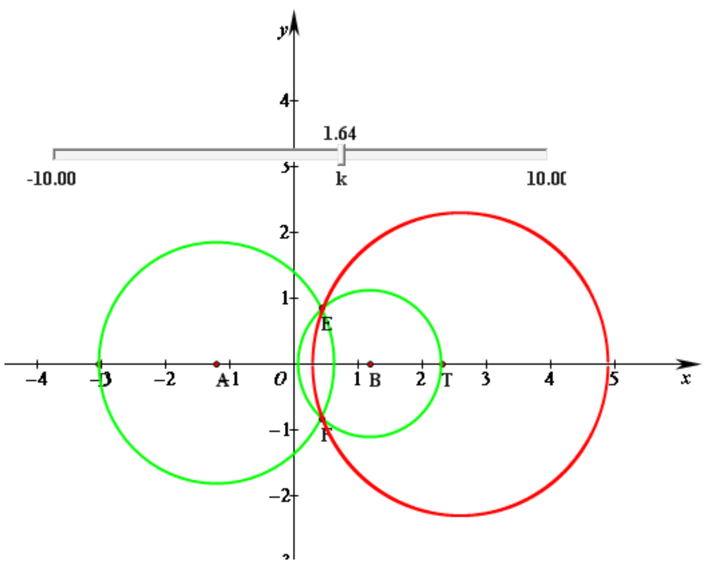


图 11 超级画板实现阿氏圆

由在几何画板没有变量，只有参数，控制参数不如控制变量那么方便，所以的制作椭圆、双曲线、卡西尼卵形线及阿氏圆时，超级画板显得更便捷，虽然两者的原理都一样。

3.4 牛刀回眸，作法小结

乍看起来，阿波罗尼斯圆、卡西尼卵形线不好实现。通过实验、探索之后，发现只要找到合适的作法，困难也就迎刃而解了。回顾、小结一下上述作法：（1）作两个可以拖动的定点；（2）作两个半径合乎一定条件的圆；（3）作两个圆的交点；（4）用主动点带动从动点，用轨迹生成上述曲线。其中，如何确定圆的半径及如何作圆是关键。

4 感想

人们常说数学是统一的，那么数学的统一性体现在哪些方面呢？“数学是统一的”无非是表达了人们对数学的一种体会，作为初学者对这样的命题的理解应**从具体实例中**感知。这里，借助信息技术，制作者对“数学是统一的”这样口号式的命题有了一定的感想。两个数的和为定值$2a$，一个设为$a+t$，另一个设为$a-t$；两个数的差为定值$2a$，一个设为$a+t$，另一个设为$t-a$；两个数的积为定值a^2，一个设为t，另一个设为$\frac{a^2}{t}$；两个数的比为定值a，那一个设为t，另一个设ta；这些是很自然、很平凡的想法，也是一种很统一的想法（比如，两个数的和为定值$2a$，一个设为$a+t$，另一个设为$a-t$，就是历史上的和差术，在解方程中广泛应用），但在常规教学中，**我们仅仅把这样的想法当成一种技法来使用，没有发挥“思想”的威力和实用性。那么这种想法究竟有没有实用性呢？**信息技术是检验我们的想法是否切实可行的一个很好的工具。在用深入学科的信息技术工具制作课件的过程中，初步体会到了数学建模的想法——如何用数学来描述现象、解释现象，初步体现到了数学的威力。从这个角度而言，深入学科的信息技术工具是检验教师是否具有数学眼光，数学功底是否扎实的一块“试金石”；学习制作动态几何课件的关键是数学思想方法和知识的灵活运用；因此，学习制作动态几何课件可作为教师专业发展的一个抓手。

基于发生教学法的抛物线教学设计

陆琳琰

（华东师范大学数学系，上海，200241）

1 问题的提出

圆锥曲线是高中数学教程中的重点和难点，抛物线是这一章节的最后一部分，但教材对其的处理方式相当简洁，此外，教师在实际教学中通常直接把抛物线的定义直接"抛"给学生，教学方式单一，课堂缺乏探究和交流，对照发生教学方法，它存在如下不足：（1）没有将抛物线概念建立在学生已有的知识基础之上，抛物线的引入相当突兀，学生几乎未能感受到抛物线知识的形成过程，以及同之前所学知识之间的联系；（2）没有交待为什么我们要研究抛物线，因而未能让学生产生足够的学习动机。

如何结合抛物线的历史，更好地教授抛物线，使得概念的引入符合学生的认知起点，激发学生的学习动机，帮助学生建立知识之间的联系，引导学生运用所学解决实际问题，从而使抛物线成为提高学生科学素养和文化认知水平的一个典型范例，这是本研究主要的动机所在。

2 理论基础

发生教学法主张只有学生产生足够的学习动机，或在学生心理发展的某个恰当时机，才开始讲授某个主题，具有主题引入的必要性与可接受性，引导学生利用已有的知识把要学的东西自己去发现或创造出来，而不是去接受一个事实，让学生体会到知识的自然发生过程。这是本文研究的理论基础。

我们从发生教学法的教学实例、认知理论和数学心理学等方面，总结出发生教学法应用到数学教学中的特征如下：

① 考虑学生已有的知识、经验和思维能力水平；

② 构建契合学生经验的问题情境，包括数学与非数学的问题背景；

③ 提供自然发生的问题，使得学生尽可能地独立解决；

④　严格的抽象定义在学生经历直觉和启发式的思维活动之后给出，抽象程度较高的理论和概念在学生积累了足够的抽象程度较低的实例之后给出；

⑤　逐步丰富数学概念，建立与其他对象的联系，从不同角度和背景认识研究对象；（Safuanov,2007）

运用发生教学法设计教学过程，以历史和认识论为基础分析教学内容、创设问题情境，具体包括两个步骤：（1）教学方法和教学内容安排的预分析；（2）发生教学过程的具体设计（Safuanov,2005）

教学方法和教学内容安排的预分析包括两个阶段：（1）教学内容本身的发生过程；（2）教学素材的安排、呈现方式和教学效果的分析。通常从以下视角分析教学内容本身的发生过程：

① 历史：分析所讲授主题的历史发展具有双重意义：能够揭示隐含在教学材料中的数学知识的起源；发现产生数学知识需求的问题和在构建数学知识过程中存在的障碍。

② 逻辑：教师应分析教学内容的逻辑结构，合理地组织教学材料，使得问题情境和问题能够顺利引出概念或定理，并使新知识成为解决问题的最佳途径。

③ 心理学：确定学生思维能力水平，估计学生在数学活动中可能存在的困难，更重要的是寻求激发学生学习动机的方法。

④ 社会文化：从文化、历史和生活的角度，建立与自然科学、工程学和金融学等学科的联系，以此来揭示数学在其他学科中的根源和应用。

经过前两个阶段的分析之后，发生教学设计的具体实施过程包括以下四个过程：

（1）　创设问题情境

在发生教学中，问题情境通常是“思维活动在一瞬间产生的”，思维和认知过程的起源是构造问题情景的最自然的方式。（Safuanov,2005）

（2）　自然引出新问题

思考和理解的第一步是产生问题，而且每解决一个问题就会产生一些新的问题，因此，在解决了最初的问题后，需要不断思考新的、自然出现的问题。

（3）　教学素材的合理组织

在构造问题情境和讨论了相关问题后，学生已经有足够的学习动机，这时可以进入推理演绎阶段，给出概念的严格定义。

（4）　知识的应用和发展

新的概念建立之后，就可以考虑它在数学和实际生活中的应用。借助概念的数学符号

表示去进行大量的联系，包括各种形式的变式教学。（Safuanov,2005）

发生教学设计的具体流程如图 1 所示：

图 1 发生教学设计的具体流程

3 抛物线的历史与发展

古希腊学者门奈赫莫斯在解决倍立方问题的过程中，提出只要找出曲线 $x^2 = ay$ 和 $y^2 = 2ax$ 的交点，也就是两个抛物线的交点即可。之后，亚里士塔欧和欧几里得深入地研究了圆锥曲线，按圆锥顶角大小把圆锥分为直角、钝角和锐角圆锥，用垂直于母线的平面截这个圆锥后得到一截线，将抛物线定义为“直角圆锥的截线。希腊数学家阿波罗尼奥斯在其著作《圆锥曲线》中，特别是推广了圆锥曲线的概念，他认为没有必要限于用垂直于母线的平面截正圆锥来定义圆锥曲线，只要改变截面的角度就可以得出这三类曲线。第一卷的命题 11 是截平面与圆锥的一条母线平行，所得的交线被命名为 parabola，并利用欧几里德的比例论得出了此截面的一个面积性质：以横线为一边作矩形贴合到竖直边上去，使其面积等于纵线上正方形，而此矩形的另一边与竖直边重合（相等）。古希腊时代最后一位几何学家帕普斯在《数学汇编》中用到了圆锥曲线的焦点准线性质：设一动点至一定点的距离与至一定直线的距离之比等于常数，则动点的轨迹是圆锥曲线.当这个常数等于 1 时是抛物线。

帕普斯之后的一千多年，对圆锥曲线的研究没有像希腊时期那般热烈，直至法国数学家洛必达将解析几何知识融入圆锥曲线，他在《圆锥曲线分析》中将抛物线定义为平面上与一

个定点和一条直线的距离相等的点的轨迹，并据此推导出抛物线的标准方程 $y^2 = px$ 。18 世纪的数学家们将抛物线作为二次方程的一种进行研究，并且给出了各种抛物线的作图方法，1822 年，比利时数学家旦德林利用一个圆锥的内切球，直接在圆锥上作出了抛物线截面的焦点、准线，用几何方法推出轨迹定义，从而解决了古希腊的截面定义和抛物线轨迹定义之间的不连贯。

另外，抛物线的光学性质很早就被古人所发现，和阿波罗尼奥斯同时代的狄俄克利斯在其著作《取火镜（On Burning Mirrors）》中解决了天文学家芝诺多罗斯的问题："什么样的镜面对着太阳，能使反射的光线集中到一点而引起燃烧？"和证明了抛物线的光学性质，并提出了抛物线的焦点概念，确定焦点在对称轴上的具体位置。近代之初，由于科学技术特别是天文学和光学的需要，法国数学家迈多尔日和意大利数学家卡瓦列里根据抛物线、双曲线和椭圆的性质，从理论上设计了一系列镜子以及镜子的各种组合，但在当时的技术条件下是无法在现实中制成的。

抛射物体的运动轨迹是抛物线的另一实际应用。历史上，人们一开始也是从外形上判断被抛掷物体的运动轨迹，14 世纪的大炮在欧洲战场上被逐渐使用，人们愈加重视对其射程的判断和控制，但由于炮弹射出之后，脱离了人的视线，所以在当时确定其运动轨迹是非常困难的。人们通过肉眼的观察，认为炮弹被斜抛出去之后的轨迹是由两段直线和一段圆弧组成。直至 17 世纪，伽利略通过反复的实验，确定物体在垂直方向上的运动距离与水平方向距离的平方成正比，对照阿波罗尼奥斯的抛物线方程雏形，确定了轨迹是抛物线。

4 抛物线的教学设计

根据发生教学法的理论要求，分别针对抛物线概念的引入和实际应用设计了 4 个教学设计。

抛物线概念的引入 设计1

抛物线在日常生活中用途广泛，我们经常看到的卫星接收器，雷达天线（图2 雷达接收器 图）等，它们的反射镜都是抛物面，抛物面的轴截面是抛物线的一部分，设计原理都是利用了抛物线的光学性质：平行于抛物线的轴的入射光线，经抛物线上的一点反射后，都集中到对称轴上的一点，这点被称为"焦点"，意为聚焦光线的点（图3）。这样焦点处的电磁波强度明显加强，从而更好地接收外来信号。

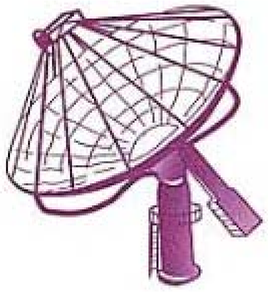


图 2 雷达接收器

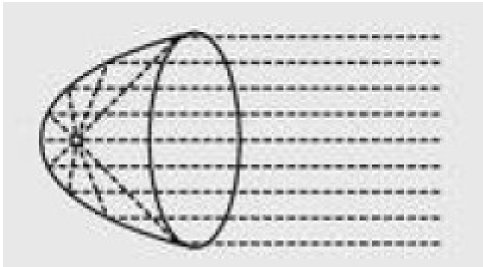


图 3 抛物线的聚光性质

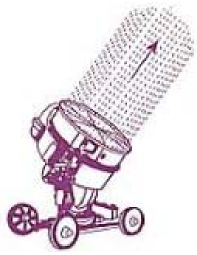


图 4 探照灯

反之，从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴。探照灯（图4）是利用这个原理制成的。我们现在研究具有这种光学性质的抛物线到底是怎样的曲线。如图5，光源在焦点 F 处，P 为抛物线上任意一点，FP 为入射光线，PM 为平行于对称轴的反射光线，下面我们来研究点 P 的性质。

为此，先得到一个光学知识，如图6。

首先请同学们回答一个光学问题：光源 S 发出的一条光线经平面镜 C 反射后经过点 T，请在平面镜 C 上确定反射点 Q。

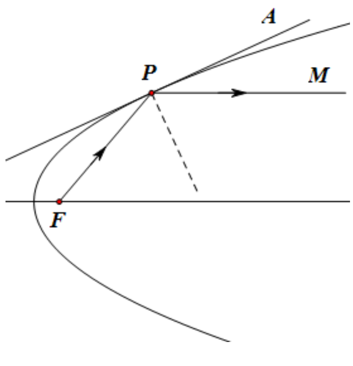


图 5 抛物线光学性质

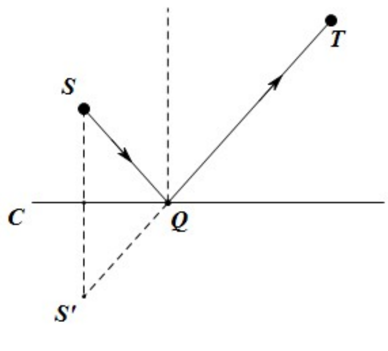


图 6 光的平面镜反射性质

（学生可能回答：作点 S 关于平面镜的对称点 S'，连接 TS'，与平面镜的交点就是 Q。）

S' 在光学中被称为虚光源，反射光线相当于是由 S' 直接射出的。

现在我们再来看抛物线（图7），作光源 F 关于反射面 PA 对称的虚光源 F'，则

$PF = PF'$。图8表示当点P在抛物线上其他一些位置时，虚光源F'的对应位置，请同学们观察并推断，当点P取遍抛物线上的所有点时，对应虚光源F'的点构成了什么图形？（学生可能回答：直线）

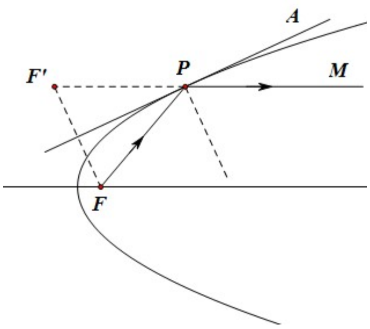


图 7 抛物面镜的虚光源

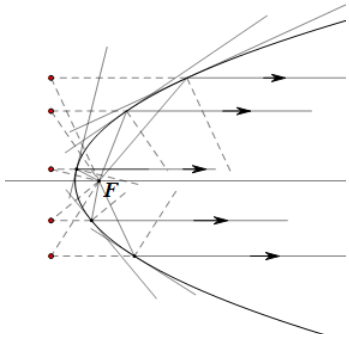


图 8 多个抛物面镜的虚光源

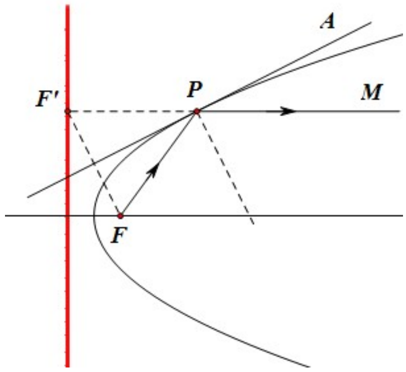


图 9 抛物线准线的形成

当点P在抛物线上移动时，虚光源F'的轨迹确实是一条直线（图9）。所有平行于对称轴的反射光都可看做从这条直线上直接射出，这条直线称为抛物线的准线，由此我们可以得到，抛物线是平面上与一个定点F和一条定直线l（F不在l上）的距离相等的点的轨迹。

抛物线概念的引入 设计2

在初中所学的函数内容中，抛物线是一元二次函数的图像，但只涉及到了对称轴平行于y轴（开口向上或向下）的情形。如果抛物线的对称轴不平行于y轴，那么就不能作为二次函数的图像来研究了，所以我们要跳出函数的限制，从曲线与方程的角度认识抛物线，从更一般的意义上加以研究。

为了认识抛物线是满足什么条件的动点的轨迹，我们可以从研究最简单的二次函数$y = ax^2$所决定的抛物线的性质入手：

问题1：已知抛物线 $y=ax^2\left(a>0\right)$，试问抛物线上任意一点 P 到定点 $F\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ 和到定直线 l ： $y=-\dfrac{1}{4a}$ 的距离有什么关系？

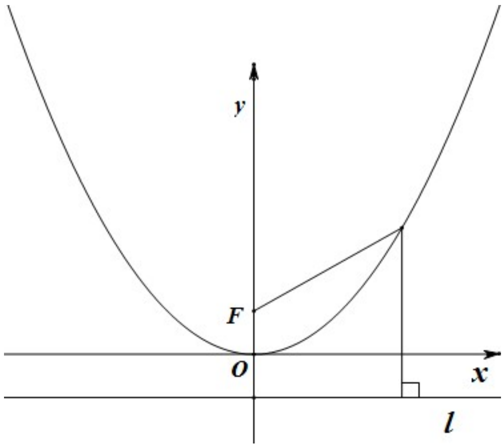


图 10 二次函数图像

如图图10 二次函数图设抛物线上任意一点 $P\left(x,ax^2\right)$ ，则 P 到 l 的距离为 $\left|ax^2-\left(-\dfrac{1}{4a}\right)\right|=\left|ax^2+\dfrac{1}{4a}\right|$，点 P 到点 F 的距离为 $\sqrt{x^2+\left(ax^2-\dfrac{1}{4a}\right)^2}=\sqrt{\left(ax^2+\dfrac{1}{4a}\right)^2}$ $=\left|ax^2+\dfrac{1}{4a}\right|$，所以，抛物线上任意一点到已知定点和已知定直线的距离相等。

我们给出抛物线的定义：平面上与一个定点 F 和一条定直线 l （F 不在 l 上）的距离相等的点的轨迹叫做抛物线。点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线。

抛物线概念的引入教学设计 3

抛物线在实际生活中是很常见的曲线，从它的名称中可以看出，平抛物体或斜抛物体的运动轨道都是抛物线的一部分。传说阿基米德用旋转抛物面状的“火镜”点燃港口中敌人的战舰，而古希腊人是通过用一个平面截圆锥所得的截面来认识抛物线的，所以抛物线又叫做一种圆锥曲线。

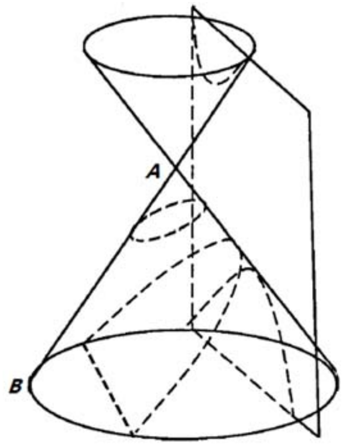
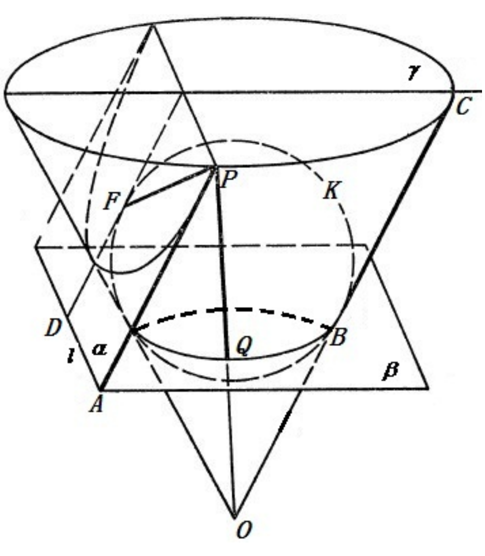


图 11 平面截圆锥　　　　　　　　图 12 旦德林球道具

请说出图11中的哪条曲线是抛物线？（学生讨论）

古希腊人用平面截圆锥的方式定义圆锥曲线，当截平面与圆锥的一条母线平行时，所得的交线被命名为抛物线。经过两千多年的历史发展，现在我们常常把抛物线定义为：平面上与一个定点F和一条直线l（F不在l上）的距离相等的点的轨迹。这和历史上最初发现的抛物线有什么联系呢？我们先来做一个实验。（教师使用实物做演示）



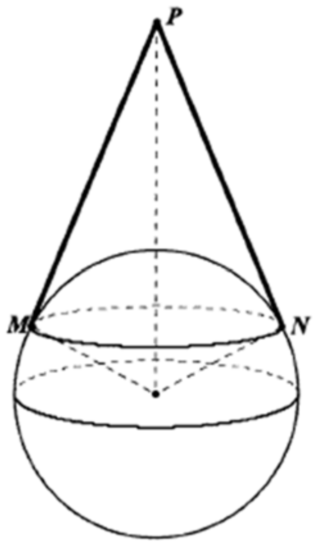


图 13 旦德林球法示意图　　　　　　　　图 14 球面的切线

用网球和抛物线形的纸片可以模拟一个平面截圆锥的情形。图12是这个实验的示意图。如图所示：抛物线所在的平面α平行于圆锥的母线OC。球K与面α相切于点F，球K与圆锥相切所得的圆在平面β内，平面β与平面α的交线为直线l。母线OP、OC分别与相切所得的圆相交于点Q、B。

点P为抛物线上的任意一点，连接PF，并过点P作直线l的垂线段PA。下面我们来

研究线段 PF 与 PA 之间的关系。

为此，先得到一个预备知识，如图14。

过球外一点 P 作球的切线 PM 、 PN ，切点分别为点 M 、 N ，则很容易得到 $PM = PN$ ，这可以看作是圆的切线长定理在球上的推广。

我们继续看图13。从实验中可以发现， PF 与 PQ 分别与球 K 相切，根据预备知识得 $PF = PQ$ 。

PQ 和 CB 是由两个平行平面 β 和 γ 截圆锥的两条母线 PO 和 CO 得到的，所以 $PQ = CB$ 。

由于对称轴 $FD \perp l$ ， $PA \perp l$ ，则 $PA \parallel FD$ 。另外 $FD \parallel CB$ ，所以 $PA \parallel CB$ ，则 $CB = PA$ 。那么 $PF = PQ = CB = PA$ 。这说明抛物线上任意一点 P 到点 F 的距离等于到直线 l 的距离。

由此我们可以得到抛物线是到定点 F 和到定直线 l 距离相等的点的轨迹，点 F 为抛物线的焦点，直线 l 为抛物线的准线。这是课本上抛物线的定义，这样定义的好处在于把抛物线定义为一种平面轨迹，而不借助于立体图形。虽然古希腊人对抛物线进行了详尽的研究，但直到19世纪，数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794-1847）用这样一个“旦德林球”模型连接了这两种定义。

抛物线实际应用的教学设计

前面我们学习了抛物线的轨迹定义和标准方程，这节课我们一起来探究抛物线在实际生活中的应用。请大家看以下几幅图，判断是什么图形？（幻灯片导入）

图 15 抛掷物体

图 16 美国圣路易斯拱门

图 17 冷却塔

图 18 自然下垂的铁链

（学生可能回答：都是抛物线）

从外形上来看，图片中的曲线都是抛物线，但事实上，除了图之外，其他都不是抛物线，图16、图18都是悬链线，图17是双曲线，说明仅从外形上进行判断，很难得到正确的结果。历史上，人们一开始也是从外形上判断被抛掷物体的运动轨迹，14世纪的大炮在欧洲战场上被逐渐使用，人们愈加重视对其射程的判断和控制，但由于炮弹射出之后，脱离了人的视线，所以在当时确定其运动轨迹是非常困难的。人们通过肉眼的观察，认为炮弹被斜抛出去之后的轨迹是由两段直线和一段圆弧组成的，如图19所示。

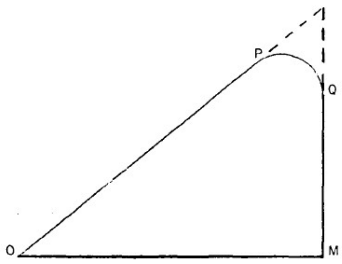


图 19 直线式的抛物轨迹

但现在我们都知道物体作斜抛运动的轨迹是抛物线，那么如何用所学的数学知识严格地解释这一事实呢？（学生讨论）

这一实际问题可转化为一个数学问题：一个物体向斜上方抛出，抛出时的速度大小为 V_0，方向与水平方向的夹角为 α 。假如只考虑重力，不计空气阻力。求证斜抛物体的运动轨道是抛物线的一部分。

（学生分组进行讨论）

学生主要采用如下两种建系方式：

法一：

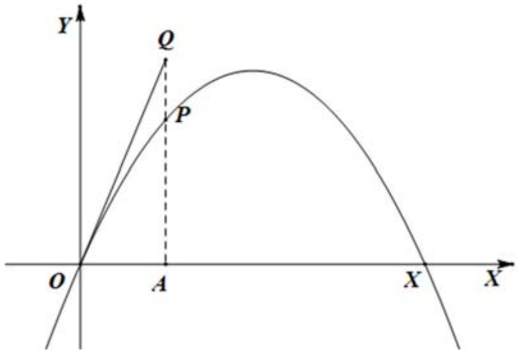


图 20 以运动出发点为坐标原点

如图所示，以物体运动的起点为原点O，初始速度为v，与OX成角度α。若无重力作用，物体沿直线OQ运动，t秒之后到达点Q，则$OQ=vt$，但在重力作用下，t秒内物体从点Q降落至点P，$QP=\frac{1}{2}gt^2$。因此点P的横坐标和纵坐标分别为：

$$\begin{cases} x = vt\cos\alpha \\ y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去t得：$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$ 。

由于形如$Ax^2+Bx+cy+D=0$的方程的曲线是抛物线，所以物体作斜抛运动的轨迹是抛物线。

法二：

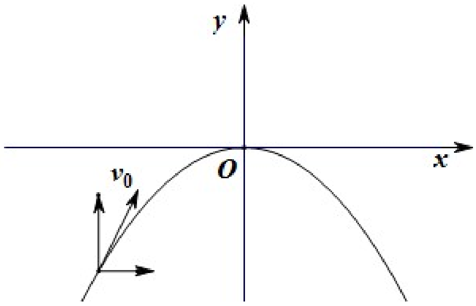


图 21 以运动最高点为坐标原点

如图21所示，在运动轨道所在的平面内建立直角坐标系，为了得到开口向下的抛物线标准方程，在建系时不从物体抛出时开始计算时间和坐标，而是以物体达到的最高点定为为原点O，x轴的正方向为物体的前进方向，y轴的正方向为竖直向上。

将斜抛物体的运动分解为水平方向和竖直方向。水平方向没有受力，运动为匀速运动，

速度大小为$v_0\cos\alpha$。以物体在点O的时刻为0，则经过t秒之后的x坐标为$x=\left(v_0\cos\alpha\right)t$。物体在$y$轴方向上有重力加速度，则时刻$t$时的$y$坐标为$y=-\frac{1}{2}gt^2$。因此，在时刻$t$时物体的位置坐标$\left(x,y\right)=\left(v_0t\cos\alpha,-\frac{1}{2}gt^2\right)$。

由$x=v_0t\cos\alpha$解出$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$，代入$y$坐标表达式得$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2$，即$x^2=-\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}y$。具有抛物线的标准方程$x^2=-2py$的形式，其中$p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$。这证明了斜抛物体的运动轨道是抛物线，这个抛物线的焦点与准线之间的距离$p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$。

然后我们再看一个抛物线在实际生活中的应用实例。（幻灯片导入）

图 22 太阳灶

图 23 雷达接收器

图22中的太阳灶和图23中的雷达接收器的外形都像一个“大碗”，这种镜面是由抛物线绕其对称轴旋转而成的，运用了抛物线特有的聚光性质：平行于抛物线的轴的入射光线，经抛物线上的一点反射后，都集中到对称轴上的焦点。所以电视信号接收器焦点处的电磁波强度明显强于其他位置，这样能更好的接收电视信号，这一性质早已被古希腊人应用于战争中。传说古希腊的阿基米德曾用一面“火镜”点燃港口中敌人的战舰，现在请同学们设计这样一面可以点燃离镜子100米处的战舰的“火镜”，这样的镜子有多大？（学生讨论）

学生主要采用了如下建系方式：

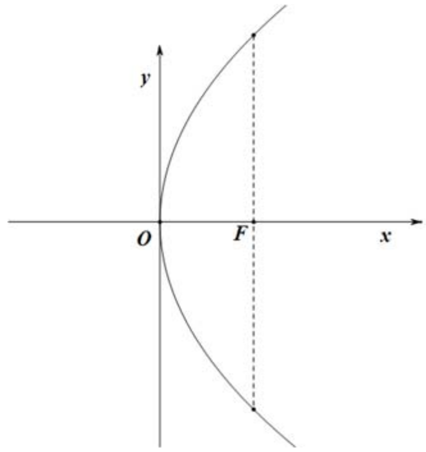


图 24 火镜纵截面

如图24所示，取抛物线的开口水平向右，顶点为原点O，则由题意可知，$\dfrac{p}{2}=100$，则抛物线的标准方程为$y^2=400x$。若镜子的深度为抛物线的焦点到顶点的距离，则镜子的开口半径为$\sqrt{400\cdot 100}=200m$,开口面积为$4\times 10^4 m^2$。

但在当时的条件下，制造一面开口半径为$200m$的镜子是相当有困难的，所以故事的真实度有待考量。

5 问卷调查与课堂实施

为了了解学生和老师对上述教学设计的接受程度，本文对上海市三所重点高中的 477 名学生和 21 名教师进行问卷调查和个别访谈。并由笔者本人将抛物线的概念引入设计 2 在上海市某公办中学的一个高二课堂上付诸教学实践，课后对学生进行即时地反馈调查，回收问卷 38 份，并访谈了其中 3 名学生，由于该校为普通高中，教师认为探究光学性质的过程过于复杂，担心学生跟不上教师的节奏。

由图25可以看出，在三种基于发生教学法的抛物线概念教学设计中，学生对通过探究抛物线的光学性质的方式评价最高，然后是由一元二次函数图像性质引入，但两者差距不大，也有小部分的学生倾向于现行教材中直接给出轨迹定义的方式。相比于学生的选择多样性，绝大部分教师更接受采用抛物线的光学性质引入轨迹定义，认为能更好地帮助学生理解焦点和准线这两个量。部分教师愿意尝试抛物线应用的发生教学设计，但由于课程进度和评价方式等原因，更多老师倾向于在拓展课上介绍。

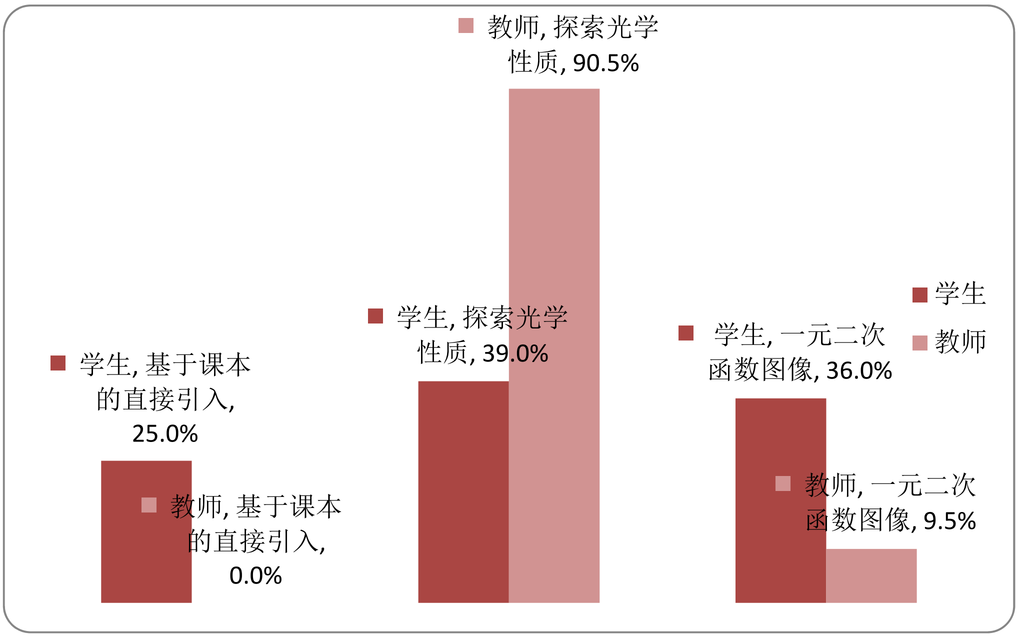


图 25 抛物线概念引入方式的师生倾向性比较

学生在课堂上的反应以及课后的反馈表明，学生完全能跟上笔者的节奏并能理解整个过程。在探究过程中，学生地积极思考和回答，即使有困难的部分，通过笔者的引导，均能给出正确答案，数学学习的信心得到提高。以下为对某学生的访谈片断。

师：今天课上讲的概念引入可以理解吗？

生：当然可以，没有问题。

师：现在知道定义中的“焦点”和“准线”是从何而来的吗？

生：恩……焦点就是光聚焦的那个点，准线就是虚光源组成的点。

师：本节课中的概念引入方式与之前的上课方式你觉得哪个好？

生：这个好，以前都没有说概念是怎么来的。

师：那你想了解数学概念是怎么来的吗？

生：当然咯，不然很无聊的，背又背不出来，但平时做题目比较多，概念也不太注意。

在课前的访谈中，部分高中教师表示主观上是愿意尝试这种教学方式，但这种教学方式所花费的时间偏多，少则十五分钟，多则二十几分钟，对于概念讲解来说有点浪费。但笔者在教学实践中，通过几何画板等多媒体技术的支持，仅用九分钟就完成了概念引入和讲解，过程中笔者与学生的互动颇多，学生的兴趣和注意力均得到了激发和集中，课堂气氛很热烈。学生在课后的反馈中表示，在概念引入和解释上花时间是值得的，不会是浪费。

6 结论

在高考和教学进度的压力之下，教师在概念部分的教学都很“赶”，急于进入概念应用和解题技巧的讲授中去，从而让学生逐渐认为做题目是最重要的，这与数学教育的目标相左。

从结果上看，仅通过一次教学实践，就发现学生对发生教学的认可，说明发生教学在高中数学的教学中是有用武之地的。最终还是需要教师关注发生教学，选择适当课题，通过精心设计，使更多学生得到“再创造”知识的机会。

参考文献

[1] Boyer, C. B. 1956. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica

[2] Coolidge, J. L. 1968. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Dover Publications, 1-37

[3] Polya G. 1965. *Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. (vol. 2). New York: John Wiley& Sons

[4] Safuanov, I. S. 2005. The genetic approach to the teaching of algebra at universities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3): 255-268

Swetz, Frank. 1995. An historical example of mathematical modeling: the trajectory of a cannonball. *In Learn from the masters*, Edited by: Swetz, F. 93–101

洪万生老师访谈小记

黄友初

（浙江温州大学数学与信息科学学院，温州，325035

华东师范大学数学系，上海，200241）

洪万生老师是国际著名的数学史家，在中国数学史的研究方面有很高的造诣，他也是数学史与数学教育（简称 HPM）研究的专家，他和他的研究团队在台湾进行数学教育融入数学史的研究和实践，取得了一系列的研究成果，他所创办的《HPM 通讯》，也为数学教育界所熟知。

一直以来，都希望有一个机会能和洪老师聊聊 HPM 的研究，听听大师对 HPM 研究的看法。来台一个月后，终于等到了这一天，四月的一天上午我在台湾师范大学公馆校区的数学馆见到了洪老师。洪老师很热情，见面后送了我一套纸质版的《HPM 通讯》，这让我放松了不少。在简单的介绍了大陆的数学史和 HPM 研究情况后，我就 HPM 研究中关心的一些问题向洪老师进行了请教，他对每个问题都很认真的回答。根据访谈的内容，我将其整理成以下四个部分。

1 HPM 研究的数学史和数学教育

HPM 是数学史和数学教育两者的结合体，但是这两者又属于不同的学科，在研究对象、研究方法上有较大的差异。对于 HPM 的研究者来说，数学史素养和数学教育素质都是不可或缺的，但是在 HPM 研究者的成长过程中，这两者之间该如何平衡，是很多研究者所困扰着的。

对此，洪万生老师认为，对于 HPM 研究者来说，具备一定的数学史素养是十分重要和必要的，虽然 HPM 研究者和专业的数学史研究者不同，他们不需要对每个知识点都做深入仔细的考究，甚至是一手文献的考究，但是研究者要能辨别史料真实性，并能掌握文献考证的基本方法，在需要验证史料的时候，能通过权威的文献做历史的考证。这不但能确保用于教育的数学史料的真实性，还能让研究者在这种考证过程中加深印象，更好体会知识点的发

展历程。

从学科上讲，HPM 属于教育学，研究的成果如果太偏重数学史，则很难在教育的重要期刊上发表，有关 HPM 的选题在申请研究资助方面也遇到较大的困难，这给 HPM 研究者的工作带来了较大的困难。

对此，洪老师说 HPM 研究在台湾还比较重视，这类议题还可以得到资助，至于发表文章的问题，研究者要具备国际视野。现在国际上很多杂志都接收 HPM 议题的论文，因此研究者可以多往国外投稿，积累研究成果和研究经验多了，科研发展的局面自然也就打开了。当然，这对母语为非英语的国家来说困难了点，但是年轻人应该要努力去尝试，要敢于走出去。

2 HPM 的发展趋势

应该说，目前的 HPM 在数学教育内还未能得到足够的重视，例如在一些高校的数学教育课程设置中数学史是可有可无的课程，而且目前从事 HPM 研究的人员并不多，HPM 今后的发展趋势会怎样？

洪老师认为，HPM 有很广阔的应用前景，目前在台湾的大学的是需要开设通识课程的，例如开设《数学史》、《数学文化》、《数学欣赏》、《数学与思维》等课程，在中小学也要开设类似的选修课程，而 HPM 研究者在这些课程的胜任方面，要比其他方向的研究者要来的更有优势。至于一些人对 HPM 还不是很了解，这是正常的现象，要让更多的正确的认识 HPM 工作，需要广大 HPM 的研究者与实践者更加努力的工作，无论在科研成果上，还是实际教学效果上都有突出表现，让大家看到 HPM 的教育价值，以及在数学教育中的不可替代性。

交流合作对学术研究是十分重要的，因此洪老师认为除了 HPM 研究者相互交流、合作以外，HPM 的研究可以也需要，从其它的教育研究中吸收有益的养分，丰富 HPM 的研究方法、研究视角。将来的 HPM 研究中，无论是在数学史对学生数学信念的影响方面，数学教科书中数学史的融合方面，还是在数学史对数学教师的影响方面，只要研究方法得当，HPM 的研究结果都能得到认可。

3 教师教育中的 HPM

高校的 HPM 研究者，在教学中面对的一般都是职前或者职后的数学教师，这些教师都普遍赞同数学史的教育价值，但是在实际的教学中又很少有数学史的痕迹，究其原因大多是

教师的数学史知识还不够丰富，但是数学史知识浩如烟海，如何在教师教育中提升数学教师的 HPM 素养。

洪老师认为，数学史知识不可能通过课堂教学就能讲完，但是可以向教师介绍数学发展的基本脉络，有必要让教师认识到数学史的教育价值，进而让他（她）们学生学会自己去找适合教学的数学史料的途径。对一些历史上经典的历史事件，也可以作为专题向教师介绍，加深他（她）们的影响。

至于，知识点的历史，洪老师认为并不是所有的知识点都有完整的发展史的，而且直接把现成的东西给老师也不见得是好事，应该鼓励教师自己动手获取，或者是教师在 HPM 研究者一定程度的帮助下自己动手获取。只有这样，教师对知识点的理解才会更深刻，将来数学教学时候也会更有感触。

4 数学文化与数学史的关系

随着近年来数学文化的流行，很多人开始思考数学文化和数学史的关系，有人认为数学文化应该包括数学史，但也有人认为从发展的时间上看，数学史的研究显然要早于数学文化的研究，数学史是独立的学科，这二者之间究竟是何种关系？

洪老师认为学者对数学史的研究确实要早于对数学文化的研究，数学史也有严格的定义，规范的研究方法，因此数学史是一门学科。而数学文化还不能看做是一门学科，从广义上说和数学相关的一切事物都可以归为数学文化的范畴。范围大了，规范性必然也将减弱，因此数学文化只是一个称谓，还不能说是一门学科。数学文化包含数学史，这种说法也没有问题，因为这仅仅是一种称谓，还不涉及到学科之间的包含关系。

5 后记

在我对洪老师进行访谈不久，洪老师的学生，也是 HPM 研究专家苏意雯老师也应邀前来，后来另一位 HPM 学者刘柏宏老师也加入讨论中。洪老师还带我们到台湾师大门口的一家咖啡店，请我们三位吃午餐。很庆幸，能和三位 HPM 专家在台北的一家咖啡厅聚集，从他们身上我学到了谦逊和严谨，也看到了 HPM 发展的广阔前景。洪老师的和蔼，以及对年轻人的关爱和鼓励，更让我难以忘怀。