【编者按】本刊自 2014 年起陆续刊登了华东师范大学汪晓勤教授团队开发的 36 个中学 HPM 课例。其中绝大多数都是新授课(概念课或命题课)。目前,他们研究的视角开始触及复习课(习题课)。本期呈现的是以袁芳、马艳荣两位老师为主开发的 HPM 视角下的复习课(习题课)案例。希望有更多的教师加入到 HPM 的研究中来,可以开发新的课例,也可以对已有的课例进行分析、评价与改进。

HPM 视角下的“和差术应用”专题复习课*

袁　芳[1],马艳荣[2]

(1.上海市致远高级中学,201499;2.华东师范大学教师教育学院,200062)

摘　要:以数学史上的思想方法为纽带(线索),将数学课程中散落(尤其是不同领域)的知识、问题串联起来,让学生系统地分析与把握所学习的数学知识和要解决的数学问题,进一步体会其背后蕴涵的数学思想,是数学复习课的一种很好的设计思路。“和差术应用”专题复习课首先从古巴比伦泥板中的问题引入“和差术”,渗透换元法与化归思想,接着从古巴比伦的二元方程组解法中提炼出“和差术”相关的四个代数恒等式,最后应用“和差术”串联高中数学不同领域的知识和问题。课后反馈表明这样的教学取得了较好的效果。

关键词:HPM　专题复习课　和差术应用

复习课是数学教学的重要课型之一。好的复习课不仅可以帮助学生梳理知识,形成系统,更重要的是可以引导学生提取、归纳数学思想方法,让学生站在思想方法的高度来认识数学问题,培养思维能力。然而,因对复习课的价值理解与把握不到位,不少教师依然遵循传统的教学模式来上复习课:罗列基础知识,讲解典型例题,布置课后作业。这样把学过的知识重复讲一遍,把复习课上成练习课,没有新内容、新增长,导致教学质量普

遍不高。

Jankvist 认为，数学史是数学教学的指南，不仅可以帮助学生梳理知识发展脉络，加深学生的数学理解，而且可以帮助学生对比古今思想方法，拓宽学生的数学思维。以数学史上的思想方法为纽带（线索），将数学课程中散落（尤其是不同领域）的知识、问题串联起来，让学生系统地分析与把握所学习的数学知识和要解决的数学问题，进一步体会其背后蕴涵的数学思想，是数学复习课的一种很好的设计思路，可以让数学复习课有新意、更高效，焕发勃勃生机。

两千多年前古巴比伦的“和差术”正是这样一种可以串联高中数学纵多知识与问题的思想方法。因此，我们以“和差术应用”为主题，设计了一节高三专题复习课。拟定的教学目标如下：(1)理解“和差术”，掌握“和差术”在不同知识领域中的应用；(2)经历从分析和解决函数、三角函数、向量、几何等问题中抽象出“和差术”模型的过程，理解换元法和化归思想，拓宽解决问题的思维方式；(3)感受数学思想方法的魅力，感悟数学文化，激发学习兴趣。

一、历史上的“和差术”

古巴比伦的代数已经达到了相当高的水准。在已经发现的古巴比伦泥板中含有大量形如$\begin{cases}x\pm y=a,\\ f(x,y)=b\end{cases}$[其中，$f(x,y)$具有 $px+qy(p^2\neq q^2)$、xy 或 x^2+y^2 等形式]的二元方程问题及其解法。例如，泥板 VAT 8389 涉及二元一次方程组$\begin{cases}x+y=1800,\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=500,\end{cases}$古巴比伦祭司的解法（用今天的符号表示）是：设 $x=900+t$，$y=900-t$，则$\frac{2}{3}(900+t)-\frac{1}{2}(900-t)=500$，解得 $t=300$，从而得 $x=1200$，$y=600$。

这里，祭司利用基本公式$\begin{cases}x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},\\ y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\end{cases}$对方程组进行换元（若$\frac{x+y}{2}$已知，则取$\frac{x-y}{2}$为未知数；若$\frac{x-y}{2}$已知，则取$\frac{x+y}{2}$为未知数），将二元转换为一元，从而求得未知数。已知两个数的和或差，将这两个数分别表示为半和与半差的和或差，从而实现换元的方法，就是所谓的“和差术”。利用“和差术”，可以在和$\frac{x+y}{2}$、差$\frac{x-y}{2}$、平方和$\frac{x^2+y^2}{2}$和积 xy 四个代数式之间建立基本关系。

“和差术”在后世被广泛使用。例如，在 3 世纪，古希腊数学家丢番图（Diophantus，约 246～330）利用“和差术”来解二元二次方程组问题——古巴比伦泥板中亦有此类问题。

又如，到 17 世纪，法国数学家洛必达（M. de L'Hospital，1661～1704）利用“和差术”来推导椭圆的方程。如图 1 所示，设椭圆长轴$|AB|=2a$，短轴$|CD|=2b$，焦距$|F_1F_2|=2c$，P 为椭圆上的任意一点，坐标为(x,y)，因为$|PF_1|+|PF_2|=2a$，故设$|PF_1|=a+z$，$|PF_2|=a-z$，则有 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+z$，$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-z$，于是$(x+c)^2+y^2=(a+z)^2$，$(x-c)^2+y^2=(a-z)^2$。两式相减得 $z=\frac{c}{a}x$，两式相加得 $x^2+c^2+y^2=a^2+z^2$。把 z 代入，整理可得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$。令 $b^2=a^2-c^2$，得到椭圆标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。上述推导过程不仅简便，而且能得到椭圆的焦半径

公式：$|PF_1|=a+\frac{c}{a}x$，$|PF_2|=a-\frac{c}{a}x$。

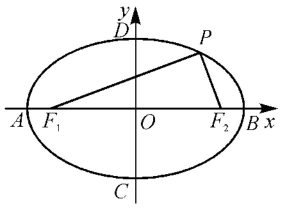

图 1

二、教学设计与实施

（一）引入方法，给出定义

课间休息时间，教师播放周杰伦《爱在西元前》的 MV，并提醒学生留意歌词：“我给你的爱写在西元前/深埋在美索不达米亚平原/几十个世纪后出土发现/泥板上的字迹依然清晰可见/……/用楔形文字刻下了永远/……/祭司神殿征战弓箭是谁的从前/……”

上课伊始，教师请学生说出 MV 中提到的地点、人物、物品，然后说道：“这首 MV 是周杰伦逛完博物馆后有感而发创作的。它的故事原型是古巴比伦王和他的妻子。古巴比伦王给他的妻子建造了一个非常宏伟的建筑——古代七大奇迹之一的空中花园。当一个国家的建筑登峰造极的时候，这个国家的数学一定也高度发展。所以今天我们来学习古巴比伦的一个重要的数学方法——和差术。”

然后，教师介绍古巴比伦泥板 VAT 8389，指出其上所载的问题相当于求解二元一次方程组$\begin{cases}x+y=1800,\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=500,\end{cases}$并请学生观察古巴比伦祭司的原始解法。

师　请问这个方法和你们初中学的方法一样吗？初中是用什么方法解的？

生　消元法。

师　那古巴比伦祭司用了什么方法呢？

生　参数方程。

师　结合题干，你能告诉我参数 t 前面的 1800 代表什么？

生　x 与 y 的和。

师　看第一个式子 $x=\frac{1800}{2}+t$，若将 1800 这一具体数字用一般的量来代替，如何转化？

生　$x=\frac{x+y}{2}+t$。

师　实际上，这里我们利用了两个等式：$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$，$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$。也就是说，我们设的参数 t 就是$\frac{x-y}{2}$。像这样，已知两数之和，令两数分别等于半和与一个参数的和与差，在数学上称为“和差术”。我们可以看到，早在古巴比伦时期，人们就已经开始运用这种方法了。

（二）找恒等式，建立模型

教师进一步展示古巴比伦泥板 BM 13901 和 YBC 4663 上的二元二次方程组及其解法：

泥板 BM 13901 涉及方程组$\begin{cases}x+y=50,\\ x^2+y^2=1300,\end{cases}$祭司的解法是：(1) $\frac{x^2+y^2}{2}=650$；(2) $\frac{x+y}{2}=25$；(3) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=625$；(4) $\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=25$；(5) $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=5$；(6) $\frac{x-y}{2}=5$；(7) $\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=30$；(8) $x=30$；(9) $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=20$；(10) $y=20$。

泥板 YBC 4663 涉及方程组$\begin{cases}x+y=6\frac{1}{2},\\ xy=7\frac{1}{2},\end{cases}$祭司的解法是：(1) $\frac{x+y}{2}=3\frac{1}{4}$；(2) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

$=10\frac{9}{16}$；（3）$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=3\frac{1}{16}$；（4）$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=1\frac{3}{4}$；（5）$\frac{x-y}{2}=1\frac{3}{4}$；（6）$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=5$；（7）$x=5$；（8）$\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=1\frac{1}{2}$；（9）$y=1\frac{1}{2}$。

然后，教师让学生分两组讨论上述解法，思考祭司所运用的关键思想。学生发现，在两个问题的解法中，祭司从等式 $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$，$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$ 出发，利用了两个关键的恒等式，即 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{2}$，$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$，将二元二次方程组转化为简单的一元二次方程，从而求得 x 和 y。

接着，教师引导学生将上面两个恒等式相加减，得到另外两个恒等式，即 $\frac{x^2+y^2}{2}+xy=2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，$\frac{x^2+y^2}{2}-xy=2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$，最终得到如图 2 所示的"和差术"模型。

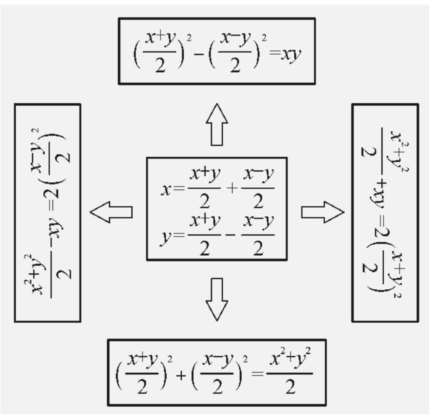

图 2

（三）模型应用，方法深化

首先，教师请学生自己编制一道用"和差术"模型求解的填空题，完成对"和差术"的简单应用。

接着，教师出示例 1 和例 2 两道含有隐含条件的"和差术"模型应用问题，要求学生先判断它们是否符合"和差术"模型，再寻找转化过程中所用到的恒等式。

例 1　已知 $a^x+a^{-x}=3$，求 $(a^x-a^{-x})^2$ 的值。

例 2　求函数 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的值域。

学生发现，例 1 已知条件为 $a^x+a^{-x}=3$，隐含条件为 $a^x\cdot a^{-x}=1$，运用完全平方公式进行转化，可以求出 $(a^x-a^{-x})^2$ 的值；例 2 并未给出"和差术"模型涉及的四个量中某个量的值，但是隐含平方和 $\sin^2x+\cos^2x=1$，因此可以利用 $\frac{x^2+y^2}{2}+xy=2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 进行转化，把积 $\sin x\cos x$ 用和 $\sin x+\cos x$ 表示（令 $\sin x+\cos x=t$，得 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$），从而把问题转化为求一元二次函数的值域。

此后，教师出示例 3 和例 4 两道向量背景的"和差术"模型推广应用问题，引导学生将"和差术"模型推广至向量，并进行应用。

例 3　已知 $|\boldsymbol{a}|=13$，$|\boldsymbol{b}|=19$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________。

例 4　已知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________。

学生由 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，得到"极化恒等式" $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，应用它们解决了例 3 和例 4。

教师又出示两道练习，引导学生发现"极化恒等式"的几何意义是平行四边形边长、对角线长以及夹角之间的关系；平行四边形模

型可以提炼为三角形模型,解决一些有关三角形中线的问题。

练习1 如图3,$\triangle ABD$中,M为BD中点,$|AM|=3$,$|BD|=4$,求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$。

练习2 如图4,正三角形ABC内接于半径为2的圆O,点P是圆O上的一个动点,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是________。

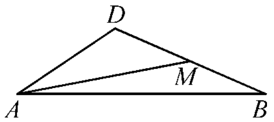

图3

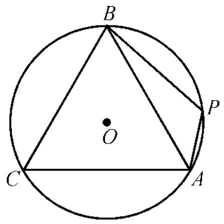

图4

最后,教师布置一道有关均值不等式与数列的思考题,让学生课后完成。

思考题 已知$a_n>0$,$b_n>0$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}(n\in\mathbf{N}^*)$,求$a_{n+1}$的范围。

(四)盘点收获,总结回顾

首先,教师总结"和差术"、四个恒等式以及"和差术"在向量上的推广,介绍"和差术"在高中数学不同知识领域的应用情况(如图5),指出"和差术"为高中数学中的通性通法,从而帮助学生把本课所学的知识与原有的知识结构进行对接,形成新的知识结构。

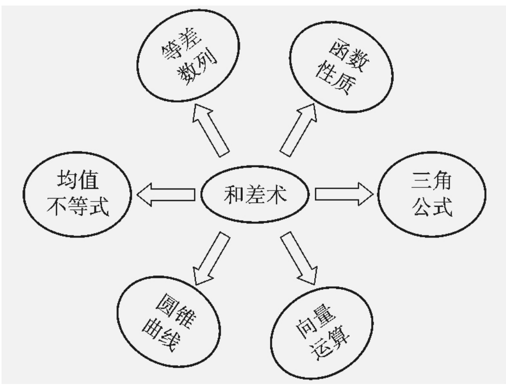

图5

接着,教师指出:"'和差术'蕴含了换元与化归的数学思想方法,将高中数学的知识点有机结合在了一起,让我们对知识的认识从方法层面上升到了思维层面。"从思想层面对本课内容进行总结。

最后,教师说道:"小泥板大学问,古代文明给我们留下了无数的智慧结晶,这些丰富的遗产为我们今天的数学教学开辟了新视角。揭开了古巴比伦'和差术'的神秘面纱,将它与高中数学知识相融合,让古人的智慧在今天的课堂上熠熠生辉!穿越时空与古人对话,古人的许多数学思想给了我们精神的养料。"从精神层面对本课过程进行总结。

三、学生反馈

课后,我们收集了全班30名学生对本节课的反馈信息。

前三道测试题主要考查学生对"和差术"模型的掌握情况。第一道题是"已知$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{11}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}$,求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$",属于"已知四个量$a+b$、$a-b$、$ab$、$a^2+b^2$中的两个量,求其余两个量"的类型,正确率达到96.7%。第二道题是"在$\triangle ABD$中,N为BD中点,$|AN|=5$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2$,求$|BD|$",属于"已知四个量$a+b$、$a-b$、$ab$、$a^2+b^2$中的一个量以及其余两个量的关系,求其余三个量"的类型(隐含条件为$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AN}|$),正确率为80%。第三道题是"求函数$f(x)=\sin x-\cos x+\sin x\cos x$的值域",属于"已知三个量$a+b$、$ab$、$a^2+b^2$中的一个量,求其余两个量的取值范围"的类型,正确率达到83.3%;少数出错的学生主要是因为代入过程中计算错误、忘记负号,或者知道设参数,但是未找到$\sin^2x+\cos^2x=1$这一隐含条件。

后两道测试题主要考查学生对"和差术"模型与高中数学知识之间关系的理解情况。对于"可以利用'和差术'模型解决的高中数

学题主要涉及哪些知识”，学生的回答集中在向量、三角函数、函数、数列、二元方程上，其中，向量提及得最多，三角函数次之。对于“你觉得‘和差术’与哪些高中数学知识有联系”，学生的回答主要分布在向量、三角函数、函数、数列、圆锥曲线、均值不等式上，其中26人认为“和差术”与向量存在联系，24人认为“和差术”与三角函数有联系，21人认为“和差术”与函数、数列、圆锥曲线联系紧密，6人认为“和差术”与均值不等式有联系。

四、教学反思

传授数学知识、演化数学方法、传承数学文化是数学教育的重要任务，而串联数学知识、数学方法与数学文化的经脉是数学思想，它是数学的精髓。本节课首先从古巴比伦泥板中的问题引入“和差术”，渗透换元法与化归思想，接着从古巴比伦的二元方程组解法中提炼出“和差术”相关的四个代数恒等式，最后应用“和差术”串联高中数学不同领域的知识和问题。

从古巴比伦泥板中的二元方程组问题到函数、三角函数、向量、几何、数列等领域的问题，均可转化为“和差术”模型进行求解，这体现了数学史的“知识之谐”。学生在掌握“和差术”的同时，也加深了对换元与化归思想方法的理解，这体现了数学史的“方法之美”。古巴比伦祭司对二元问题的精彩解答，让学生体会到数学问题背后的人文色彩，这体现了数学史的“文化之魅”。引导学生穿越时空与古人对话，了解古人简捷的解题策略，让学生心生敬意，激发了学生的学习兴趣与自信心，这体现了数学史的“德育之效”。

通过本节课的教学，教师和学生都非常认同HPM对于高三复习课的价值。在不久之后的高三三模复习过程中，学生遇到可用“和差术”来解决的问题时，都感到非常兴奋，更进一步感受到了“和差术”的便捷。略显遗憾的是，由于笔者对数学史的理解还不够深入，整节课还没有达到融会贯通的境界。

---

*本文系本刊连载的汪晓勤教授团队开发的HPM案例之一，也系华东师范大学HPM工作室开发的系列课例之一。

参考文献：

[1] 陶兴模. 数学复习课的基本策略[J]. 数学通报，2005(4).

[2] 曾木英. 重构——数学复习课的核心要义[J]. 教学与管理，2017(8).

[3] 沈新权. 高中数学复习课教学设计的探索与实践[J]. 中学数学教学参考(上旬)，2012(8).

[4] U. T. Jankvist. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009(3).

[5] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社，2017.

[6] 汪晓勤. 椭圆方程之旅[J]. 数学通报，2013(4).

[7] 蒲大勇，史可富. 如何让数学思想落地生根[J]. 数学通报，2016(3).