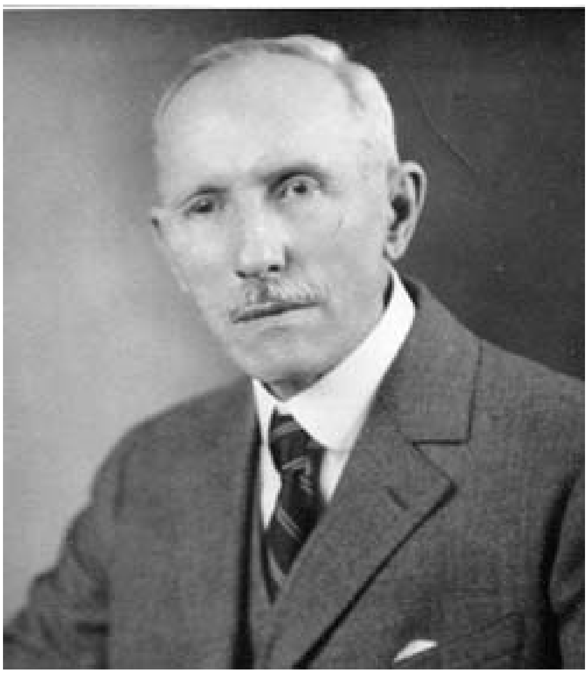
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2013 年第 2 卷第 3 期



弗洛里安·卡约黎

(Florian Cajori, 1859–1930)

刊首语

本期封面人物是美国数学史家卡约黎（Florian Cajori, 1859–1930）。

1859 年 2 月 28 日，卡约黎出生于瑞士格劳宾登州一个古老的望族。父亲乔治•卡约黎（George Cajori）是一位技术精湛的土木工程师，因建造重要桥梁与公路而闻名遐迩。卡约黎先在瑞士图西斯以南 7 公里处的齐利斯、后在格劳宾登州首府库尔的一所小学校接受早期教育，16 岁时中途辍学，来到美国，不久入美籍。

1876 年，卡约黎就读于威斯康辛州立师范学校，1878 年毕业后在一所乡村学校任教。但不久他就进威斯康辛大学数学专业学习。1883 年获理学学士学位，三年后获理学硕士学位。期间，从 1884 年 1 月至 1885 年 6 月的 18 个月时间里，他是约翰•霍普金斯大学数学专业的一名研究生。1885 年秋，卡约黎被新奥尔良的图兰大学聘为助理数学教授。1887 年，他被该校聘为应用数学教授。

然而，当地潮湿的气候使他患上了严重的肺结核。1889 年，他被迫离开图兰大学，北下气候宜人的科罗拉多斯普林斯市，寻求“延长自己的生命”。在那里，他接受了科罗拉多学院校长斯洛克姆（W. F. Slocum, 1851～1934）的邀请，成为该校的一名兼职教师，不久被聘为物理学教授。卡约黎热心地发起科学研究，创立了科罗拉多大学科学协会，并担任协会的秘书；创办学术刊物《科罗拉多学院院刊》，亲任执行编辑，发表协会的会议论文，内容涉及人类学、政治学、生物学、语言学、数学、数学史、古典学、物理学等多个学术领域。《科罗拉多学院院刊》的创办，大大促进了科罗拉多学院的学术研究，提升了学院的学术地位和国际声誉。科学协会的创立是卡约黎对科罗拉多学院所做的最大贡献之一。1896 年，令卡约黎名声大噪的是他在德国物理学家伦琴（W. C. Röntgen, 1845～1923）发现 X 光后不久即率先拍摄了一张 X 光照片。

此时的卡约黎风华正茂，崭露头角，成果迭出，相继出版多部有影响的数学史和物理学史著作。1896 年，他获得了图兰大学哲学博士学位。从 1898 年开始的 20 年间，卡约黎担任科罗拉多学院的数学教授。同时，他于 1903 年创建了工程系，并亲任系主任，直至 1918 年。1912 年，科罗拉多大学授予他荣誉法学博士学位。翌年，科罗拉多学院和威斯康星大学相继授予他荣誉法学博士学位和荣誉理学博士学位。

卡约黎在科罗拉多学院的最后几年里，学院发生了严重的危机。1917 年，校长斯洛克

姆退休离校，短短两年间，一个系主任遭解聘，三个系主任、八位教授、一位博物馆馆长相继辞职。卡约黎是辞职的三个系主任之一。

与此同时，加利福尼亚大学专门为卡约黎设立了一个数学史教授职位，这是美国历史上第一个数学史教授职位，也是世界上第一个同类职位。加利福尼亚大学数学史教授的诞生，与卡耐基科学研究所科学史研究员的聘任一样，成了当时美国科学人文主义运动的标志性事件。自此，他摆脱了行政事务的干扰，全身心投入教学与研究中。1929 年 7 月 1 日，卡约黎退休，成为荣誉退休教授。卸掉教学任务的卡约黎依然笔耕不辍。1930 年 8 月 14 日，因肺炎溘然长逝。这一年，加利福尼亚大学授予他荣誉法学博士学位。

卡约黎曾先后担任新奥尔良科学院科学 A 组（数学、物理学、天文学、测地学、力学、工程学）的秘书（1887-1888），全美教育协会“十人委员会”成员（1892）、美国几何大纲“十五人委员会”成员（1910-1913）、美国数学协会主席（1917）、美国科学促进会副主席和科学史与科学哲学分会主席（1923）、科学史学会副主席（1924-1925）、国际科学史委员会副主席（1929-1930），他也是美国数学会、美国数学教师协会、德国数学会、意大利巴勒莫数学协会等学术团体的重要会员，他还是美国艺术与科学研究院的研究员。

卡约黎是最早关注数学史与数学教育关系的美国学者之一，他的教育思想之一即是“学科历史为学科教育服务”。

首先，一门学科的历史知识乃是“使面包和黄油更加可口的蜂蜜”，“有助于使该学科更具吸引力”，能够激发学生学习兴趣、使他们树立正确的价值观。他在《数学史》前言里指出，数学史对于教师具有重要价值：“如果用历史回顾和历史轶事点缀枯燥的问题求解和几何证明，学生的学习兴趣就会大大增加。……通过历史的解说，教师可以让学生明白：数学并不是一门枯燥呆板的学科，而是一门不断进步的生动有趣的学科。”实际上，在他编写的数学教材中即包含数学史知识。

其次，一门学科的历史是这门学科的教学指南，因为学生的理解具有历史相似性：“学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难”。实际上，《初等数学史》是“为教育而历史”的典型例证，书中对算术、代数、几何与三角的历史考察，无不为寻求教学方法上的借鉴。例如，根据负数的历史，卡约黎得出结论：“在教代数的时候，给出负数的图示是十分重要的。如果我们不用线段、温度等来说明负数，那么现在的中学生就会与早期代数学家一样，认为它们是荒谬的东西。”史密斯曾从数学教育的角度对《初等数学史》给予积极的评价：“从教学的角度看，作者的努力是值得褒扬的。

卡约黎是一位热衷于改善教学的人。他深知科学所走过的错综曲折的道路，他锐意革新，希望将来的道路更平直。他力主度量衡制度的教学，力主从粗鄙的复比例方法回归到算术分析，力主用指数记号代替普遍采用的不科学的根号，力主各种迫切需要的改革。……因此我们可以认为，本书是初等数学通史最有用的著作之一。”

在卡约黎的大量论文中，我们都能感受到一种教育关怀。未知数为什么用 x 来表示？指数记号是如何演进的？“数学归纳法”之名是如何产生的？“对数”之名是怎么来的？纳皮尔对数就是自然对数吗？为什么等差和等比级数又叫算术和几何级数？牛顿墓碑上刻着二项式定理吗？为什么芝诺要提出他的四个悖论？四维空间概念是如何诞生的？……卡约黎在论文都一一提供了答案。为什么要学数学？数学有何用？当我们面对公众和学生的质疑时，卡约黎的著作又给我们以启迪——他通过对历史上 731 位名人的数学观的统计，发现肯定和否定数学教育价值的人数之比为 603:108！

卡约黎的教育思想以及关于数学史与数学教育关系的研究，为 20 世纪 70 年代数学史与数学教学关系这一研究领域的诞生奠定了基础。我们今天的“教育取向的数学史研究”、“历史相似性实证研究”均可在卡约黎的著作中找到思想源头。

目　录

CONTENT

文献研究

均值不等式：从历史到课堂

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

早在公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派已经知道算术中项、几何中项和调和中项。毕达哥拉斯学派哲学家阿契塔（Archytas, 鼎盛于公元前 400～前 365 年）在《论音乐》中定义了上述三类中项，其中算术中项和几何中项的定义与今天相同，调和中项的定义为："如果在三项中，第一项超过第二项的量等于第一项的若干部分，第二项超过第三项的量等于第三项的同样部分，那么我们就得到调和中项。" [1]后来，毕氏学派哲学家又相继研究了另外七类中项，尼可麦丘（Nicomachus, 1 世纪）和帕普斯（Pappus, 3 世纪）统一了各类中项的定义。设$b>a>0$，在 a、b 中插入中项 x，其中四类中项的定义见下表。

表 1 四类中项的定义

序	定 义	等价形式	名 称	简称
1	$\frac{b-x}{x-a}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$	$x=\frac{a+b}{2}$	算术中项	A
2	$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{x}\left[=\frac{x}{a}\right]$	$x=\sqrt{ab}$	几何中项	G
3	$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{a}$	$x=\frac{2ab}{a+b}$	调和中项	H
4	$\frac{b-x}{x-a}=\frac{a}{b}$	$x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$	反调和中项	C

古希腊数学家没有研究过我们所熟悉的另一类中项——均方根。若 x^2 是 a^2 和 b^2 的算术中项，则称 x 为 a 和 b 的均方根：$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，简记为 R。

已知某两类中项，则其他各类中项均可以用它们来表示，见表 2。从表 2 可见，若 $b>a>0$，则根据四个不等关系 $H<G$、$G<A$、$A<R$、$R<C$ 之一，即可推得所有五类中项之大小关系：

$$H < G < A < R < C \tag{1}$$

表 2 五类中项的大小关系

已知	H	G	A	R	C
H, G	$\frac{G^2}{H}\left(\frac{H}{G}\right)^2$	$\frac{G^2}{H}\left(\frac{H}{G}\right)$	$\frac{G^2}{H}$	$\frac{G^2}{H}\sqrt{2-\left(\frac{H}{G}\right)^2}$	$\frac{G^2}{H}\left[2-\left(\frac{H}{G}\right)^2\right]$
H, A	$A\left(\frac{H}{A}\right)$	$A\sqrt{\frac{H}{A}}$	A	$A\sqrt{2-\frac{H}{A}}$	$A\left(2-\frac{H}{A}\right)$
H, R	H	$H\sqrt{M}$ *	MH	$\left(\frac{R}{H}\right)H$	$\frac{1}{M}\left(\frac{R}{H}\right)^2 H$
H, C	H	$H\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{H}\right)}$	$H\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{H}\right)$	$H\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{H}\right)\frac{C}{H}}$	$H\left(\frac{C}{H}\right)$
G, A	$A\left(\frac{G}{A}\right)^2$	$A\left(\frac{G}{A}\right)$	A	$A\sqrt{2-\left(\frac{G}{A}\right)^2}$	$A\left[2-\left(\frac{G}{A}\right)^2\right]$
G, R	$\frac{G}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R^2}{G^2}\right)}}$	G	$G\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R^2}{G^2}\right)}$	$G\left(\frac{R}{G}\right)$	$\frac{G\left(\frac{R}{G}\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{R^2}{G^2}\right)}}$
G, C	$\frac{1}{N}\left(\frac{G}{C}\right)^2 C$ **	$\left(\frac{G}{C}\right)C$	NC	$C\sqrt{N}$	C
A, R	$A\left[2-\left(\frac{R}{A}\right)^2\right]$	$A\sqrt{2-\left(\frac{R}{A}\right)^2}$	A	$A\left(\frac{R}{A}\right)$	$A\left(\frac{R}{A}\right)^2$
A, C	$A\left(2-\frac{C}{A}\right)$	$A\sqrt{2-\frac{C}{A}}$	A	$A\sqrt{\frac{C}{A}}$	$A\left(\frac{C}{A}\right)$
R, C	$\frac{R^2}{C}\left[2-\left(\frac{C}{R}\right)^2\right]$	$\frac{R^2}{C}\sqrt{2-\left(\frac{C}{R}\right)^2}$	$\frac{R^2}{C}$	$\frac{R^2}{C}\left(\frac{C}{R}\right)$	$\frac{R^2}{C}\left(\frac{C}{R}\right)^2$

* $M = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8\left(\frac{R}{H}\right)^2}\right)$, $1 < M < \frac{R}{H}$.

** $N = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8\left(\frac{G}{C}\right)^2}\right)$, $\frac{G}{C} < N < 1$.

关于均值不等式，人们已经给出过很多种证明（参阅本期“五种中项大小关系的若干模型”一文），本文的目的是从数学史材料中寻找其推导方法。

1 和差之术

虽然我们在两河流域泥版上没有看到有关均值不等式的内容，但两个正数的算术中项和几何中项之间的关系却已为当时的祭司所熟知。在古巴比伦数学泥版上，含有大量的二元问题：已知 $a+b$ 和 $f(a,b)\,(a>0,b>0)$，求 a 和 b，其中 $f(a,b)$ 具有 $pa+qb$（$p^2\neq q^2$）（如泥版 VAT 8389），ab（如泥版 YBC 4663），a^2+b^2（如泥版 BM 13901）等形式。祭司充分利用了以下恒等式

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a \tag{2}$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b \tag{3}$$

进行换元，这就是所谓的“和差术”[2]。例如，若已知 $a+b$ 和 ab，则利用（2）和（3）得

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab \tag{4}$$

若已知 $a+b$ 和 a^2+b^2，则利用（2）和（3）得

$$2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]=a^2+b^2 \tag{5}$$

从而各求得 $\frac{a-b}{2}$，进而求得 a 和 b。由（4）和（5）马上可以得到不等式

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2} \tag{6}$$

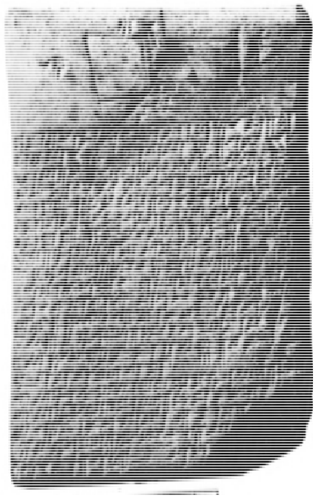
此即 $G<A<R$。

2 梯形分割

在古巴比伦时期的数学泥版上，有许多三角形和梯形的分割问题。其中有两类典型的问题：用平行于底边的直线将三角形分割成若干部分，每一部分（梯形或三角形）的高相等；用平行于上下底的直线将梯形分成满足条件的两个部分。

数学泥版 YBC 4675 （图 1）如下问题：“梯形上底为 7，下底为 17，两腰分别为 310

和 290，面积为 3600。用平行于上、下底的直线将梯形分成面积相等的两部分，问：等分线有多长？”[3]如图 2 所示，设梯形上、下底分别为 a 和 b，两腰分别为 l_1 和 l_2，梯形等分线



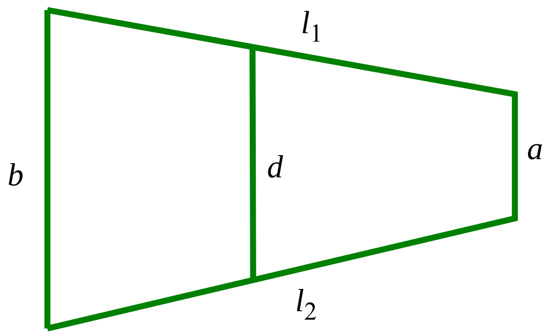


图 1 数学泥版 YBC 4675　　　　图 2 梯形二等分问题

长为 d，l_1 被分割成 p、q 两段，l_2 被分割成 u、v 两段。虽然祭司所使用了错误的梯形面积公式

$$A=\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)$$

但所得梯形等分线长度公式却是正确无误的：

$$d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

祭司已经知道，用平行于一条底边的一组并行线将三角形分割成等高的部分（三角形和梯形），那么，那些并行线段依次构成了等差数列。例如，泥版 YBC 4608 的第 5 题大意为：六兄弟分直角三角形土地，土地的面积和长度（长直角边）已知，各部分的长度（梯形或三角形的高）相等，求各份土地的面积之差[3]，如图 3 所示。祭司所得的 b_1，b_2，b_3，b_4，

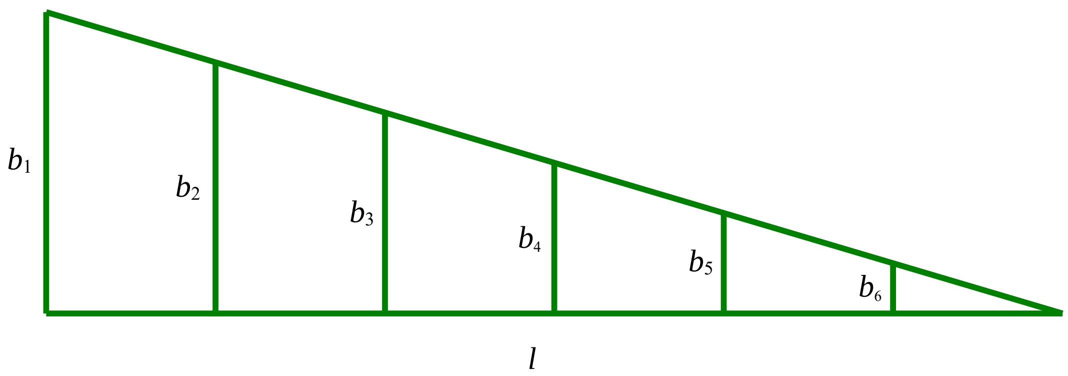


图 3 泥版 YBC 4608 上的三角形分割问题

b_5，b_6构成等差数列。由此，我们不难推断，祭司知道这样的事实：梯形中位线是上下底的算术中项。

这让我们很自然地想到了在同一个梯形中作出不同中项的问题。为便于作图，我们选择特殊的直角梯形来解决这一问题。如图4，直角梯形 $ABCD$ 的上下底分别为 $AD=a$，$BC=b$（$a<b$），高为 $AB=a+b$。在 AB 上取点 E，使得 $AE=AD$，过 E 作平行于 AD 或 BC 的直线，交 CD 于点 F，易证：$EF=\dfrac{2ab}{a+b}$，EF 恰好过梯形对角线 AC 和 BD 的交点 I。延长 BA 和 CD 交于点 O，以 OB 为直径作半圆，延长 DA，交半圆于点 K，再以 O 为圆心、OK 为半径作圆弧，交 OB 于 G，过 G 作 AD 或 BC 的并行线，交 CD 于 H。易证：$GH=\sqrt{ab}$，且梯形 $AGHD$ 和梯形 $GBCH$ 相似。

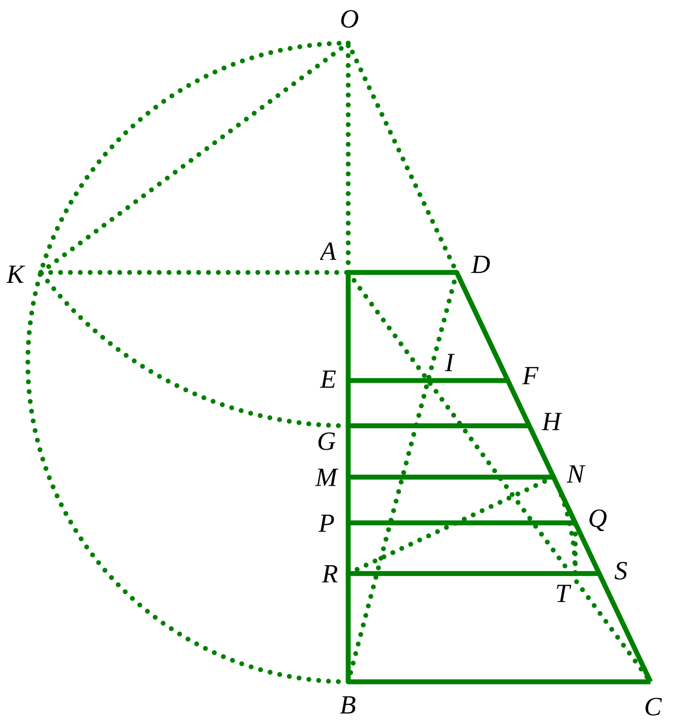


图 4 五类中项的梯形模型

取 AB 和 CD 的中点 M 和 N，得梯形的中位线 MN，$MN=\dfrac{a+b}{2}$。在 BM 上取点 R，使得 $BR=AD=a$，过 R 作 AD 或 BC 的并行线，交 CD 于 S。易证：$RS=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$。以 R 为圆心、RN 为半径作圆弧，交 RS 于点 T，过 T 作 RS 的垂线，交 CD 于 Q，过 Q 作 AD 或 BC 的并行线，交 AB 于 P。易证：

$$PQ=RT=RN=\sqrt{RM^2+MN^2}=\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

由 $AD<EF<GH<MN<PQ<RS<BC$，即得五类中项的大小关系（1）。

3 矩形之变

古希腊数学家似乎并没有对各类中项的大小进行比较，但他们已经研究过部分中项的几何作图法以及它们之间的数量关系。欧几里得在《几何原本》卷六命题 13 中给出了两条已知线段之间的几何中项的作图法。如图 5，以 AB 为直径作半圆 ADB，则 CD 即为 AC 和 CB 之间的几何中项。

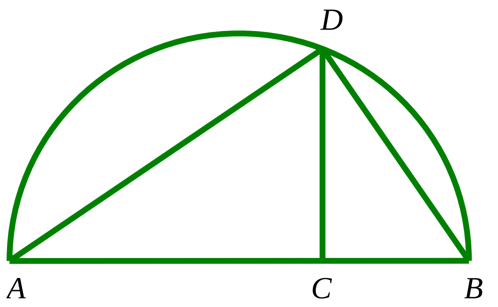


图 5 《几何原本》卷六命题 13 中的作图法

《几何原本》卷二命题 5 实际上给出了算术中项与几何中项之间的关系："将一条线段二等分，再分成不相等的线段，则由二不相等的线段构成的矩形与两个分点之间一段上的正方形之和等于原线段一半上的正方形。"[4]如图 2，设 $DB=a$，$AD=b$，C 是线段 AB 的中点，在 CB 上作正方形 $CBEF$，过 D 作 AB 的垂线，分别交 FB 和 FE 与 H 和 K，过 H 作 AB 的并行线，分别交 CF 和 BE 与 G、N。过 A 作 AB 的垂线，交直线 GN 于 M。易知：

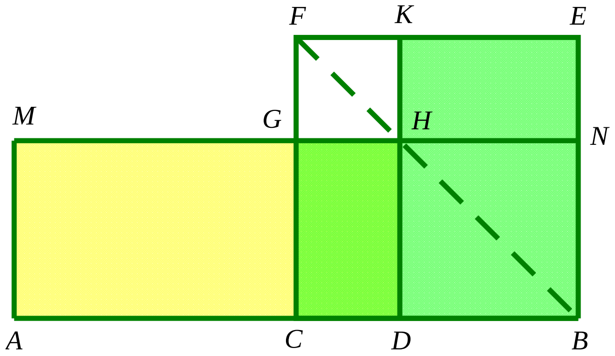


图 6 《几何原本》卷二命题 5 中的作图法

$$
\begin{aligned}
&\square AH = \square AG + \square CH = \square BG + \square HE \\
&\Rightarrow \square AH + \square GK = \square CE
\end{aligned}
$$

这就是：

$$ab + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{7}$$

（7）与（4）等价。欧几里得的证明思路就是“将矩形化为等积的矩尺形”。如果说，欧几里得的图 6 还不够直观的话，那么从图 7 中则更能清楚地得出等式（7）。

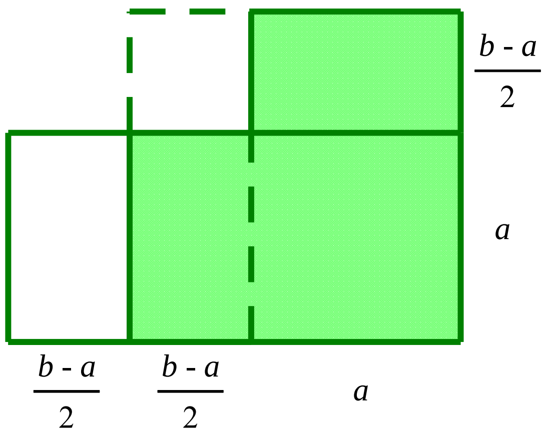


图 7 《几何原本》卷二命题 5 的另一种证明

由（7）马上可以得到不等式

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

即 $G < A$。

4 比例之用

古希腊数学家阿基米得（Archimedes, 前 287～前 212）在证明球体积公式时，利用了如下命题："设 a、b 是两条已知线段，$a<b$。在 a、b 之间插入两个算术中项 c 和 d（即 a、c、d、b 构成等差数列），则 $a^3:c^3<a:b$。" [5]

公元 6 世纪，希腊数学家欧多修斯（Eutocius）对上述命题作了证明：设 x 和 y 满足 $a:c=c:x=x:y$，则 $(c-a):a=(x-c):c=(y-x):x$，因 $a<c<x$，故 $c-a<x-c<y-x$。又因 $c-a=d-c=b-d$，故 $d-c<x-c$，$b-d<y-x$。于是得 $x>d$，$y>b$。因此，$a^3:c^3=a:y<a:b$。

很难想象阿基米得会对更简单的情形视而不见：设 a、b 是两条已知线段，$a<b$，A 为 a、b 的算术中项，则 $a^2:A^2<a:b$，而这正等价于均值不等式 $G<A$。因此，我们有理由相信，阿基米得对于均值不等式是了然于心的。借鉴欧多修斯的方法，我们发现了均值不等式的十分简单的两种证明。

方法一：设 $a<b$，a、b 的算术中项为 A，几何中项为 G，则因 $A-a=b-A$，$a<A$ 故

$$\frac{A-a}{a}>\frac{b-A}{A}$$

此即

$$\frac{A}{a}>\frac{b}{A}$$

故得 $G<A$。

方法二：设 $a<b$，算术中项为 A，几何中项为 G，则因 $\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，故

$$\frac{G-a}{a}=\frac{b-G}{G}$$

由 $a<G$，得 $G-a<b-G$，故 $G<A$。

5 等周问题

在阿基米得之后，获得与均值不等式等价结果的数学家是芝诺多鲁斯（Zenodorus, 约

公元前 2 世纪）。他写了一本名为《论等周图形》的书，专门研究等周问题。在书中，他给出了许多命题，其中一个是："在边数相同、周长相等的所有多边形中，等边且等角的多边形的面积最大。" [1]

在四边形情形中，我们考虑长为 b、宽为 a（$a<b$）的矩形以及与之等周的正方形（边长为 $\frac{a+b}{2}$），即有不等式（8）成立。

为了证明上述命题，芝诺多鲁斯运用了两个引理，其中第一个为："在等底等周的所有三角形中，等腰三角形的面积最大。" [1]

如图 8，$BD=a$，$AD=b$（$b>a$），$AC=BC=\frac{a+b}{2}$。延长 AC 至 E，使 $AC=CE$，连接 DC，DE。因 $AD+DE>AE=AC+BC=AD+BD$，故 $DE>BD$。于是，在ΔCBD 和ΔCDE 中，$\angle ECD>\angle BCD$，$\angle ECD>\frac{1}{2}\angle BCE=\angle ACB$。因此，过点 C 作 AB 的并行线，必与 AD 的延长线相交于点 F。连接 BF，即得

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABF}>S_{\Delta ABD}$$

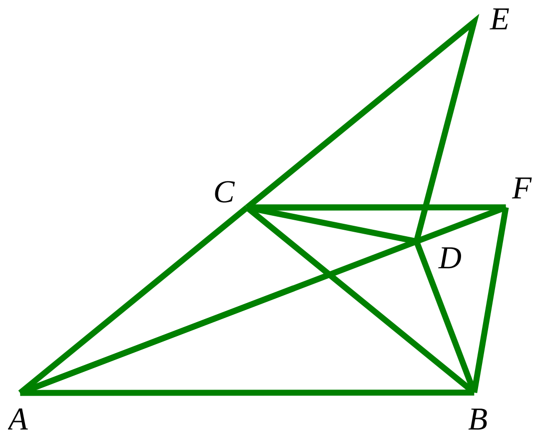


图 8 等底等周的三角形

若 $\angle ADB=90^\circ$，则得

$$\frac{1}{2}ab<\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\sin\left(\angle ACB\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

于是得不等式（8）。

6 推陈出新

公元 3 世纪末，古希腊亚历山大时期最后一位重要的几何学家帕普斯（Pappus）在其《数

学汇编》卷三第 2 部分给出了更多中项的几何作图法。如图 9，设 $AC=a$，$AB=b$，过点 B 作 AB 垂线 DE，并在其上取点 D 和 E，使得 $BD=BE$，连接 AD，AE，过 C 作 AB 的垂线，交 AD 于 F，连接 EF，交 AB 于 G。AG 就是 AB 和 AC 之间的调和中项。事实上，由上述作图可得：

$$AB:AC=BD:CF=BE:CF=BG:CG=\left(AB-AG\right):\left(AG-AC\right)。$$

但帕普斯并不满足于单个中项的作图，他希望能够在同一幅图形中作出不同的中项。在《几何原本》卷二命题 13 的基础上，帕普斯在同一个半圆上作出了三类中项。如图 11，以 AB 为直径作半圆 ADB，$CD\perp AB$，OD 为半径，$CE\perp OD$，则 OD、CD、DE 分别为

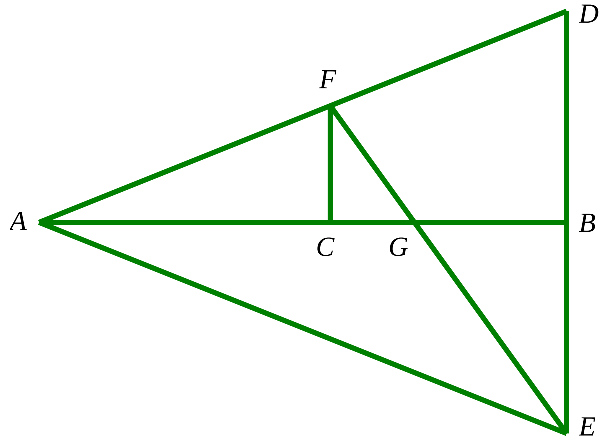


图 9 帕普斯的调和中项作图法


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuerſæ, & Commentarijs
Illuſtratæ.
VENETIIS.
Apud Franciſcum de Franciſcis Senenſem.
M. D. LXXXIX.

图 10 帕普斯《数学汇编》拉丁文版（1589 年）书影

AC 和 CB 之间的算术、几何和调和中项。

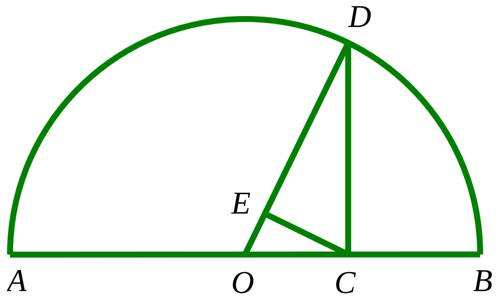


图 11 帕普斯三类中项的作图法

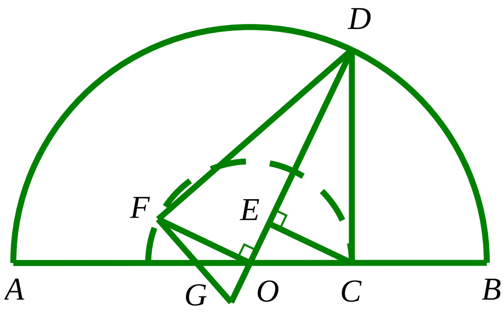


图 12 五类中项的作图法

在帕普斯作图法的基础上，我们可以进一步作出 AC 和 CB 之间的所有五类中项。如图 12，以 O 为圆心，OC 为半径，作圆，过 O 作 OD 的垂线，交圆于 F，连接 DF；过 F 作 DF 的垂线，交 DO 的延长线于 G。于是，DF 和 DG 分别为 AC 和 CB 之间的均方根和反调和中项。设 $CB=a$，$AC=b$。因 $DE<DC<OD<DF<DG$，故得均值不等式（1）。

另一方面，如果我们对于帕普斯的调和中项作图法进行改进，同样可以实现他的在同一幅图中表示不同中项的想法。如图 13，设 $AC=a$，$AB=b$，以 CB 为直径作圆 O，过点 A 作圆 O 的切线 AD，D 为切点，连接 OD。作 $DE\perp AB$，垂足为 E。在 OB 上取点 F，使得 $OF=OE$，作 $OG\perp AB$，交圆 O 于 G，连接 AG、GF。易证：

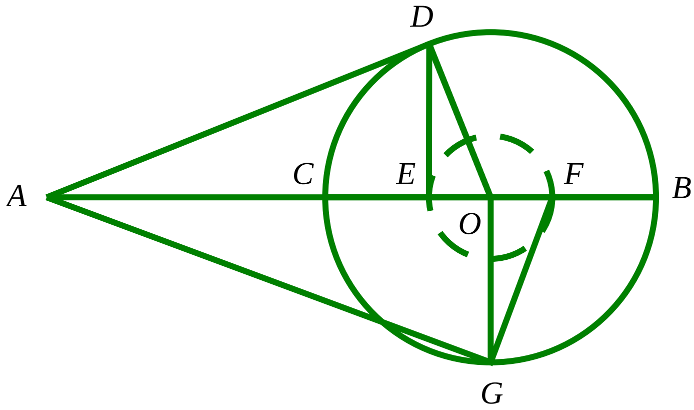


图 13 帕普斯作图法的改进

$$AD=\sqrt{ab},\quad AO=\frac{a+b}{2},\quad AE=\frac{2ab}{a+b},\quad AF=\frac{a^2+b^2}{a+b},\quad AG=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

考虑到 $DE\perp AE$，$OD\perp AD$，$OA\perp OG$，$AG\perp GF$，故有

$$AC<AE<AD<AO<AG<AF<AB$$

这就是均值不等式（1）。

7 勾股弦图

公元 3 世纪，中国数学家赵爽“负薪余日，聊观《周髀》”。他在给《周髀算经》“勾股圆方图”作注时，给出图 14 所示的“大方图”。赵爽写道：

> “以图考之，倍弦实，满外大方，而多黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也。”[6]

如图 14，设直角三角形 EBF 的勾、股、弦分别为 a、b、c，则以 c 为边的正方形由四个全等的红色直角三角形和一个边长为 $b-a$ 的黄色小正方形构成，故上述正方形的两倍就是由八个全等的红色直角三角形和两个黄色小正方形构成。而外大方则是由八个红色直角三角形和一个黄色小正方形构成。因此有：

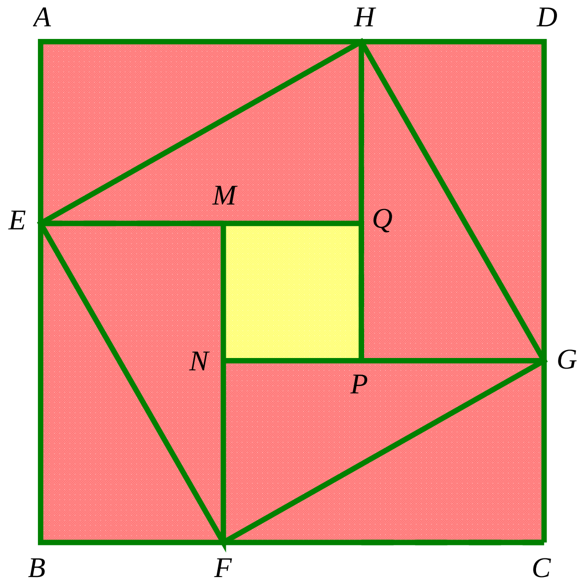


图 14 赵爽的大方图

$$\left(a+b\right)^2=4ab+\left(b-a\right)^2$$

$$\left(a+b\right)^2=2c^2-\left(b-a\right)^2=2\left(a^2+b^2\right)-\left(b-a\right)^2$$

因此，可得不等式

$$4ab\le\left(a+b\right)^2\le2\left(a^2+b^2\right)$$

这就是不等式（6）。

8 勾股容方

公元 263 年，中国数学家刘徽为《九章算术》作注。在注中，他证明了“勾股容方”（即直角三角形内接正方形边长）公式[7]。设直角三角形的直角边为 a 和 b，则与直角三角形具有公共直角的内接正方形边长为

$$d=\frac{ab}{a+b}$$

如图 15，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=a$，$AB=b$，$a<b$。正方形 $GBEF$ 和 $HIDJ$ 分别内接于直角三角形 ABC 和 CDA，JH 的延长线交 GF 于 K，M 是 AC 的中点，MQ 和 MP 分别垂直于 AB 和 BC。于是，

$$HK=b-\frac{2ab}{a+b},\quad KF=\frac{2ab}{a+b}-a$$

因 $AB>BC$，故 $HK>KF$，于是有

$$b-\frac{2ab}{a+b}>\frac{2ab}{a+b}-a$$

由此得不等式

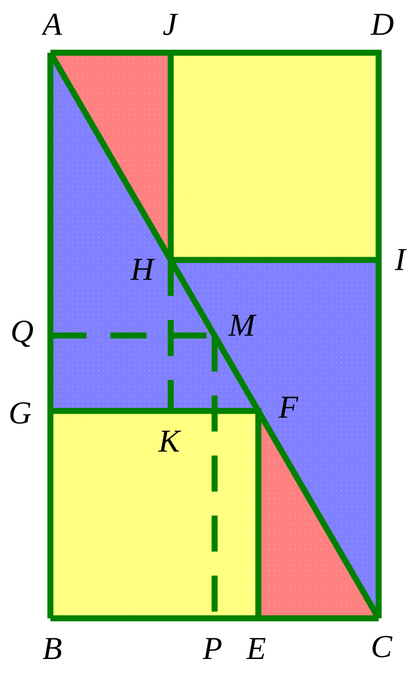


图 15 刘徽的勾股容方图

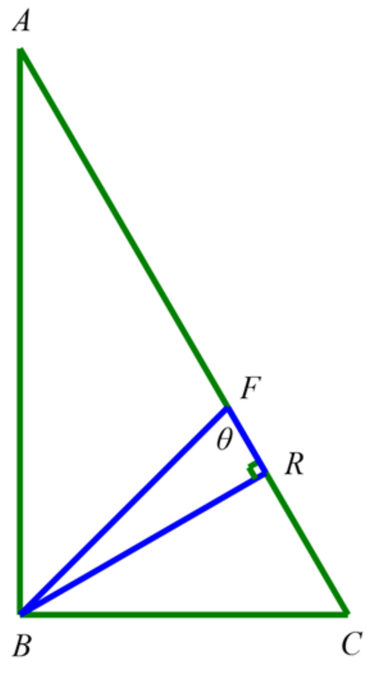


图 16 均值不等式的三角模型

$$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$$

或即

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2<ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{9}$$

故得均值不等式$H<G<A$。

另一方面，设内接于直角三角形 ABC、且与直角三角形具有一个公共直角的长方形的长为 x，则其面积为

$$S(x)=x\left(b-\frac{bx}{a}\right)=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{ab}{4}$$

易知，当$x=\frac{a}{2}$时，$S(x)$最大，亦即 $QBPM$ 是面积最大的内接长方形，其面积为$\frac{1}{4}ab$。因此有：

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2<\frac{1}{4}ab \tag{10}$$

由此同样可得不等式（9）。

在刘徽的勾股容方图中，如果我们连接 BF，并且作$BR\perp AC$，垂足为 R，如图 16 所示。易知

$$BF=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}，\quad BR=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

设$\angle BFR=\theta$，则有

$$\sin\theta=\frac{BR}{BF}=\frac{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}}=\frac{\dfrac{a+b}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}=\frac{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}},$$

$$\sqrt{1-\cot^2\theta}=\frac{\sqrt{ab}}{\dfrac{a+b}{2}}=\frac{\dfrac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}}。$$

因$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，故$0<\sin\theta<1$，$0<\sqrt{1-\cot^2\theta}<1$，由此即得均值不等式（1）。

9 结语

对于古代两河流域、古希腊和古代中国的少量数学文献的考察和分析，让我们看到数学历史文献对于均值不等式教学的帮助：

（1）踏破铁鞋无觅处，得来全不费工夫。从历史文献中，我们可以直接获得均值不等式的精彩的证明方法（如欧托修斯的比例法）或几何模型（如芝诺多鲁斯关于等周图形的命题和帕普斯的作图法）；

（2）有心栽花花不发，无心插柳柳成荫。尽管很多历史文献的主题并非均值不等式，但我们可以从中导出均值不等式这一副产品。两河流域的和差术、欧几里得的几何命题、赵

爽的勾股弦图、刘徽的勾股容方图无意中都为均值不等式提供了证明；

（3）不识庐山真面目，只缘身在此山中。由于古人局限于个别的中项，故未能看清不同中项之间的关系。若我们沿着古人开辟的蹊径继续前行，深入探究，往往可以推陈出新，有所创获。均值不等式的梯形模型、切割线模型和三角模型就是其中的三个例子。

本文所述，不过沧海一粟而已。上下数千年，数学的历史积淀了先哲们的思想精华；数学的历史是一座宝藏，从中可以发掘出取之不尽、用之不竭的教学资源。面对这座宝藏，我们难免发出“太阳底下无新事”之感叹；深入这座宝藏，我们将变得明智而谦卑。有理由相信，关于均值不等式，更多我们在课本上看不到的思想和方法等待我们进一步去发掘。

另一方面，当我们带着 HPM（数学史与数学教育关系）的眼光去欣赏数学历史文献时，这些文献已不再是过时的、冷冰冰的陈列品，而是鲜活的、生动的、充满教育意蕴的思想养料。

无疑，教育取向的数学史研究必将成为未来 HPM 领域重要的方向之一。

参考文献

[1] Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Oxford University Press

[2] van der Waerden, B. L. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag

[3] Neugebauer, O. & Sachs, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: American Oriental Society

[4] 欧几里得(1990). 几何原本（兰纪正，朱恩宽译）.西安：陕西科学技术出版社

[5] Heath, T. L. (1959). *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications

[6] 赵爽 (1994). 《周髀算经》注（卷上），见郭书春主编，中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)，郑州：河南教育出版社, 11-12

[7] 郭书春 (2004). 汇校九章算术. 沈阳/台北：辽宁教育出版社/九章出版社

初中数学课堂上的数学故事

田方琳

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

在数学史的众多教育价值中，“情感、态度和价值观”这一视角一直为人们所津津乐道。HPM 先驱者、美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1920）曾指出，一门学科的历史知识乃是“使面包和黄油更加可口的蜂蜜”[1]；美国数学史家琼斯（P. S. Jones, 1912～2002）提出，数学史能激发学生的学习兴趣，并让他们欣赏和热爱数学[2]；英国数学史家弗福尔（J. Fauvel, 1951～2000）总结了数学教学中运用数学史的十五条理由[3]，其中包括增加学习动机、改变数学观、心理安慰、保持对数学的兴趣等；Tzanakis 和 Arcavi 则指出，数学史在数学情感上有如下作用[4]：（1）数学史告诉师生，数学是一门不断演进、人性化的学科，而不是一个僵化的真理系统；（2）数学史可以培养坚持真理、不懈探究、提出问题、追求创新的品质；（3）数学史告诉师生，面对挫折、失败和错误，不必灰心丧气。Gulikers 和 Blom 则从“动机视角”总结了数学史对学生的价值[5]：（1）增加学生的学习兴趣；（2）创造学生的学习动机；（3）使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心；（4）培养优秀生的远见卓识。

虽然数学史文献浩如烟海，但多数中学数学教师所掌握的可直接用于课堂的材料却极为缺乏。作者之一曾指出，数学教学呼唤教育取向的数学文化研究，开发与中学教学内容相契合的数学文化案例，为中学数学教学提供有关文化素材，将是 HPM 研究的重要内容之一[6]。作为呼应，本文整理可用于初中课堂的数学历史故事，旨在为初中数学教师提供丰富和改善课堂教学的素材。

案例 1 字母的效用

英国幽默作家杰罗姆（J. K. Jerome, 1859～1927）《懒人懒办法》一书中有这样一段文字：

“十二世纪的青年堕入情网，你可别指望他会后退三步，凝视情人眼睛，然后告诉他：你太美了，美得简直不像活人。他会说他要到外边去看看。倘若正好碰上那么一位仁兄，并打破他的脑袋——我指的是另外那个家伙的脑袋，这就说明他——前一个人的

情人是个漂亮姑娘。但要是另一个家伙打破他的头——不是他自己的，这你知道，而是另一个家伙的——另一个家伙是对第二个家伙而言的，这就是说，因为事实上另一个家伙仅仅对于他来说是另一个家伙，而不是第一个家伙——好了，如果他的头被打破，那么他的女孩——不是另一个家伙的，而这个家伙——你瞧，如果 A 打破了 B 的头，那么 A 的情人就是一个漂亮女孩；反之，如果 B 打破了 A 的头，那么 A 的情人就不是个漂亮女孩，而 B 的情人才是。”

杰罗姆说的并非数学问题，但恰好体现了数学语言的简洁性。可以说，字母表示数为代数学插上了飞翔的翅膀。

欧拉（瑞士，2007）

狄德罗（法国，1984）

狄德罗（D. Diderot，1713～1784）是 18 世纪名扬欧洲的法国大哲学家，曾编纂过《法国大百科全书》。他曾受俄国女皇叶卡捷琳娜二世（Catherine Ⅱ，1729～1796）之邀，访问俄国。然而，狄德罗来到俄国后毫无忌惮地在公开场合宣扬无神论，引来俄国老臣们极大的反感。于是，他们请求女王把狄德罗赶走，而女王却认为狄德罗是自己请来的客人，就这样将其赶走着实有失尊严。老臣们献计，狄德罗是个大学者，我们也找一位地位相当的人来和他辩论，将其赶走。于是，大家想到了欧拉。欧拉是皇家科学院的数学家且笃信上帝。没有比欧拉更适合来进行“战斗”的了。就这样，狄德罗与欧拉在宫廷中就上帝是否存在进行辩论。当狄德罗来到宫廷，现场早已人头攒动。此时，右眼失明的欧拉先发制人：“先生！因为 $\frac{a+b^n}{n}=x$，所以上帝存在，请回答！”狄德罗没想到，欧拉竟会动用代数学。他对代数一窍不通，听到欧拉的等式后，竟一语未发，面红耳赤地在众人的哄笑中离开了宫廷，离开了俄国。[7]

其实，欧拉给出的式子并没有什么特别的含义，与上帝是否存在毫无关系。然而，大哲学家却因为不了解字母表示数的要义而遭受奇耻大辱。

案例 2 奴隶的记忆

古希腊哲学家苏格拉底（Socrates, 前 469～前 399）认为人是灵魂先存的，知识早已存在于人的头脑中，只不过是人们遗忘了而已。柏拉图的《米诺》记载了苏格拉底和贵族米诺之间的对话，阐述了苏格拉底的“知识即回忆”的思想，其中运用了著名的“产婆术”。

为了向米诺讲解其“学习即回忆”的思想，苏格拉底让米诺找来一个小奴隶，在沙地上画了一个正方形 *ABCD*，小奴隶知道这个图形的四条边相等。苏格拉底又问小男孩，如果这个正方形的面积为 4，可否画一个面积大一倍的正方形。奴隶说，要使面积变为二倍（8），边长也要变为二倍（4）。苏格拉底一边讲，一边画出图 1。按小奴隶的意思，正方形 *AJKL* 面积为 8；但事实上它是原图的 4 倍，于是产生矛盾。于是，奴隶改口说边长应为 3，却又发现此时面积为 9。奴隶陷入困境，于是，苏格拉底又画了图 2。

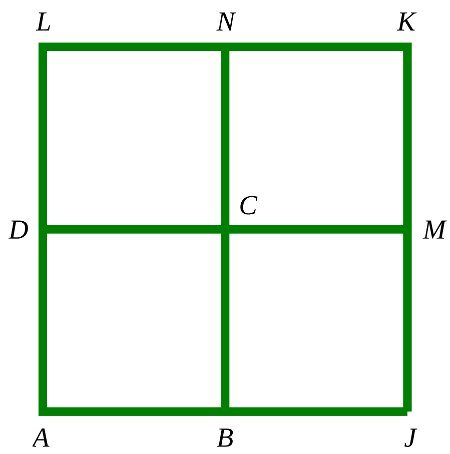


图 1

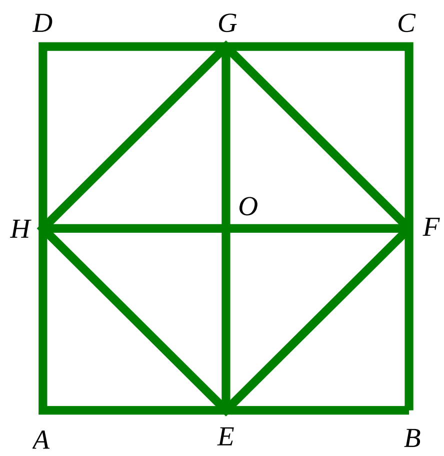


图 2

在苏格拉底的启发下，小奴隶认识到，每一个小正方形的对角线将每一个正方形二等分，并逐渐认识到 *EFGH* 便是所求的正方形。整个过程中，苏格拉底并没有告诉什么，一直采用提问的方式，但奴隶最终还是得出了正确的答案。[8]米诺终于信服苏格拉底的思想。

案例 3 古老的定理

爱奥尼亚学派的创立者泰勒斯（Thales, 前 640～前 546）是古希腊著名“七贤”之一，被誉为希腊几何学的鼻祖。他生于米利都，青年时代曾游历埃及，测量过金字塔的高度，发现了许多几何命题。亚里士多德的弟子欧得姆斯在《几何学史》中把角边角定理归功于泰勒斯，并说“泰勒斯证明了如何求出海上轮船到海岸的距离”[9]，这使我们相信，泰勒斯是利

借助角边角定理来实施轮船测量的。

泰勒斯在海边的塔或高丘上利用一种简单的工具进行测量。直竿 EF 垂直于地面，在其上有一固定钉子 A，另一横杆可以绕 A 转动，但可以固定在任一位置上。将该细竿调准到指向船的位置，然后转动 EF（保持与底面垂直），将细竿对准岸上的某一点 C。则根据角边角定理，$DC = DB$。

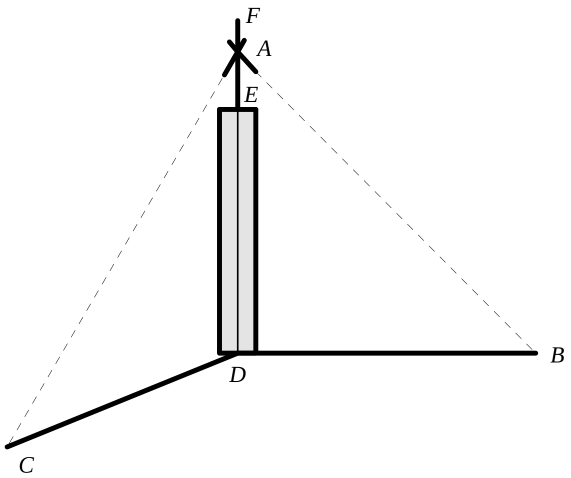


图 3　泰勒斯利用角边角定理测量船与海岸之间的距离

史密斯和希思都讲过这样一则故事[9][10]：拿破仑军队在行军途中为大河所阻，面对滔滔河水，拿破仑心急火燎，一筹莫展。一名随军工程师运用泰勒斯的方法迅速测得河流的宽度，因而受到拿破仑的嘉奖。可见，从古希腊开始，角边角定理在测量中一直扮演者重要角色。还有一则故事说抗美援朝战争中，一名志愿军战士利用泰勒斯的方法测量了敌营的距离，不过，在战场上，他唯一可用的工具就是头上所戴的军帽。

案例 4　窃贼的赃物

五代高彦休在《唐阙史》卷下“杨尚书补吏”一节中讲述了这样一则故事[11]：尚书杨损在选拔官员时公正无私，杜绝腐败。一次，使院分管兵籍的职位空缺，有两位候选小吏前来应聘。这两人原来的职位相同，工作年限一样，过去的工作业绩也不分高下。这一下可难倒了招聘负责人，他只好请杨尚书决断。杨尚书俯首沉思良久，最后想出了高招：让两位候选人做数学题。他对负责人说：“做官最重要的是要算得快。现在请两位候选人听我出题！”杨损的题目是这样的：

一位行人傍晚经过一个树林，忽听得林间有人在说话，细听方知是一群窃贼在讨论分赃之事。只听得窃贼说：“每人 6 匹，则多出 5 匹；每人 7 匹，则又 3 少了 8 匹。试

问：窃贼共有几人，赃物共有几匹？”

其中一名小吏先算出正确答案，于是得到升迁。

明代程大位在《算法统宗》中编制了以下问题：“昨日独看瓜，因事来家。牧童盗去眼昏花。信步庙东墙外过，听得争差。十三俱分咱，十五增加。每人十六少十八。借问人瓜各有几？已会先答。”[12]

《尘劫记》中的插图

17 世纪日本数学家吉田光由（1598～1672）在《尘劫记》中记载：“有盗布者，聚于桥下分赃。恰有过桥者，听得争论：每人 12 匹，余 12 匹；每人 14 匹，不足 6 匹。问盗贼几人、盗布几匹？”[13]

《唐阙史》、《算法统宗》和《尘劫记》所载的数学问题，都属于汉代《九章算术》中的盈不足问题。

案例 5 海边的奇思

叙拉古是古希腊的一个独立城邦。叙拉古国王希罗（Hiero, ?～前 215）之子盖罗（Gelo, ?～前 216）是大数学家阿基米德（Archimedes, 前 287～前 212）的好朋友，阿基米德的《数沙者》就是题献给他的。在书的开篇，阿基米德告诉盖罗，世人对沙粒的数目存在误解，认为无论是叙拉古，或是西西里岛上叙拉古以外的地方，或是地球上任何一个有人居住或无人居住的地方，沙粒数都是无限的，即使有人认为沙粒数并非无限，也认为不存在比它更大的数。可是，阿基米德却说，他能用几何方法证明，他所命名的大数能超过装满整个地球、甚至装满整个宇宙的沙粒数。[14]根据这则文献，后人编写了一个有趣的、在某种程度上颇为真实的故事：

公元前 3 世纪后半叶的某一天，阿基米德他的朋友、叙拉古王子盖罗在海边散步。阿基

米德三句不离本行，谈起了大数问题。

“我们脚下的这片沙滩共有几粒沙呢？”阿基米德问朋友。

“想必有无穷多粒吧。”盖罗回答。

“那么，整个西西里岛上的沙粒数呢？”阿基米德接着问。

“当然也是无穷。”盖罗不假思索。

“可是，亲爱的朋友，不仅是西西里岛，世界上任何一个地方的沙粒数都是有限的。我可以证明，我能找到一个大数，使得装满整个地球、甚至整个宇宙的沙粒数不超过这个数！”阿基米德自信地说。注意，那时候的天文学家认为，宇宙就是以地球为中心、以地日距离为半径的球。

“是真的吗？不可思议！”盖罗睁大眼睛看着数学家。

“对于没有学过数学的人来说，这的确令人难以置信。”阿基米德回答。

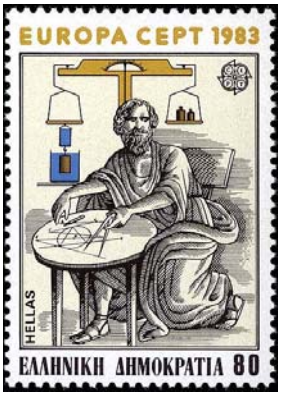
接下来，阿基米德开始向朋友详细介绍自己的大数记数法。从 1 数到 1 万（当时希腊人称之为“myriad”），再从 1 万数到 1 万万，将 1 到 1 万万称为一阶数；从 1 万万数到 1 万万个 1 万万，称之为二阶数；从 1 万万个 1 万万数到 1 万万个 1 万万个 1 万万，成为三阶数；…，最后，数到 1 万万阶数。

虽然盖罗平日里常常向阿基米德学数学，但他还是有点晕。阿基米德最后告诉朋友，根据他的几何证明，若将沙粒看作罂粟壳那么大，装满整个宇宙的沙粒数不超过 1000 个七阶数（1 后面有 51 个零），而装满整个亚里士塔克斯恒星球的沙粒数则不超过 10,000,000 个八阶数（1 后面有 63 个零）。

盖伦强烈要求阿基米德将他的大数记法和计算沙粒数目的方法写成书，让更多的希腊人学习。

无独有偶，中世纪意大利数学家斐波纳契（Leonardo Fibonacci, 1170?～1250?）在解著名的棋盘问题时，也遇到了一个难以表达的大数，斐波纳契被迫给出一种记法[15]：先算出棋盘前两行之和，再加 1，得 65536；将 65536 比占的金币装入一个保险箱，将 65536 个这样的保险箱放进一座房子，再将 65536 座这样的房子放进一座城市。于是，65536 座这样的城市所含的金币数减去 1，就是棋盘上所有数字之和。

在没有幂的表示方法的时代，要表达一个大数是多么地不易啊！



阿基米德（希腊，1983）

盲人数学家桑德森

案例 6 先驱的失误

18 世纪中叶以前，几乎没有人关注分式方程。第一个将分式方程写入教材的是英国著名盲人数学家、剑桥大学第四任卢卡斯数学教授桑德森（N. Saunderson, 1682～1739）。

桑德森幼年染上天花，那时候，天花在欧洲盛行，不知有多少人失去了生命。桑德森幸运地活了下来，却失去了眼球。那个时候要教育一个盲人孩子是异常困难的，只有在有人读书给他听的时候，桑德森才可能“读书”。尽管如此，他还是受到了很好的教育，学习了拉丁语、希腊语、法语和数学。他能做到这些，一方面是因为他有着超群的智力，更是因为他有一位给予他巨大帮助的父亲和一大群乐于为他读书的朋友。桑德森很快就掌握了欧几里得的《几何原本》，还成为一名有才华的音乐家，长于演奏长笛。

18 岁时，桑德森遇到数学家威廉·韦斯特（William West）。由于双目失明，桑德森失去了读大学的机会。他在韦斯特的指导下在家中学习数学，在代数与几何上进步很快。1707 年，桑德森在朋友的鼓励下走进了剑桥大学。他用特制的黑板，每天坚持上八小时课。学生们无不为他高超的教学技巧而折服，称他为“不用自己的双眼却教会他人如何使用双眼的人”。

在《代数学基础》中，桑德森给出了一个分式方程的解法[16]：

$$
\begin{aligned}
&\frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}\\
&\Rightarrow \frac{42}{x-2}=\frac{35}{x-3}\\
&\Rightarrow 42(x-3)=35(x-2)\\
&\Rightarrow x=8
\end{aligned}
$$

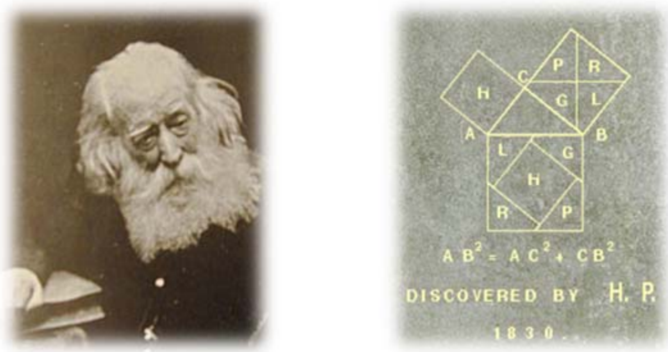
接着，作为解题过程的一部分，他还给出了以上解法的逆过程：

$$
\begin{aligned}
& x=8 \\
& \Rightarrow 7x=56 \\
& \Rightarrow 42x-35x=126-70 \\
& \Rightarrow 42(x-3)=35(x-2) \\
& \Rightarrow \frac{42}{x-2}=\frac{35}{x-3} \\
& \Rightarrow \frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}
\end{aligned}
$$

从上述解法中我们可以看出，尽管桑德森已经意识到解方程应该是可逆的，但从他在方程两边约去或乘以 x 的做法可以推知，他并没有意识到方程变换过程中的增根和失根问题。

案例 7 牧师的遗愿

在伦敦东部地区，有一座教堂，教堂边有一块墓地，墓地上有一块墓碑，墓碑上刻着勾股定理的一种证明。长眠于此的是一位名叫伯里加尔（H. Perigal, 1801～1898）的牧师。临终时，他嘱咐儿子把他发现的勾股定理的证明刻在他的墓碑上。[7]他的证明方法如图 4 所示。



亨利·伯里加尔（Henry Perigal, 1801-1898）和他的墓碑

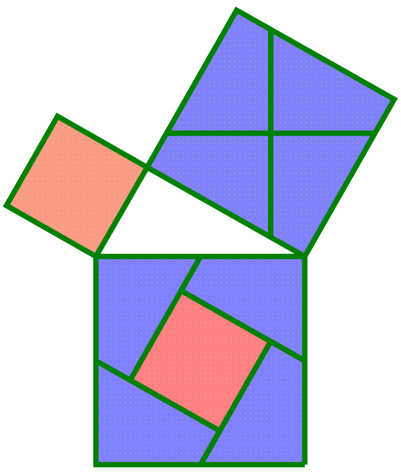


图 4 伯里加尔的“水车翼轮法”

一位年近百岁的牧师，大限将至之时，最为挂念的不是教义、不是终身的事业，而是他闲暇时把玩的勾股定理。我们不难想象，牧师在证明勾股定理的过程中，定然获得到了巨大的愉悦感和成就感。勾股之美、数学之魅由此可窥一斑！

下表给出了以上七个案例与初中数学部分知识点之间的对应关系以及在课堂上的具体运用方式（参阅文献[17]）。

序	故 事	知识点	运用方式	教学环节
1	**字母的效用**	用字母表示数	附加式	创设情境
2	**奴隶的记忆**	无理数	重构式	创设情境/探究新课
3	**古老的定理**	全等三角形	顺应式	创设情境/探究新课
4	**窃贼的赃物**	二元一次方程组	顺应式	创设情境/探究新课
5	**海边的奇思**	幂的概念	顺应式	创设情境
6	**先驱的失误**	分式方程	附加式/复制式	创设情境/探究新课
7	**牧师的遗愿**	勾股定理	附加式/复制式	探究新课

从上表可见，数学课堂上的故事充当的并不仅仅是调味品，而是可用来很好地创设情境；数学故事的功能不仅仅是激发兴趣，更重要的是创造学生的学习动机、改善学生的数学观；数学故事的运用方式不仅仅限于附加式，而更多的是顺应式，故事中的问题或方法是探究新课的理想素材。目前，已有教师在课堂上采用过故事 1、3 和 5，获得了理想的效果，而其他故事则仍有待于实践的检验。

参考文献

[1] Cajori, F. The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 1899, **7**(5): 278-285

[2] Jones, P. S. The history of mathematics as a teaching tool. *Mathematics Teacher*, 1957, **50**(1): 59-64

[3] Fauvel, J. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1991, **11**(2): 3-6

[4] Fauvel, J., van Maanen J. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 262-264; 272-273

[5] Gulikers, I., Blom, K. ‘A historical angle’: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, **47**: 223-258

[6] 赵东霞, 汪晓勤. 关于数学文化教育价值与运用现状的网上调查. 中学数学月刊, 2013, (3): 41-44

[7] 汪晓勤. 数学文化透视. 上海: 上海教育出版社, 2013. 242-246

[8] Fauvel, J., Gray, J. *The History of Mathematics: A Reader*. London: Macmillan, 1987. 61-67

[9] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics*. London: Oxford University Press, 1921

[10] Smith, D. E. *Teaching of Elementary Mathematics*. New York: The Macmillan Company. 1900. 42-43

[11] 高彦休. 唐阙史, 卷下. *http://book.guqu.net/biji/4834.html*

[12] 程大位. 算法统宗. 见：郭书春主编，中国科学技术典籍通汇（数学卷）（第 2 册），沈阳: 辽宁教育出版社, 1994

[13] 沈康身. 历史数学名题赏析. 上海: 上海教育出版社, 2002

[14] Heath. T. L. *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications, 1959. 221-232

[15] Siegler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag, 2002

[16] Manning, K. R. A history of extraneous solution. *Mathematics Teacher*, 1970, **63** (11): 165-174

[17] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, 2012 (2): 1-5

美丽的错误

林佳乐

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

美国学者琼斯（P. S. Jones, 1912～2002）曾说过，数学史的用途之一是向学生揭示曾经阻碍过进步的概念困难和错误；数学概念漫长而曲折的历史，让学生不因自己的不理解而担忧。[1]美国数学家米勒（G. A. Miller, 1863～1951）也说过，清晰地揭示历史上著名数学家的失败，比介绍他们的成功更能让数学教师获益。米勒还认为，许多重要的数学概念如此缓慢地进入人类的智力生活，并遭遇重重阻挠，这对于这些概念的初学者来说具有重要“心理安慰”意义。[2]

英国学者 Fauvel 总结了数学教学中运用数学史的 15 种理由，其中就有一条是“因为知道并非只有他们自己有困难，因而得到安慰”[3]。Tzanakis 和 Arcavi 指出，数学史告诉师生，面对挫折、失败和错误，不必灰心丧气。[4]此外，Gulikers 和 Blom[5]、Jankvist[6]都将“心理安慰”作为数学史对学生的作用。

然而，我们在课堂上多讲数学家的智慧和成就，很少提及他们的错误与失败，也很少有这方面的材料。笔者之一曾撰文介绍历史上数学家的若干错误，包括“虚根相乘”、“椭圆周长”、“素数判定”和“发散级数”[7]，但除了第一个例子，其他并不适合于中学课堂教学。本文再整理若干案例，一方面为中学数学教师提供素材，另一方面也希望引起更多人对历史上“数学家的错误”的关注，进而深刻理解并正确对待今天课堂上学生的类似错误。

案例 1 零的危险

古代印度数学家对于有关零的运算产生很大的困惑，并提出错误的法则。7世纪数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta, 598～670）在其著作《婆罗门修正体系》中讨论了负数和零的法则，其中有$0 \div 0 = 0$[8]。9世纪数学家摩诃毗罗（Mahāvīra）在《计算方法刚要》中给出法则：$a \div 0 = a$。11世纪数学家施律帕提（Scripati）给出法则：$a \div 0 = 0$（$a \neq 0$）。[8]12世纪数学家婆什伽罗（Bhāskara, 1114～1185）在《莉拉沃蒂》中提出了八个与零有关的法则[9]，其中有$(a \times 0) \div 0 = a$（$a \neq 0$）。婆什迦罗还给出$a \div 0 = \infty$（∞是我们今天所用的符号）。

即使到了近代，人们对“除以零”的运算仍有困惑。19世纪德国数学家马丁·欧姆（Martin Ohm,

1792～1872）则认为$(a \div 0) \times 0 = 0 (a \neq 0)$。[10]

古人在处理“除以零”的问题上出现错误，今天学生的理解情况又如何呢？Wheeler &Feghali(1983)对52名职前小学教师的研究发现，67%的职前教师认为$0 \div 0 = 0$。27人给出了详细的解释，15人认为，“一个人将一无所有分给没有任何人，怎么可能得到任何东西，只能是什么也没有。”[11]Ball(1990)对19名职前中小学教师进行访谈，发现只有5人解释了0不能作为除数的原因；7人认为这只是一种需要记住的规定，并未给出合理解释；5人也认为这是一种规定，不过，他们认为任何数除以0都等于0。[12]Even &Tirosh(1995)对33名中学数学教师进行调查，发现很多教师将“4÷0无意义”当作一种规定。[13]

我们有理由相信，历史上数学家的困难会再现于今天的课堂中。教师可以用两种方式来解释为什么零不能做除数。若零可以做除数，则对于不为零的a，设$a \div 0 = b$，得$a = b \times 0 = 0$，矛盾。或者，用 3 除a，得到一个数，用 2 除a得到一个数，再用 1 除a得到一个数，继续用越来越小的正数除a，得到的商越来越大。当用一个接近零的数除a时，得到的商非常非常大，大到无法想象，故不存在一个最大的数。因此，$a \div 0$无意义。

案例 2 面积之误

古埃及纸草书以及两河流域泥版书上所记载的四边形（如图 1，边长依次为 *a*、*b*、*c*、*d*）面积公式为

$$A = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$$

即两组对边平均长度的乘积。事实上，该公式只对于矩形成立，而对其他四边形来说，由该公式得出的值要大于面积的真实值。我国北周时期数学家甄鸾在《五曹算经》中也给出了同样的错误公式。

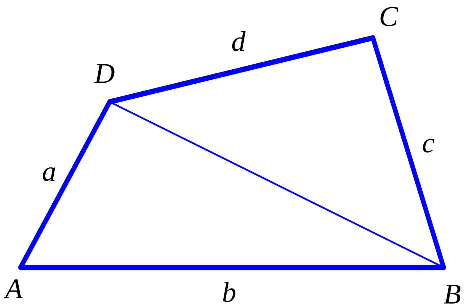


图 1

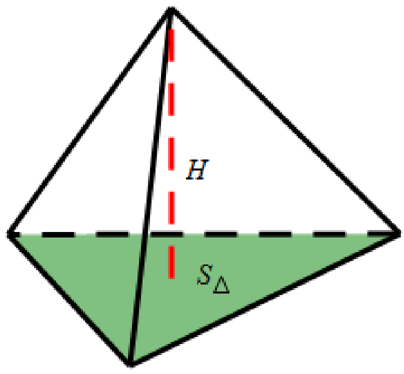


图 2

说来也巧，古代巴比伦祭司将该错误公式用于梯形，竟得出了平分梯形面积、且平行于梯形上、下底的线段（中分线）长度的一个正确公式[14]。设梯形上、下底分别为 a 和 c，则中分线长为

$$l=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

公元 1 世纪，古希腊数学家海伦（Heron）在其《量度》第一卷中给出三角形面积公式：

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

类比海伦公式，婆罗摩笈多及其后继者（包括摩诃毗罗）给出了四边形面积公式：

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$。很不幸，这个公式只适用于圆内接四边形，对于一般四边形并不成立。婆什迦罗已经认识到这一点，但他仍用该公式来近似地计算四边形面积。[9]事实上，仍如图 1，由方程组

$$\begin{cases} S=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}cd\sin C \\ a^2+b^2-2ab\cos A=c^2+d^2-2cd\cos C \end{cases}$$

可推导出一般四边形的面积公式为：

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}},$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$。

古代另一位印度数学家阿耶波多（Aryabhata, 476～550）主观地类比三角形面积公式得出：三棱锥体积等于底面积与高的乘积的一半[15]，即（图 2）

$$V_{\text{三棱锥}}=\frac{1}{2}S_{\Delta}H$$

这让我们联想到，在今天的课堂上，当我们让学生将均值不等式推广到三元的情形时，学生给出 $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{abc}$， $\frac{a+b+c}{2}\geq\sqrt{abc}$ 之类的错误不等式。

案例 3 千虑一失

我们今天的教科书上所给出的棱柱定义是：“有两个面互相平行，其余各面都是四边形，

并且每相邻两个四边形的公共边都相互平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱”（人教版）或“由一个平面多边形沿某一方向平移形成的空间几何体叫做棱柱”（苏教版）。但是历史上，很多教科书却给出了错误的定义。古希腊数学家欧几里得在《几何原本》卷11中给出如下定义[16]：

一个棱柱是一个立体图形，它是由一些平面构成的，其中有两个面是相对的、相等的，相似且平行的，其它各面都是平行四边形。

显然这个定义是有缺陷的，图3所示的十二面体即为一个反例。

由于《几何原本》作为“数学圣经”的巨大影响，该定义在后世可谓谬种流传。美国数学家温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835～1906）和史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）在其《立体几何》（1913年）中给出如下的棱柱定义：“有两个面为平行平面上的全等多边形、其他面均为平行四边形的多面体叫棱柱。”[17]另外，美国数学家费勒（I. N. Failor, 1851～1925）在《平面和立体几何》中这样定义棱柱：“棱柱是两个面为全等且平行的多边形、其他面为平

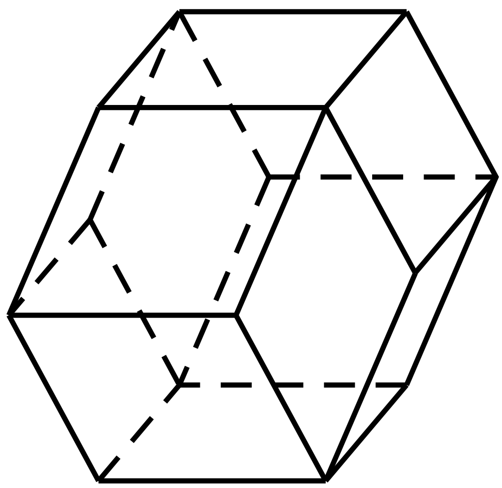


图 3 波利亚的反例

行四边形的多面体。”[18]

直到1919年，美国数学家斯劳特（H. E. Slaught, 1861～1937）和雷恩斯（N. J. Lennes, 1874～1951）才在《立体几何及其问题与应用》(1919)中采用了新的棱柱定义。他们先定义棱柱面，然后再定义棱柱：由棱柱面与和所有母线都相交的两个平行截面所围的多面体叫做棱柱。[19]棱柱的定义至此才得以完善。

案例 4 实测差谬

汉代以前，人们通过实测得到：直径为 1 寸的金球与边长为 1 寸的立方体，其体积之比为 9:16，故得球体积公式：

$$V_{球}=\frac{9}{16}D^3$$

其中 D 为球的直径。《九章算术》采用的就是上述公式。东汉张衡曾给出另一个公式

$$V_{球}=\frac{5}{8}D^3$$

三国时代布衣数学家刘徽首次指出上面两个公式是错误的，较真实值大。错误的根源在于：古人将球与外切圆柱体的体积之比当作 $\frac{\pi}{4}$，而圆柱与外切正方体的体积之比也是 $\frac{\pi}{4}$，因而得出球体积是球外切正方体体积的 $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$。古人取“周三径一”，故得球体积公式 $V_{球}=\frac{9}{16}D^3$。而事实上，古希腊数学家阿基米德已经通过力学原理发现、并用几何方法证明了这个比值为 $\frac{2}{3}$。

印度数学家阿耶波多在《阿耶波多历算书》中也给出错误的球体积公式：

$$V_{球}=\pi r^2\sqrt{\pi r^2}=\left(\pi\sqrt{\pi}\right)r^3$$

摩诃毗罗则给出 $V_{球}=\frac{9}{2}r^3$，与《九章算术》给出的公式相同。

案例 5 三次方程

虽然 5 世纪的中国数学家祖冲之、7 世纪的中国数学家王孝通和 13 世纪的意大利数学家斐波纳契（Leonardo Fibonacci, 1170?～1250?）会求形如

$$x^3+px^2+qx=r\ \left(p>0,q>0,r>0\right)$$

的三次方程正根的近似值，而 11 世纪波斯数学家和诗人奥玛·海牙姆（Omar Khayyam, 1048～1122）会用几何方法解各类三次方程，但 16 世纪以前，数学家们一直未能找到三次方程的一般求根公式。

在一部 14 世纪的意大利数学手稿中，作者类比一元二次方程 $ax^2=bx+c$ 的求根公式

$$x=\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}$$

给出了三次方程$ax^3=bx+c$的求根公式[20]：

$$x=\frac{b}{2a}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}\text{。}$$

如果这个公式正确，那么 16 世纪的意大利数学家塔塔里亚（N. Tartaglia, 1499～1557）和卡丹（G. Cardan, 1501～1576）之间就不会发生那场争论。遗憾的是，这是一个错误公式。

15 世纪，意大利数学家帕西沃里（L. Paccioli, 1445～1517）在其《算术、几何、比和比例全书》（1494）中声称：三次和四次方程的求解在当时和“化圆为方”问题一样是不可解的。由此引起数学家们对三次方程求根公式的探求。

案例 6 点数问题

帕西沃里在《算术、几何、比和比例全书》中提出以下问题：甲、乙二人玩球戏，事先约定：先赢 6 局者胜。当甲赢了 5 局，乙赢了 3 局时，游戏中止。问如何分配赌金？显然，帕西沃里并未意识到该问题与通常的比例问题有何不同，因为他给出的答案是 5:3。在此后的一个多世纪里，没有人给出这类问题的正确解答。

一般地，概率论历史上著名的“点数问题”可表述如下：“赌技相当的甲、乙二人赌博，约定先赢p局者胜。当甲需要再赢m局，乙需要再赢n局时（$1\le m<p, 1\le n<p$），赌博中止。问如何分配赌金？”虽然，卡丹和塔塔利亚都意识到帕西沃里的答案不对，但他们自己也给出了错误的答案。卡丹在《实用算术与测量》中给出的答案是：$(1+2+\cdots+n):(1+2+\cdots+m)$；而塔塔里亚在《数与量通论》中给出的答案则是：$(p-m+n):(p-n+m)$。[21]17 世纪意大利数学家卡兰奇（Calandri）则认为，赌金应按$\frac{1}{m}:\frac{1}{n}=n:m$来分配[22]。

法国著名赌徒德·默勒（De Méré）向数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623～1662）请教上述“点数问题”，导致了帕斯卡对该问题的探求以及与费马的通信，最终导致概率论的诞生。帕斯卡给出的正确结果是[21]

$$\left(C_{m+n-1}^0+C_{m+n-1}^1+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}\right):\left(C_{m+n-1}^0+C_{m+n-1}^1+\cdots+C_{m+n-1}^{m-1}\right)$$

德·默勒同时又向帕斯卡提出第二个问题：一对骰子需要掷多少次，才能使出现两个6点的机会达到50%？卡丹的观点是，因为每掷36次总有一次能掷出两个6点，所以在18次投掷中，出现两个6点的机会是50%。同样，一枚骰子掷3次，出现2点的机会是50%。这就意味着，1枚骰子掷6次，必会出现一个2点；两枚骰子掷36次，必会出现两个6点。卡丹并没有意识到自己的错误。[23]

事实上，在一枚骰子的情形中，n 次投掷中至少有一次得到2点的概率为 $p_n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$，$p_3 \approx 0.4213$，$p_4 \approx 0.5177$，至少故需要掷4次才能达到要求。在两枚骰子的情形中，n 次投掷中至少有一次得到两个6点的概率为 $p_n = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$，$p_{24} \approx 0.4914$，$p_{25} \approx 0.5055$，故至少需要掷25次才能达到要求。德·默勒误为24次，因为他相信24:36=4:6。[24]

在今天的课堂上，我们也会面对学生的各种错误。如果了解历史上数学家的那些错误，我们就会更深刻地理解学生的错误，因为，倘若我们能够走进古人的心灵之中，那么我们也必能走进学生的心灵之中。比利时-美国著名学者萨顿（G. Sarton, 1884～1956）说过："我们对年轻人的错误、甚至对他们的不宽容再宽容也不过分。"这正是一位科学史家在深刻理解历史之后所做出的振聋发聩的断言。

参考文献

[1] Miller, G. A. *Historical Introduction to Mathematical Literature*. New York: The Macmillan Company, 1927. 38-39

[2] Jones, P. S. The history of mathematics as a teaching tool. *Mathematics Teacher*, 1957, 50(1): 59-64

[3] Fauvel, J. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6

[4] Fauvel, J., van Maanen J. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 262-264; 272-273

[5] Gulikers, I., Blom, K. 'A historical angle': A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, **47**: 223-258

[6] Jankvist, U. T. *Using History as a 'Goal' in Mathematics Education*. Doctoral Dissertation, Roskilde University, 2009

[7] 汪晓勤. 数学家也会犯错误. 中学数学教学参考, 2004(3): 63-64

[8] Roming, H. G. Early history of division by zero. *American Mathematical Monthly*, 1924, 31: 388

[9] 婆什迦罗. 莉拉沃蒂 (林隆夫, 徐泽林等译). 北京: 科学出版社, 2008. 46-47; 118-119

[10] ANON. The dangerous hole of zero. *HPM Newsletter*, 2001, (46): 2-3

[11] Wheeler, M. M., Feghali, I. Much ado about nothing: preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1983, 14(3): 147-155

[12] Ball, D. L. Prospective elementary and secondaryteachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1990, 21(2): 132-144

[13] Even, R., Tirosh, D. Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 1995, 29(1): 1-20.

[14] Neguebauer, O., Sachs, A. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: American oriental society, 1945. 46-47

[15] Clark, W. E. *The Aryabhatiya of Aryabhata: An Ancient Indian Work on Mathematics and Astronomy*. Chicago: The University of Chicago Press, 1930

[16] 欧几里得. 几何原本(兰纪正等译). 西安: 陕西科学技术出版社, 2003. 506

[17] Wentworth, G., Smith, D. E. *Solid Geometry*. Boston: Ginn& Company, 1913. 317

[18] Failor, I. N. *Plane and Solid Geometry*. New York: The Century Co., 1906. 304

[19] Slaught, H. E., Lennes, N. J. *Solid Geometry with Problems and Applications*. Boston: Allyn & Bacon, 1919.58

[20] Cossali, P. Notice historique sur la resolution de l'équation du troisième degree. *Bulletin de Bibliographie, d'Histoireet de Biographie Mathématiques*,1855, 1: 165-196

[21] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史. 北京: 科学出版社, 2002. 215-226

[22] Furingghetti, F. & Paola, D. History as crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 2003, **32** (1): 37-42.

[23] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*.Massachusetts: Addison-Wesley, 1998

[24] Ore, O. Pascal and the invention of probability theory. *American Mathematical Monthly*, 1960, 67(5): 409-412

大学文科生对数学文化课程的期望*

彭 杰

（德宏师范高等专科学校数学系，云南德宏 678400）

1 问题提出

近几年来大学生文化素质教育越来越受到重视，而文化素质教育的一个重要组成部分就是学生在自然科学方面的文化素质，许多高校把数学文化课程列入学生文化素质教育的核心课程，数学文化课程在国内很多高校得到了兴起与发展[1-2]。一些数学文化教育实践者提出了数学文化课程的指导思想、课程内容、教学方法、考核方式等一系列如何建设的宝贵经验[3-9]。可换一角度思考，关注课程建设似乎更多在课程的外部建设上，还没能从课程建设的内部需求，即学生的需求和期望出发。关注学生群体内心的所需，洞察学习群体的真正学习价值取向，课程建设和教学才更有实际取向的意义和效果。我们把调查角度放在了解大学文科生对数学文化课期望的研究上，在本研究中把期望界定为：大学生对即将学习数学文化课的要求和希望达到的目标。学生选修该门课程，他们对这门课程有些什么样的期望？这些期望对数学文化课程的建设和教学有什么启示？

2 研究方法

2.1 样本选取

本研究选取上海市一所综合性研究型“985 工程”高校，2008 年该校在国内率先将数学文化课程纳入文科生通识限选课程模块之中，由“大学数学”、“数学文化”、“大学统计”和“统计调查方法”4 门通识课程组成模块，学生必须修读模块中的一门(2 学分) [10]。本研究样本选取 2011 级、2012 级该校选修《数学文化》课的文科专业学生，2011 级选修共 121 人，2012 级选修共 73 人，选修共计 194 人，这 194 人全部参与问卷调查，收回有效问卷 184 份，有效率为 94.8%，有效被试学生各个专业人数构成情况见表 1。

* 本文是作者在华东师范大学数学系访学期间完成的。

表 1　有效被试基本构成情况

专业	人数	水平	人数
中文	26	言语听觉科学	20
思政	24	心理学	19
社会工作	14	艺术设计	38
社会学类	3	对外汉语	10
特殊教育	30	合计	184

2.2 调查实施

为能更客观全面的了解学生内心期望，不受问题客观选项的干扰和限制，收集到比较广泛的资料，探询到学生群体的想法和观点。本研究采用开放性问卷，问卷题目是：对本学期学习的《数学文化》课有什么期望？结合自己的数学观，谈谈内心真实的想法。

调查实施分别在 2012 年 9 月份初(2011 级学生）和 2013 年 3 月初（2012 级学生），安排在开学的第一次课后，收到的问卷有许多广泛的珍贵的第一手资料，其中不乏一些细腻的、真实的、原始的、一些鲜为教师所知的想法。根据学科教学的特点和数学文化课的特点，笔者按照以下线条：从对课程的教学内容、教学方式、考核形式、性质认识、教师人格魅力再到对自身学习情感和专业发展的期望共七大方面进行整理归类，归纳分析如下。

3 研究结果与分析

以下表中每小项人数是指问卷中提到该项内容的人数，比率是指占总有效人数的百分比，排序是该小项在这表中按比率从大到小的次序，需要解释的是：学生的问卷有的只涉及到一或二个方面，并不是所有七个方面全部涉及，有的同时提到某表中的几项小内容。每项表后我们整理了一些学生有代表性的真实原语作为定性分析的材料，让读者通过最简单直接的方式看到学生内心的期望。

3.1 关于教学内容的期望

大部分学生对课程的教学内容是很关注的，17.4%的同学都提到授课的内容要能展示出数学的美，其次 11.9% 的同学期望老师能介绍数学家的奇闻趣事，10.3%的提到介绍数学生活化的例子等。这表明学生对数学与美、数学与生活、数学与历史、数学与游戏、数学与哲学等内容是很向往了解，期望老师能在课堂中讲授，具体见表 2。

表 2　文科学生对教学内容的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	数学美的例子	32	17.4%	6	在各个领域的应用	15	8.1%
2	数学家的故事	22	11.9%	7	经典数学名题	8	4.3%
3	数学生活化例子	19	10.3%	8	数学与哲学	6	3.2%
4	数学游戏	17	9.2%	9	其它	3	1.6%
5	数学的进展史	16	8.7%				

下面是代表性的学生期望语表述:（1）数学美的例子：想多知道一些关于体现数学美的例子，感受数学的美，体会到数学的魅力。（2）数学家的故事：多讲些有关数学家的历史趣闻，特别是近代数学家的故事。(3)数学的生活化：介绍生活中可以用到的数学知识，简单易懂，与生活息息相关的例子。（4）数学游戏：穿插锻炼数学思维的小游戏，让我们好好感受趣味数学的存在。（5）数学的进展史：想了解数学的历史发展进程,特别是重大数学思想的出现。(6)在各个领域的应用：多介绍一些数学在各个领域中的应用，见识数学博大精深的一面。(7)经典数学名题：介绍一些历史上流传下来经典的数学名题。(8)数学与哲学：希望适当地穿插哲学史内容，可以更有力地说明数学与人文科学的关系。

3.2 关于教学方式的期望

由于大部分学生没有提及这项内容，学生多数都默认讲授式的授课方式，对这项教学方式提到人数不多，其中 10.3%的学生提到表示还是习惯接受教师专题式的讲授，9.8%的学生提出能有专门安排给同学上台展示的机会和期望课堂有更多互动性，具体见表 3。

表 3　文科学生对教学方式的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	专题讲授式	19	10.3%	3	讨论式	6	3.3%
2	专题学生展示	12	6.5%	4	其它	2	1.1%

下面是代表性的学生期望语论述:（1）专题讲授式：老师现在的专题式讲授挺好的，没什么其它期待。（2）专题学生展示：希望让同学分小组讨论一些有关数学文化的论题，收集一些有趣的资料来进行分享，让大家有上台展示交流的机会。（3）讨论式：希望老师可以让学生参与进去讨论，课堂上有更多的互动。

3.3 关于考核形式的期望

问卷中一些学生提出对考试题目类型和方式的一些要求，7.6%的学生直接提出期望考

试能轻松化、灵活化，8.1%的学生期望考试题目要见仁见智，具有开放性和文化性，这表明文科学生受以往数学考试阴影的影响，想接受一种新的、轻松化的考核方式，具体见表 4。

表 4　文科学生对考核形式的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	考试的轻松灵活	14	7.6%	3	考试题目文化性	7	3.8%
2	考试题目开放性	8	4.3%	4	其它	2	1.1%

下面是代表性的学生期望语论述:（1）考试轻松灵活：希望老师说明考勤要求和考试范围，希望能凑够学分，轻松愉快过考试。（2）考试题目开放性：考试时可以出一些开放性的、见仁见智的题目。希望老师考试时不要考太多背诵的东西，以理解为主。（3）考试题目文化性：希望老师考试时可以出一些文化性的题目，不要是纯粹的数学题目。

3.4 关于教师人格魅力的期望

教师的人格魅力是学生提到比较多的，36.4%学生对授课教师的幽默风趣感到非常满意，12.5%的学生喜欢教师的知识渊博，几乎提到该项的学生都对授课教师的人格魅力写出了赞美的词语，并期望一直保持这样。说明教师的授课风格对学生有着很大的吸引力，具体见表 5。

表 5　文科生对任课教师人格魅力的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	幽默风趣	67	36.4%	3	和蔼亲切	10	5.4%
2	知识渊博	23	12.5%	4	激情条理	3	1.6%

下面是代表性的学生期望语论述:（1）幽默风趣：老师很幽默风趣，课堂上充满了笑声，老师的个人魅力是很强的，让人不忍错过您的每一句话，（2）知识渊博：老师的知识很渊博，我喜欢这样的老师。（3）和蔼亲切：老师总微笑着，和蔼可亲，一改以往数学老师戴厚厚镜片板着脸的印象，觉得很容易接近呀。（4）激情条理：老师您上课生动有趣，又很有激情。（注该问卷是在上了一次数学文化课之后进行）。

3.5 关于自我学习情感态度的期望

自我学习情感态度的期望是问卷中提及学生人数最多的，24.5%的学生提到学习完该课程后希望能改变对数学的厌恶感，19.0%的学生提到希望在该课程中能真正感受到数学的美，值得一提的是有 10.3%的学生期望该课程能彻底的让他们喜欢上数学这一学科。细腻而又丰富的情感期望在问卷中占了很大分量，具体见表 6。

表 6　文科生对自我学习情感态度的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	改变对数学的厌恶	45	24.5%	5	增加对数学文化的喜爱	16	8.7%
2	感受数学的美	35	19.0%	6	有新的价值观	11	6.0%
3	更深入的了解数学	22	11.9%	7	生活态度的改变	9	4.9%
4	变得喜欢数学学科	19	10.3%	8	其它	5	2.7%

下面是代表性的学生期望语论述:（1)改变对数学的厌恶：数学学习在我的过去生活中只能用两个字来形容“恶梦”，希望通过该课的学习，能够消除对数学的嫌恶感。(2)感受数学的美：这感觉就像和数学进行一场恋爱，真正感受数学的美，领略数学的魅力。（3）更深入的了解数学：希望可以了解到过去自己世界里完全不一样的数学，能进一步了解数学、理解数学。（4）变得喜欢数学学科：能变得对该课充满兴趣和热情，彻底喜欢上数学这门学科。（5）增加对数学文化的喜爱：希望该课能增加我对数学文化的喜爱，提高数学文化的鉴赏力。(6)有新的价值观：希望能使自己的数学观有所改变，有新的价值观。（7）生活态度的改变：希望影响到自己的生活态度，更理性地看待我们周围的生活，乃至人生大道。

3.6 对自身专业发展的期望

因为开课对象是文科专业学生，所以这项也具有关注的意义，18.0%的学生期望能提高自己的数学素养，13.0% 的学生期望可以培养文科生中必要的理科思维，8.4%的学生提到期望能在专业上有所应用，可看出部分学生从对专业发展有所帮助的角度来学习该课程，所以教师课程教学内容的选取上要兼顾文科生的专业需求，具体见表 8。

下面是代表性的学生期望语论述:（1）提高自身的数学素养：希望能通过该课学习，提高自身的数学素养，能够培养起一种更加理性的思维，谨慎、客观地看待问题。（2）必要的理科思维：我现学的是文科专业，不管我以后从事什么职业，理科思维都是必不可少的，所以我对这门课程寄予了很高期望。（3）专业应用：我们设计专业用到一些比例问题，希望介绍一些数学与建筑的例子。（4）为平时写作积累素材：为平时写作积累素材，扩大知识面，避免在文学写作中犯知识认识上的错误。(5)提高自身学习能力：希望有助于提高专业知识

表 7　文科生对自身专业发展的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	提高自身数学素养	33	18.0%	4	为写作积累素材	6	3.2%
2	必要的理科思维	24	13.0%	5	提高自身学习能力	4	2.2%
3	专业应用	16	8.4%				

上的学习方法。

3.7 对课程文化内涵的期望

对课程文化的内涵期望上，9.2%的学生期望学到更多关于文化的东西，6.5%学生期望能带来一些潜移默化的东西，5.9%的学生期望该课是思想和文化之旅，说明学生对课程文化内涵的认识有美好的期待，具体见表 9。

表 8 文科生对课程文化内涵的期望情况

排序	内容	人数	比率	排序	内容	人数	比率
1	独特内涵风采	17	9.2%	4	文化之旅	5	2.7%
2	潜移默化的东西	12	6.5%	5	其它	3	1.6%
3	思想之旅	6	3.2%				

下面是代表性的学生期望语论述：(1) 独特内涵风采：希望积累一些数学的文化精华，可以从一个新的视角，展示数学及其背后的独特内涵风采。(2)潜移默化的东西：希望课程能带给我们点什么？不是具体的解题思路，是一种可以称得上潜移默化的一些“内化”的东西。(3)思想之旅：非常期待一堂堂充满理性和感性之美的思想之旅。(4)文化之旅：希望这是充满乐趣的探索之旅，每一次课都是一次美妙的文化之旅。

3.8 对课程期望总的排序结果

对课程期望汇总分析，排在首位的是自我学习情感态度方面的期望，在分析问卷时笔者看到许多学生都用了“恶梦”、“憎恨”、“嫌恶”、“阴影”等词语来形容过去学习数学和考试的心理历程、又用了“改变”、“提高”、“能有”、“爱上”等之类的美好词语，来期望学习这门课给自己带来的情感变迁，显示了情感在学习中的突出重要性。其次是对课程教学内容的期望，这也显示了教学内容对学生学习情感起着关键作用。第三的是教师人格魅力的期望，任课教师授课风格得到了绝大部分学生的一致喜欢，让学生与数学文化课一见钟情。排列第四的是对专业发展的期望，学生能从自身专业需求考虑能力素质的均衡发展，等等。把文科生关于

从对课程以上这七个方面的期望，按比率从高到低总的排序，归纳整理如下图一。

4. 结论与启示

4.1 结论

根据以上的统计和分析，我们得到以下结论。

（1）文科生带着较高的情感期望来选修数学文化课

大部分学生都显示出期望通过该课程的学习，能改变他们的数学观，激发他们学习数学

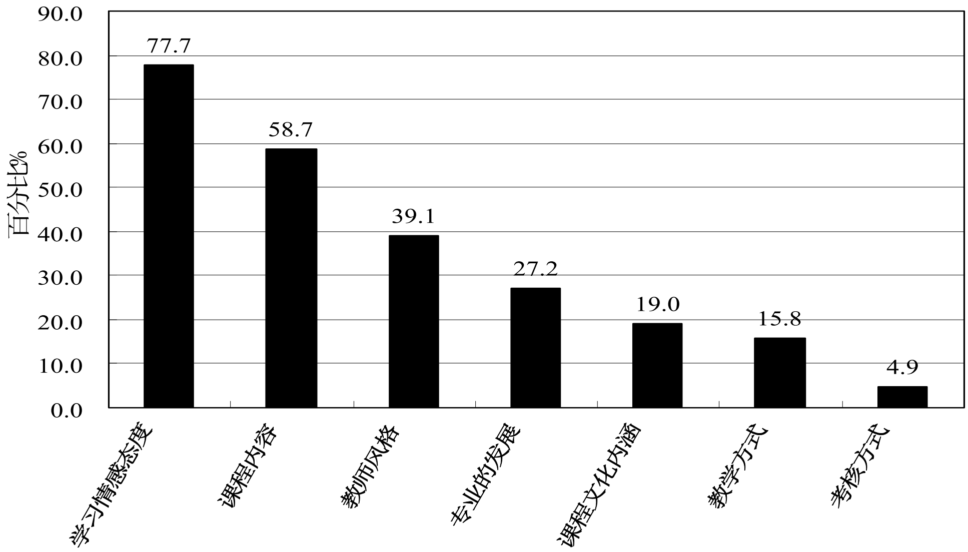


图 1 大学文科生对数学文化课程的期望排序图

文化的兴趣，让他们感受数学的魅力。其次学生对教学内容的关注度很高，他们期望感受到有文化性的、有趣味的、有魅力的数学，以此来达到数学学习情感态度的变迁。

（2）存在着期望目标高而定位较低的现象

因为该课课时和学分少，调查问卷中发现许多学生学习目标不明确，主动性不高。文科生因数学基础、专业方向、个人志向等不同，导致期望内容也表现不同，大部分学生只关注教师教学内容、教学方式能带来自身情感、能力素质的变化，却对自身具体的学习行为几乎没提及，也就是文科生在该课上还过多依赖教师的教学行为，自身的学习行动目标定位不显现。

（3）课程实施与期望相符会激发学习的内驱力

问卷表明关于学生对教师教学风格的期望和实施的情况相符，满足了学生的期望要求并促进了学生的学习动力。所以数学文化课的实施情况与大学生的期望相符才会形成其较高的评价和满意度，激励他们的热情，提高参与度，文化素质教育也将得到良好的效果。

4.2 启示

基于以上结论，我们得到以下启示。

（1）精选内容兼顾所需

笔者认为数学文化本无固有的体系，它的选材也具有大多弹性，但主要能体现数学文化的思想、方法和精神，又充分体现学生期盼的内容如：数学史（尤其历史上数学家的轶事）、

数学与生活、数学美的鉴赏、数学与文学、趣味数学等，恰当时能融合文科学生的一些专业需求，彰显出熠熠生辉的数学文化。那么教师的课程教学内容如何在有限授课量内选取，又能充分体现出数学文化的本质内涵，是值得授课教师和课题组共同商榷共同完成的一项任务，确定教学的授课线索、主题、内容然后分模块教学，也是很有效的模式。学生对教学内容的期望排序在总期望的第二位，教学内容在学生学习中起着关键作用。特别提出一点建议，课程的授课内容一定要把选课学生的专业考虑进去，如数学与文学（中文专业的）、数学与建筑（设计专业的）等，对学生自身的素质提高和专业发展很有帮助。

（2）彰显教师人格魅力

在大班制的课堂教学中，学生默认的接受教师的专题讲授式教学，这是相对高效率的、自然的课堂教学方式。当然教学方式的灵活化也是部分学生对课堂教学方式的期待，如分小组-准备专题-查阅资料-上台展示-交流讨论，是教师发挥学生主动性的有效方式。在对以往该课程实施的教学过程中，文科学生关于数学与游戏、数学与建筑、数学与文学、数学与书法、数学与爱情等方面的专题展示，视角新颖内容丰富，带有文科生的特性而又不失理性思维，起到良好的教学效果。教师的教学风格不容置疑也是学生们比较在意和期望的，能主导着学生的学习情感与教学效果，笔者认为在教学过程中教师的教学风格尤为重要，也就是体现在教师身上的人格魅力，如教师的幽默风趣、知识渊博、和蔼可亲、激情条理等能在学生学习中起着非常重要的促进作用，教师发挥人格魅力形成自己独特的教学风格，会收到意想不到的教学效果，所以教师的自身建设也是课程建设的落脚关键点。

（3）洋溢数学文化芳香

许多学生有想更深入了解数学文化内涵的期望，那么学生课外阅读相应书籍也是必不可少的，文科生可各取所需，选择对自己能力素质和专业成长有帮助的书籍。授课教师有选择地介绍一些数学与文化的名篇佳作、相关领域大师们的著作和与数学有关的精彩电影等，对提高学生的科学视野和领悟数学文化的内涵很有帮助。还有校园文化氛围的营造也是一条很好的途径，如华师大的数学系学生社团每年在全校范围内开展了数学文化节、数学作文比赛和数学史的话剧演出，受到了全校范围内学生的关注与积极的参与，还有华师大数学系自办的文化刊物《蚁趣》、教师讲座等起到营造数学文化氛围的良好效果。

（4）稳中求轻考核方式

学生期望的是轻松灵活的考试方式，要既能客观衡量学生的学习水平，又能兼顾学生对考试的小要求，也就是考核方式和内容都要达到稳中求轻的要求。反过来另一方面，面对学生学习目标期望过高，自我学习行动定位过低的现象，是采取试卷形式的表现性评价方式，还是其它评价方式结合的考核，是任课教师要考虑的一个问题，如何促进学生平时学习的内驱力和学习效果，笔者认为每模块教学内容设计时应加入过程性评价，如每模块结束时可让

学生自己写阶段性的学习帖子（分目标、过程、效果与认识），结合试卷形式的学期末表现性评价方式。学期末表现性评价方式可以是数学试卷或数学论文或读书报告等，各项权重比值可由各个学校根据实际教学情况而定。研制出具体可行的评价方案能促进学生学习的内驱力与行动，当然课程的考核评价方式有待在实践教学中探索。

“改变一种印象，架起一座桥梁，提高一点素养，增添一种趣味，传递一缕书香”[10]，这是我们执教者对该门课程最殷切的寄望和实施的出发点。以上大学文科生对数学文化课期望的调查分析，为当下高校数学文化课程建设提供另外一个视角度的参考。

参考文献

[1] 邹庭荣等(2012). 华中农业大学数学文化课程的建设与推广. 数学教育学报, 21(1): 4

[2] 顾沛(2012). 南开大学的数学文化课程十年来的探索与实践. 中国高教研究, (9): 92-93

[3] 周明儒, 苗正科(2009). 分层次多形式开设大学数学文化类课程. 数学教育学报, 18(4): 78-80

[4] 顾沛(2003). 南开大学开设数学文化课的做法. 大学数学, 19(2): 23-25

[5] 马文斌, 吕 雄(2011). 关于讲授数学文化课的思考. 内蒙古农业大学学报(社会科学版), 13(5): 140-144

[6] 郭健等(2009). 大学数学文化课程的建设与教学实践. 数学教育学报, 18(4): 81-83

[7] 梁绍君(2008). 数学文化课程教学内容组织探. 重庆文理学院学报(自然科学版), 27(4): 83-85

[8] 陈克胜(2009). 基于数学文化的数学课程再思考. 数学教育学报, 18(1): 22-24

[9] 张明(2012). 文科专业开设选修课《数学文化》课程的探索与研究. 佳木斯教育学院学报, (11): 164-165

[10] 汪晓勤(2012). 通识限选课程数学文化的教学实践. 高等理科教育, 104(2): 112-114

2013 年数学文化与教育国际研讨会纪要

黄友初

（华东师范大学 数学系，上海 200241）

全民教育体制下，学生为了升学而学数学的动机将会降低，数学在社会生活中的价值性和数学课程的趣味性将成为吸引学生学习数学的重要因素，而在这种数学教育模式下，数学文化将会扮演重要角色。在此背景下，2013 年 6 月 21 日-22 日，在台湾中央研究院数学研究所举办了 2013 年数学文化与教育国际研讨会。会议由台湾行政院国家科学委员会科学教育处数学教育学门主办，台湾国立勤益科技大学通识教育学院和台湾中央研究院数学所联合承办。会议邀请了数学史与数学之间关系国际研究小组（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM）前主席，荷兰格罗宁根大学的 Jan Van Maanen 教授，挪威奥斯陆大学的 Helmer Aslaksen 教授，华东师范大学的汪晓勤教授和浙江师范大学的张维忠教授四位大会报告专家。此外与会的还有温州大学的黄友初副教授，美国明尼苏达州立大学的陈建平副教授，以及包括李国伟教授、洪万生教授、林孝信教授、刘柏宏教授、杨德清教授、黄文璋教授、陈宜良教授、梁淑坤教授等台湾著名学者在内的台湾各大学教师、中小学的教师和大学生。

1 研讨会议程

在两天的会期中，一共安排了四场专题演讲（Keynote Speech）、四场专家论坛（Discussion Forum）和两个综合座谈（Plenary Discussion）。四场专题演讲都安排在上午，每个上午各安排两场专题演讲；四场专家论坛分别安排在两个下午，由一位主持人和 3-4 位专家组成，与会专家每人做 20 分钟的主题报告，然后在主持人的串联下，大家就一些议题进行 30 分钟的讨论，并和台下听众进行互动；在每天会议的最后各安排一场为期 30 分钟的综合座谈，由会议承办单位的专家主持，就当天会议所探讨的内容和听众进行交流，并做归纳性总结。

本次会议的地点为位于台湾大学天文数学馆 202 的台湾中央研究院数学所报告厅，开幕式从 6 月 21 日上午九点半开始，在台湾行政院国家科学委员会科学教育处数学教育学门召

集人李国伟教授的简短贺词之后，开始了本次会议的第一场专题演讲。来自荷兰格罗宁根大学的 Jan Van Maanen 教授做了题为“How mathematics traveled from East to West via ‘Telling mathematics’”的报告。茶歇后，进行第二场专题演讲，由华东师范大学的汪晓勤教授做了题为“教育取向的数学文化管窥”的专题演讲。

21 日下午一点十分开始进行了第一场专家论坛，主题为数学文化面面观。在浙江师范大学的张维忠教授做了题为“数学文化的内涵与教育价值”的报告，台湾中央研究院数学所的李国伟教授做了题为“数学文化与数学思维”的报告，台湾国立高雄大学的黄文璋教授做了题为“数学与不确定性”的报告之后，三位专家和来自台湾世新大学的主持人林孝信教授，就数学文化的定义、内涵和价值做了探讨，并回答听众的提问。茶歇后，进入了第二个专家论坛，主题为数学文化融入课程的策略与挑战。在来自挪威奥斯陆大学的 Helmer Aslaksen 教授做了题为“Strategies and challenges for integrating mathematical culture in teaching”的报告，台湾中央大学的单维彰副教授做了题为“数学文化融入数学课程的策略与挑战”的报告，台北医学大学的英家铭助理教授做了题为“作为通识课程的数学：医学大学中的尝试”的报告后。然后三位专家和来自台湾师范大学的主持人洪万生教授就数学文化在数学课程、数学教学中的应用进行了讨论，并回答听众的提问。论坛结束后，中途没有休息紧接着进入第一天的综合座谈。首先由会议承办单位之一的国立勤益科技大学校长赵敏勋教授致辞，然后是国立勤益科技大学通识教育学院院长刘柏宏教授介绍了本次会议的目的，并就数学文化和数学教育谈了几点想法。

6 月 22 日的会议流程和前一天基本一致，上午由浙江师范大学的张维忠教授进行第三场专题演讲，题目为“中国大陆数学文化与数学教育研究的回顾与反思”。然后由挪威奥斯陆大学的 Helmer Aslaksen 教授，做了题为“Teaching a course on mathematics in art and architecture”的第四场专题演讲。下午第一个专家论坛的主题是数学文化与师资培养，在华东师范大学的汪晓勤教授做了题为“数学文化、数学史与数学教师专业发展”的报告，温州大学的黄友初副教授做了“数学史与职前教师教学知识”的报告，台湾国立东华大学的张子贵副教授做了题为“建构国小师资培育生的数学文化课程之研究”的报告后，三位专家和来自台湾国立嘉义大学的主持人杨德清教授，就数学文化、数学史与教师教育进行了探讨，并根据听众的要求对一些具体的教师教育方式进行了介绍。下午的第二个专家论坛主题是 What can Western and Eastern mathematics learn from each other，在来自荷兰格罗宁根大学的 Jan Van Maanen 教授介绍了西方的数学教育，美国明尼苏达州立大学圣克劳德分校的陈建平副教授以方程为例介绍了东西方数学的差异，台北市立教育大学的苏意雯助理教授做了题为

“日本和算特色与教学实作”的报告，以及来自法国的台湾国立清华大学博士后 Charlotte Pollet 就东西方数学的区分和联系做了介绍之后，四位专家和主持人，来自俄罗斯的台湾国立清华大学 Alexei Volkov 副教授，就东西方数学以及数学教育的差异和联系进行了探讨，并就听众的要求，介绍了各自国家的数学教育情况。论坛结束后，进入综合座谈部分，这也是本次会议的最后一个议程，由台湾行政院国家科学委员会科学教育处数学教育学门召集人李国伟教授和国立台湾勤益科技大学通识教育学院院长刘柏宏教授分别就会议进行了总结。

2 会议研讨内容

本次会议中，共有 13 位学者做了 17 场报告，还有 4 个 30 分钟的集体探讨和 2 个 30 分钟综合座谈，从会议所研讨的内容上分析，可将本次国际研讨会分为东西方的数学交流、数学文化的研究现状、数学文化与数学教学、数学文化与教师教育等四个主题。

2.1 东西方数学的交流

数学史在数学文化中一直扮演着重要的角色，历史上东西方数学有哪些异同点，是如何相互影响的？这些一直是数学史与数学教育研究中值得探讨的话题。本次会议中有很多学者具有深厚的数学史研究功底，也有多人具有东西方生活的经历，这使得本次会议对东西方数学的探讨显得十分有价值。在大会的专题演讲（一）中，Jan Van Maanen 教授认为，历史上很多同类的数学问题都在东方和西方出现过，类似问题在丝绸之路沿线地区的数学史中也出现过；我们可以在数学课堂教学中通过讲数学（telling mathematics）的形式，向学生分别讲述东西方的数学问题，促使学生的思考和比较。他同时也在报告中指出，在课堂教学中“讲数学”必须同时注意历史（historical）、个人(personal)和教育(educational)三个维度。

本次会议中专家论坛（四）的主题就是东西方数学的相互传播，与会的四位专家和主持人在论坛中，介绍了东西方的数学以及数学教育，并认为将东西方的数学史作为教学素材，在教学中分别向学生展示，是一种理想的教学选择。可以让学生感受到东西方数学的异同，感受数学的历史文化，并通过比较能让学生更好的理解和掌握现有的数学知识。

2.2 数学文化的研究现状

数学文化已经在数学和教育界有了广泛的研究群体，虽然和数学文化有关的文献层出不穷，但是至今数学文化仍然没有一个确切的，为学者所公认的定义。本次会议中，对数学文

化的研究现状也进行了探讨。在专题演讲（三）中，张维忠教授从数学教育的视角就中国大陆数学文化的研究情况进行了介绍。在阐述数学文化具有重要教育价值的同时，他也指出虽然现在的数学文化研究还没有明确的定义，但是从教育的角度上说，教育本来就是基础的、零散的、田园牧歌式的，它面对的是拥有不同个性、特长的人，所以很难像科学那样有量化的“准确”定义。因此，数学文化的这种开放性和数学课程的开放性、数学学习的群体性都是相匹配的。在专题演讲（四）中，Helmer Aslaksen 教授从艺术和建筑的视角阐述数学的文化。他认为从艺术的角度来说，数学文化可以分为以下四种类型：艺术中的数学（Mathematics in art）、数学的艺术（Mathematical art）、作为艺术的数学（Mathematics as art）、数学是一种艺术（Mathematics is art）。类似观点也可以用来将目前的数学文化研究分为两种类型，一种是数学中的文化，另一种是文化中的数学。

会议专家论坛（一）的主题是数学文化面面观，在论坛中三位专家分别从不同角度介绍了数学文化的研究现状后，专家和主持人就数学文化的定义、内涵和价值做了探讨。并一致认为，数学文化的特点决定了其内涵的复杂性和广泛性，但数学文化内涵的不唯一，并不成为数学文化研究的障碍或缺点，也不影响数学文化的教育价值，相反从数学教育的角度上说，这恰恰是对个体丰富性的尊重、对数学文化本质的深刻理解、也更有利于对数学教学的开放性的把握。

2.3 数学文化与数学教学

在数学文化研究者的努力下，如今教育研究者和数学教师都认可了数学文化的教育价值，但是研究表明在课堂教学的实践层面，数学文化并没有过多的体现，究其原因多数一线数学教师对如何在教学中融入数学文化还缺乏深入的了解。在本次会议的专题演讲（二）中，汪晓勤教授认为数学史融入数学教育不是只有讲数学故事这种形式，他以数学史为例，认为数学史和数学教育的融合程度，可以由浅入深分为附加式、复制式、顺应式和重构式这四种形式（如表 1 所示），并用详实的案例说明了这四种融入方式在教学中的使用。

会议的专家论坛（二）以数学文化融入课程的策略与挑战为主题，在论坛中，三位专家分别以自身的经历为例，介绍了在教学中融入数学文化的策略和挑战。然后，专家和主持人就数学文化在数学课程、数学教学中的应用进行了讨论，认为数学文化可以有效的提升学生学习数学的兴趣，消除学生的畏惧感，拉近数学与生活的距离，并一致认为以培养数学素养为目的的数学教学，更需要数学文化的融入。在会议的两个综合座谈环节中，李国伟教授和

刘柏宏教授这两位本次会议的承办者也一致认为，数学文化对数学教育的正面影响已经十

表 1 数学教学中运用数学史的方式

类别	描述	运用方式	可达到效果
附加式	教学中展示有关数学家的图片，讲述数学史上的趣闻轶事	直接运用	提升兴趣，调节学习，初步感受数学的文化味
复制式	在教学中直接采用历史上的数学问题、解法等	直接运用	拉近与历史的距离，感受数学的神奇
顺应式	根据数学历史材料，编制或改编数学问题	间接运用	借助历史，来帮助知识点的学习
重构式	借鉴或者重构知识的发生、发展历史	间接运用	体验数学发展中火热的思考过程，感受数学的魅力

分显然，特别是在如今倡导数学素养的时代背景下，目前我们所需要深化研究的就是探索如何在数学教学中更好的融入数学文化，做到数学知识和数学文化的和谐融合，从而更好的促进数学教育的发展。

2.4 数学文化与教师教育

数学文化融入数学教育的关键因素是教师，如果教师对数学文化了解不多，也不知道该如何在教学中融入，那么数学文化的教育价值就很难在实际的数学教育中得到彰显。因此，在教师教育中提升教师的数学文化素养，就是显得十分重要。为此，本次会议的专家论坛（三）以数学文化与师资培育作为主题，在论坛中汪晓勤教授从教师专业发展的视角介绍了如何提升职后教师的数学史素养、黄友初副教授从教师教学知识的视角介绍了如何在数学史课程中发展职前教师的教学知识、台湾国立东华大学的张子贵副教授以自己的教学工作为例，介绍了如何在小学师资培养课程中融入数学文化，提升职前教师的数学文化素养。此后，三位专家就数学文化与教师教育的相关话题进行了探讨。

专家们探讨了在教师教育体系中设置数学文化以及类似课程的必要性和紧迫性，并认为目前的数学教师对数学文化的了解还不够，对如何在教学中融入数学文化的知识尤其缺乏，有必要通过教师教育加强教师的数学文化素养，掌握在教学中融入数学文化的相关策略。专

家们还认为，相比较数学文化，数学史的知识脉络和内容体系要来的更为严格，更适合作为一门课程在职前教育中开设，而先关研究也证实了数学史有助于提升教师的专业发展[4]。对职后教师教育来说，专家讲座、同行之间开设工作坊探讨、视频案例等方式也是让教师加深对数学文化的理解，以及如何更好的在教学中融入数学文化的良好渠道。

3 研讨会的意义

数学文化与数学教育研究的兴起已有数十年，自身在发展过程中积累了一些亟待解决的问题；另外各国的数学教育改革相继展开，以数学素养为培养目标的数学教育对数学文化提出了新的要求，这些都需要数学文化与数学教育研究者在未来更好的面对。本次会议中，专家和学者就数学文化本身的研究、数学文化的教育价值，数学文化在教学中的应用以及数学文化对教师发展的作用等方面进行了探讨，有利于数学文化与数学教育的深化研究。本次研讨会的另外一个特色，就是与会的人员来自各个国家和地区，有不少专家有在不同国家生活多年的经历，这对地域之间数学文化与数学教育的交流提供了很好的平台。特别是台湾和大陆的数学文化专家在本次会议中进行了较为深入的交流，这对推动今后数学文化与数学教育的合作与发展具有重要的意义。