

# HPM 视角下的“演绎证明”教学<sup>\*</sup>

贾 彬<sup>1</sup>, 栗小妮<sup>2</sup>

(1. 上海市建平远翔学校, 200129; 2. 华东师范大学教师教育学院, 200062)

**摘 要:**从 HPM 视角设计“演绎证明”的教学:结合生活实例,回顾“对顶角相等”的证明,理解证明的含义,了解因果关系的表述,知道演绎证明的基本过程;通过探究“三角形内角和等于  $180^\circ$ ”的证明,体会演绎证明的一般步骤;通过“证明的由来”“达尔文的故事”“《几何原本》的魅力”等数学史的融入,了解演绎证明的起源和价值,认识几何学习对于培养理性思维的意义,激发学习几何的兴趣。课后学生问卷反馈表明,这节课体现了 HPM 的“知识之谱”“文化之魅”和“德育之效”。

**关键词:**HPM 演绎证明 起源 价值 教学设计

平面几何是初中数学课程的重要组成部分,对于学生培养逻辑思维能力、提高理性思维水平具有不可或缺的作用,还有利于学生形成科学的世界观和价值观以及良好的思维习惯等。

现行人教版、苏科版以及沪教版教材均采用从实验几何逐步过渡到论证几何的编排方式,均安排了有关“证明”或“演绎证明”的内容,作为过渡的起始课。三个版本的教材

给出的“证明”或“演绎证明”的定义虽不完全相同,但都蕴含公理化体系思想,强调其主要是由已知事实或结论推理未知结论成立的过程。

教学沪教版教材中的“演绎证明”内容之前,学生在实验几何阶段已经学习了相交线、平行线、三角形等相关知识,对几何证明具有一定的认识和体验,但是对演绎证明的含义和价值不甚了了。基于此,我们从 HPM 视角

设计了本节课的教学,预设了如下教学目标:

(1)结合生活实例,回顾“对顶角相等”的证明,理解证明的含义,了解因果关系的表述,知道演绎证明的基本过程。(2)通过探究“三角形内角和等于 $180^{\circ}$ ”的证明,体会演绎证明的一般步骤。(3)通过数学史的融入,了解演绎证明的起源和价值,认识几何学习对于培养理性思维的意义,激发学习几何的兴趣。

## 一、历史素材选择

### (一)证明的由来

公元前6世纪,古希腊数学家、哲学家泰勒斯证明了几条几何定理:直径把圆平分、等腰三角形的底角相等、对顶角相等……泰勒斯证明这些看起来直观、容易的定理,目的在于利用证明来说服别人。古希腊城邦实行“奴隶主民主政治”。这种“小民主制度”也需要选举,于是就有了说服别人(争取选票)的需要。这种社会文化反映在数学上便成了证明的由来。

匈牙利数学史家查保认为,古希腊数学证明的产生是受到古希腊哲学,尤其是公元前5世纪的厄里亚辩证学派推动的。当时的哲学家在进行辩论时,论点都是基于某些双方都愿意接纳、不需要说明的基本命题(称为“假说”)的。碰到一些对方不愿意接纳的命题时,一方要先请求另一方接纳这些假说,再基于这些假说展开论证。这里的“假说”后来转变为我们现在称作的“公理”。这是数学公理化模式的一个可能起源。

公元前3世纪,欧几里得写成了不朽巨著《几何原本》,他从一些基本定义与公理出发,以合乎逻辑的演绎手法推导出了四百多条定理,从而奠定了数学证明的模式。

选择理由:这段史料清晰地阐述了证明

的由来(作用),那就是“用它们来说服别人”。

### (二)达尔文的故事

有一个农场主,他的猪总是养不胖,因此他忧心忡忡。这件事被博物学家达尔文(C. Darwin, 1809~1882)知道了,他告诉农场主:多养猫,猪就会胖起来。理由是猫吃田鼠,多养猫便少田鼠;田鼠吃土蜂,少田鼠便多土蜂;土蜂传播三叶草,多土蜂便多三叶草;猪吃三叶草,多吃三叶草,猪便会胖起来。

选择理由:这段史料看上去与数学无关,但是说明了证明不仅仅局限于数学。实际上,生活推理实例更有利于学生对逻辑推理的理解和对证明作用的领会。

### (三)《几何原本》的魅力

2017年12月19日,中华新闻网上有这样一篇报道:满文版的《几何原本》在内蒙古呼和浩特展出,其中留有清朝康熙皇帝学习时记录的笔记。

美国总统林肯(A. Lincoln, 1809~1865)在当总统前是一名律师,他的身边常伴有《几何原本》,一有机会就会拿出来阅读并研究,直到能够熟练地证明前6卷中的所有命题。他认为,《几何原本》中的演绎证明可以使人思维严谨缜密,表达条理清楚,这对于他的律师职业、议员工作和总统竞选都有帮助。

选择理由:欧几里得的《几何原本》所建立的证明模式对人类文化影响至深,不仅限于数学,更旁及其他文化领域。

## 二、教学设计与实施

### (一)结合生活实例,引入数学证明

生活中我们会经常用到“证明”一词,但此“证明”与数学中的“演绎证明”并不相同。本环节从学生的生活实例引入,在学生已有的关于生活中“证明”的经验基础之上,引出

数学中的“演绎证明”——

师 我觉得 A 同学的身高是我们班最高的。

你认为我说的对吗？

生 不是，B 同学才是。

师 怎么证明？

生 站在一起比一比就知道了。

(A、B 两位学生站在讲台上比身高，学生 B 比较高。)

师 的确是 B 同学比较高。这里，大家是通过举例来说服别人的。(在黑板上画一个接近直角的角)我认为，黑板上这个角是直角。你觉得呢？

生 是。

生 不是。

生 看起来像是，要量一量才知道。

(这位学生上讲台用量角器测量，结果为  $88^\circ$ 。)

师 刚才我们通过测量来得到实际的数据，这是通过具体的数据来说服别人。我说，钓鱼岛是我国不可分割的领土。你认为对吗？

生 那当然。

师 我们怎么证明？

生 有历史资料记载。

师 我们是通过历史资料的记载来证实这一观点的。一般来说，证明是指根据确实的材料判明人或事物的真实性。而在数学中，对数学结论的正确性进行证明，还有更为严格的形式。

(二)利用数学结论，感知演绎证明

本环节通过回顾“对顶角相等”的证明，让学生感知数学中的“演绎证明”。通过不断追问，让学生慢慢感悟证明一个文字命题的一般步骤：(1)画图，写出已知、求证；(2)进行

证明，并在证明的每一步后面写上推理的依据。让学生初步了解观察、测量和演绎证明之间区别和联系；演绎证明是最令人信服的，观察和测量的结果虽然不是令人信服的结论，但却是发现结论、进行猜想的重要途径，猜想出的结论是否正确需要通过演绎证明来确认。具体教学过程如下：

师 七年级我们学习了“对顶角相等”，请问如何证明“对顶角相等”？

生 要先画个图，画两条直线相交。

师 (在黑板上画直线  $AB$ 、 $CD$  相交于点  $O$ ，如图 1)你要求画的这幅图需要交代一下吗？

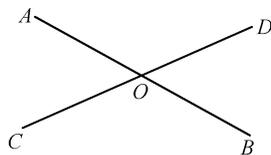


图 1

生 (点头)直线  $AB$ 、 $CD$  相交于点  $O$ 。

师 你交代的这句话能给个名称吗？

生 已知。

师 你的“已知”是从哪里来的？

生 画图来的。

师 根据图形写出来的已知，要加上“如图”二字。接着可以开始证明了吗？我们要证明什么呢？

生 我们要证明一对对顶角相等，也就是  $\angle AOC = \angle BOD$ 。

师 我们要证明的目标也给它一个名称，叫“求证”。结合图形，你有哪些方法证明  $\angle AOC$  与  $\angle BOD$  相等呢？用“看”行吗？

生 不行，比如刚才的角，看着像直角，但实际测量出来不是直角。

师 那用“量”行吗？

生 也不行，因为度量会有误差。

生 并不是每一个问题都能通过度量解决。

师 那用什么办法？

生 因为直线  $AB$ 、 $CD$  相交于点  $O$ 。

师 哪来的？

生 已知的。所以  $\angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$ ，  
 $\angle BOD + \angle AOD = 180^\circ$ 。

师 你怎么知道的呢？

生 它们组成了平角，根据平角的概念可知。  
所以  $\angle AOC = \angle BOD$ 。

师 这个结论你又是怎么知道的呢？

生 等式的性质， $\angle AOC$  和  $\angle BOD$  都与  
 $\angle AOD$  相加得  $180^\circ$ ，它们当然相等。

师 这个理由成立。像这样不凭任何个人的  
感觉，而是从已知的概念、条件出发，依  
据已经确认的事实和公认的逻辑规则，  
推导出某结论为正确的过程，我们称为  
演绎证明。和看、量相比，这种推理方式  
更能令人信服。

### (三) 融入历史素材，理解演绎证明

本环节利用历史素材，让学生理解演绎  
证明的价值——

师 历史上第一位具有“利用演绎推理进行  
证明”的意识并用它来思考、解决问题  
的人非常伟大。那么，是谁最早具有这  
种意识？数学证明从何而来呢？我们  
为什么要学习证明呢？

(播放视频“证明的由来”，让学生了解  
证明的由来，并认识数学家泰勒斯和  
欧几里得以及数学经典《几何原本》。  
然后，以推理的形式讲述达尔文的故事，  
将理由逐条呈现，让学生体会演绎证  
明的推理模式在生活中的运用。)

### (四) 运用新知识，实践演绎证明

本环节在学生已经知道并理解演绎证明

的基础上，利用学生已经学过的“三角形内角  
和等于  $180^\circ$ ”，通过操作验证和演绎证明，让  
学生再次体会操作验证和演绎证明之间的  
区别和联系以及演绎证明的一般步骤——

师 (给每一位学生发一张三角形彩色纸片)  
帕斯卡在八岁时，就通过一张简单的纸  
片发现了三角形内角和等于  $180^\circ$ 。现在  
请你们通过自己的方式，利用手中的三  
角形彩色纸片来验证三角形内角和等  
于  $180^\circ$ 。

(学生活动，部分学生采用剪的操作，部  
分学生采用折的操作。教师将学生的成  
果展示在教室侧面的白板上。)

师 我更喜欢折的操作，因为更环保，纸片还  
可以再利用。(稍停)现在请你们在小组  
内讨论并完成“三角形内角和等于  $180^\circ$ ”  
的演绎证明。

(学生活动。一位学生展示利用三角形  
外角的性质“三角形的一个外角等于与  
它不相邻的两个内角之和”来证明的  
方法。)

师 按照教材中的几何体系，“三角形的一个  
外角等于与它不相邻的两个内角之和”  
是由三角形内角和定理推导而来的。这  
里用它来证明三角形内角和定理，是典  
型的循环论证，不具有说服力，因为证明  
必须基于——

生 已经公认的事实或结论。

(学生继续展示。教师完善证明方法，  
如下。)

方法 1 如图 2，过点  $A$  作  $BC$  的平行线，  
构造两组相等的内错角  $\angle B = \angle DAB$ ， $\angle C =$   
 $\angle EAC$ ，将三角形的三个内角转化为一个平  
角，得证。

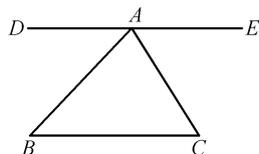


图 2

方法 2 如图 3,过点 C 作 AB 的平行线,构造一对相等的内错角  $\angle A = \angle ACD$ , 一对互补的同旁内角  $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$ , 将三角形的三个内角转化为这一对互补的同旁内角,得证。

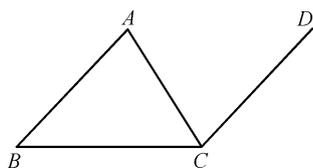


图 3

师 用第一种方法证明的同学非常了不起,因为你们的方法和毕达哥拉斯学派的方法一样。(出示图 4)在第二种方法中,若延长 BC 到 E,将  $\angle B$  转化为  $\angle ECD$ ,则三角形的三个内角就可以转化为以 C 为顶点的一个平角,这种方法就是欧几里得在《几何原本》中运用的方法。你们将三角形的三个内角转化为一对互补的同旁内角,想到了古人没有想到的方法,超越了古人,真棒!历史上还有很多不同的证明方法,同学们课后可以继续探究。

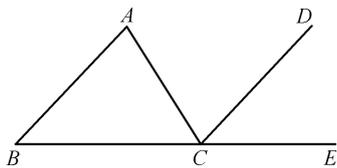


图 4

最后,鉴于学生初中所学的几何属于欧氏几何,教师向学生介绍了《几何原本》以及我国清朝康熙皇帝、美国总统林肯学习《几何原本》的故事,展示了“《几何原本》的魅力”;

并指出“《几何原本》成就了林肯的人生,如果你对它感兴趣,它也会成就你的人生”,以期点亮学生对几何以及《几何原本》的兴趣之光。

### 三、学生反馈

课后,我们对全班 39 名学生进行了问卷调查。

对于“请用自己的语言描述什么是演绎证明”一题,有 26 名学生能够理解演绎证明的含义,虽然描述方式不尽相同,但基本认为演绎证明是“从已知的公理、定理出发,用严密的推理来得到让人信服的结论”,初步具备公理化体系思想。

对于“请用自己的语言说明演绎证明有什么作用”一题,有 32 名学生认为演绎证明是最可靠的,因为它“有理有据,逻辑严密”,还有 7 名学生认为演绎证明没有误差和错觉,比观察和测量更可靠。所有学生都能够理解证明的作用在于“使人信服”。

对于本节课印象最深的环节,学生提到的有“证明的由来”“达尔文的故事”“三角形内角和的探究”“两位同学比身高”“钓鱼岛”“认识很多数学家”等,其中被提到最多的是前三者。这说明数学课堂中融入人性化的内容往往会给学生留下深刻的印象,数学课堂中的探究活动可以让学生自主生成知识并深度理解知识。

从学生问卷反馈可知,本节课作为从实验几何过渡到论证几何的起始课,以激发学生学习的兴趣为出发点,运用数学史料,融入大量人文元素,较好地达成了相应的教学目标。

### 四、教学反思

从数学练习的角度看,本节课只证明了

两个学生早就知道的定理,没有其他关于证明的习题。但本节课最重要的价值在于数学史的融入使原本枯燥的几何课变得人性化,让学生切实体会到了学习几何的价值,激发了学生学习几何的兴趣,体现了 HPM 的“知识之谐”“文化之魅”和“德育之效”。

视频“证明的由来”让学生不仅认识了几何学鼻祖泰勒斯和欧几里得,还明白了证明的作用——说服别人,从而知道了为什么要学习证明;同时,让一些学生体会到人类的理性精神,感悟到生活中说话、做事同样需要有理有据,不可凭空臆测。学生只有知其因,才能思其义,从而正其心,究其道。

“达尔文的故事”让学生体会到“学有所用”并不是一种口号,而是真实存在的,感悟到数学来源于生活,学好数学可以为生活服务,提高生活的质量。

“《几何原本》的魅力”展示了逻辑推理(清晰、缜密、有条理的思考)对于康熙皇帝和林肯总统的吸引和成就,通过榜样的激励,有助于学生树立远大的学习目标。

另外,在探究“三角形内角和等于  $180^\circ$ ”证明方法的环节,指出学生所用证法与历史上数学家所用证法的不谋而合,让学生体会

到与古代数学家进行跨越时空的学术交流的惊奇感受,提升了学习数学的信心,增强了学习数学的兴趣。

除了历史材料所蕴含的丰富德育价值外,在引入环节,提到“钓鱼岛是我国不可分割的领土”,渗透了爱国情感的培养;在三角形纸片操作验证环节,指出“我更喜欢折的操作,因为更环保,纸片还可以再利用”,渗透了环保意识的培养;在“感知演绎证明”环节,让学生证明以文字形式表达的数学命题,有助于学生积累转化(“翻译”)的经验。

---

\* 本文系本刊连载的汪晓勤教授团队开发的 HPM 案例之一。

#### 参考文献:

- [1] 田载今. 应继续重视几何教学的理性特征[J]. 课程·教材·教法, 2004(7).
- [2] 鲍建生. 几何的教育价值与课程目标体系[J]. 教育研究, 2000(4).
- [3] 萧文强. 数学证明[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1990.
- [4] 萧文强. “欧先生”来华四百年[J]. 科学文化评论, 2007(6).