第 20 卷第 5 期 数学教育学报 Vol.20, No.5
2011 年 10 月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION Oct., 2011

HPM 视角下的数学教学设计：以椭圆为例

汪晓勤，王　苗，邹佳晨

（华东师范大学 数学系，上海　200241）

摘要：发生教学原理是 HPM 视角下数学教学设计的主要理论依据，要求根据重构的历史进行教学．以椭圆为例考察椭圆的历史，并对其进行重构，据此进行教学设计．教学实践表明：HPM 视角下的椭圆概念教学创造了学生的学习动机，激发了学生的学习兴趣，对于椭圆焦半径性质的旦德林球推导法，学生在理解上并没有困难；进一步的问卷调查发现：较之教材上的椭圆引入方法，大多数学生更愿意接受 HPM 视角下的引入方法．因此，有必要进一步深入开展 HPM 视角下的数学教学研究，开发更多的 HPM 教学案例，让数学史融入数学教学不再成为一句空话．

关键词：椭圆；椭圆的定义；椭圆的方程；发生教学法；旦德林球

中图分类号：G420　**文献标识码：**A　**文章编号：**1004–9894（2011）05–0020–04

数学史融入数学教学的研究是数学教学研究的重要组成部分，是 HPM 领域的重要方向之一[1]．数学史在数学教学中的运用方式通常有 3 种，一是提供直接的历史信息，二是借鉴历史进行教学，三是开发对数学及其社会文化背景的深刻觉悟[2]．其中第二种方式就是发生教学法，通常所说的 HPM（数学史与数学教育关系）视角下的数学教学采用的主要就是这种方法．下面以椭圆概念和方程的设计和实施为例，说明 HPM 视角下的数学教学设计方法，为未来更多的案例开发提供借鉴．

1　发生教学法

“历史发生原理”兴起于 19 世纪．法国哲学家孔德（A. Comte）将“个体教育必然在其次第连续的重大阶段，仿效群体的教育”看作一个“基本原理”[3]，并将其作为其实证理论的基础．英国教育家斯宾塞（H. Spenser）将其解释为“个体知识的发生必须遵循人类知识的发生过程”[4]，并指出：历史上的教育方法，有助于为今天的教育提供指南．发生原理又受到德国生物学家海克尔（E. Haeckel）所提出的生物发生基本定律——“个体发育重演种族发展”的支持．

“发生教学法”之说最早出现于第斯多惠（F. A. W. Diesterweg）的名著《德国教师教育指南》中．第斯多惠认为，之所以需要采用该方法，乃是因为这是所教学科兴起或进入人类意识的方式[5]．克莱因（F. Klein）指出：生物发生学的一项基本定律指出，个体的成长要经历种族成长的所有阶段，顺序相同，只是所经历的时间缩短；而教授数学和其他任何事情一样，至少在一般意义上要遵循这项定律．鉴于年轻人的本能，教学应慢慢将其引向更高级的事物，最终到达抽象形式．为此，教学应遵循人类从知识的原始状态到更高级形式的道路……推广这种自然的真正科学的教学的主要障碍是缺乏历史知识[6]．

这里，克莱因虽然没有提到“发生教学”之名，但他所说的借鉴生物发生定律、基于历史知识的“自然的”和“科学的”教学方法就是发生教学法．

波利亚（G. Polya）则将发生原理叙述为：在教一门科学分支（理论、概念）时，我们应该让儿童重演人类心理演进的重大步骤．当然，我们不应该让他重复过去一千零一个错误，而只是重复重大步骤[7]．什么是“重大步骤”？这需要对历史作出诠释．鉴于此，波利亚提出发生原理的更模糊的形式：只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断[7]．

托普利茨（O. Toeplitz）曾指出，发生法的本质是追溯一种思想的历史起源，以寻求激发学习动机的最佳方式，研究这种思想创始人所做工作的背景，以寻求他试图回答的关键问题．但追溯历史起源、重演历史发展当然不是指原原本本地、精确地复制历史．爱德华（H. M. Edwards）认为，发生法倾向于从一个“虚构的”视角来呈现历史——假定从问题到解答，人类的理性沿直线发展，历史上那些未成功解决的问题、引向死胡同的思想、经年累月没有结果的努力、堆积如山的解释性计算都付之阙如[8]．

弗赖登塔尔（H. Freudenthal）将人类看作一个“学习者”，其学习过程就是历史．他说：“数学史是一个图式化不断演进的系统化的学习过程，儿童无需重蹈人类的历史，但他们也不可能从前人止步的地方开始．从某种意义上说，儿童应该重蹈历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道我们今天有幸知道的东西，将会发生的历史．”[9]

从哲学家、教育家和数学家的论述可以看出，发生教学法是一种借鉴历史、呈现知识自然发生过程、介于严格历史方法和严格演绎方法之间的一种方法，它关注主题的必要性和可接受性，要求在学生具备足够的学习动机、在学生心理发展的恰当时机教授该主题．这里，知识的自然发生过程不是历史过程的还原，而是历史知识的重构．

为了运用发生教学法，教师需要做到以下方面[2，10]：（1）了解所讲授主题的历史发展过程；（2）确定历史发展过程中的关键环节，从一个环节发展到下一个环节的动因以及数学家所遇到的困难和障碍；（3）在此基础上，重构这些环节，使其适合于课堂教学；（4）设计出一系列由易至难、环环相扣的问题．

收稿日期：2011–05–05
基金项目：上海市 2008 年度教育科学研究项目——数学史与数学教育关系研究（B08014）
作者简介：汪晓勤（1966—），男，上海人，教授，博士生导师，主要从事数学史与数学教育研究．

2　椭圆概念的历史及其重构

从历史上看，古希腊人先是从圆柱或圆锥的截口上发现椭圆以及另两种圆锥曲线的．在阿波罗尼斯（Apollonius）之前，希腊人（如梅内克缪斯）利用垂直于母线的平面去截顶角分别为直角、钝角和锐角的圆锥，得直角圆锥曲线（即抛物线）、钝角圆锥曲线（双曲线）和锐角圆锥曲线（椭圆）. 圆锥曲线的基本性质是直接从圆锥上得到的．阿波罗尼斯在《圆锥曲线》中则将同一个斜圆锥被不同位置的平面所截得的曲线定义为圆锥曲线，阿波罗尼斯同样直接从斜圆锥上得到圆锥曲线的基本性质，其中椭圆的基本性质是：若从椭圆上任一点 P 向直径 AB 引垂线，垂足为 Q，则 $\dfrac{PQ^2}{AQ\cdot QB}$ 为常数（图 1）．而椭圆的焦半径之和等于常数这一性质则是阿波罗尼斯用了 7 个命题、花了九牛二虎之力才偶然得到的，且完全已经脱离了圆锥[11]．

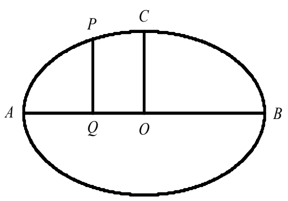

图 1　椭圆的基本性质

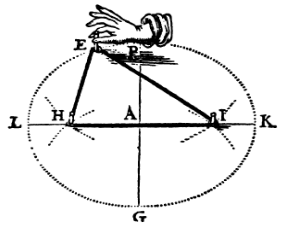

图 2　舒腾的椭圆作图工具

17 世纪，笛卡儿（R.Descartes）《几何学》对圆锥曲线方程的研究导致人们对圆锥曲线画法的探求. 法国数学家舒腾（F.van Schooten）给出了椭圆的 3 种作图工具，其中一种即利用了焦半径之和为常数的性质[12]，如图 2 所示．

法国数学家洛必达（M. de L'Hospital）在《圆锥曲线分析》（出版于作者去世后的第三年）中抛弃了古希腊人的定义方法，将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹，据此推导椭圆的方程[13]．直到 1822 年，比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin）在一篇论文中才利用圆锥的两个内切球，直接在圆锥上导出椭圆的焦半径性质[14]，从而在古希腊的截线定义和 17 世纪的轨迹定义（现称椭圆的第一定义）之间架设起一座桥梁．

根据上面的历史考察，椭圆的历史大致可以分成椭圆的发现、截线定义的形成、基本性质的推导、焦半径性质的获得、机械作图的产生、轨迹定义的确立以及椭圆方程的推导等 7 个重要环节. 教材通常只截取了最后 3 个环节（见图 3），尽管这样的处理方式相当简洁，但对照发生教学方法，它存在如下不足：(1) 没有交待为什么我们要研究椭圆，因而未能让学生产生足够的学习动机；(2) 没有将椭圆概念建立在学生已有的知识基础之上，椭圆的引入相当突兀，学生几乎未能感受到椭圆知识的形成过程．

从椭圆的发现到椭圆的截线定义，过渡起来相当自然，但从椭圆截线定义到椭圆基本性质、再到焦半径性质，诸环节之间的过渡相当艰难．为了适合于教学，需要对其进行重构．由于今天已经有了旦德林球这一重要而美妙的工具，可以利用它直接完成从椭圆的发现到椭圆焦半径性质的过渡，如图 3 所示．

尽管最后两个环节的过渡较为自然，但历史上有不同的方法，需要研究者做出选择．

3　椭圆概念的教学设计

基于重构的椭圆历史诸环节，设计椭圆概念及方程的教学.

3.1　椭圆的发现与初始定义

用图 3 表示椭圆的历史及其重构.

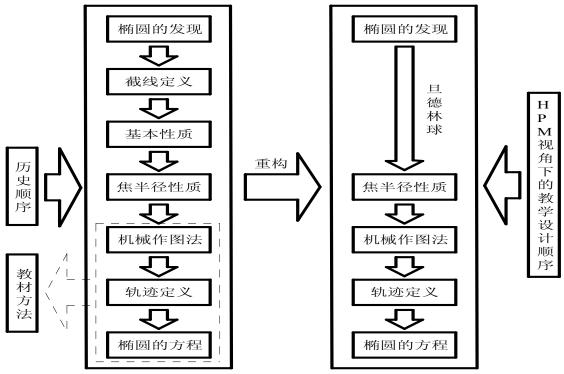

图 3　椭圆的历史及其重构

由于高中生已经有相当丰富的现实生活经验，可以设计几个现实生活中遇到的问题来引入椭圆概念．(1) 如图 4，一个球在斜射阳光下的影子的边界呈现什么形状？(2) 如图 5，圆柱形建筑斜顶的边界具有什么形状？(3) 如图 6，圆锥形建筑斜顶的边界具有什么形状？(4) 如图 7，圆柱形水杯倾斜时，杯中水面呈现什么形状？

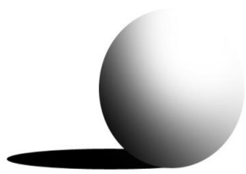

图 4　斜射光下的球

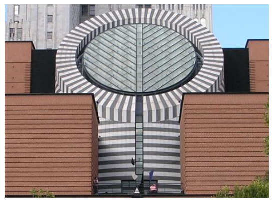

图 5　斜顶的圆柱形建筑

图 6　斜顶的圆锥形建筑

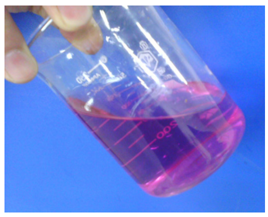

图 7　倾斜的装有水的烧杯

引导学生讨论之后，教师将上述问题归结为圆柱或圆锥被平面斜截后的截口形状问题，由此引入椭圆课题，并介绍古希腊人的截线定义．

3.2　焦半径性质的推导

首先，让学生回顾切线长定理，并提出如下问题：(1) 问题 1：过球外一点，可作出球的多少条切线？切线长有什么关系？（用乒乓球与铅笔演示）(2) 问题 2：把乒乓球放在水平桌面上，问：球和桌子有几个公共点？他们有怎样的位置关系？问题 3：把乒乓球放在透明圆柱里（球半径和圆柱底面半径相等），球与圆柱之间有怎样的位置关系？（用事先准备好的教具演示）

接下来，在针对问题 3 所展示的透明圆柱内斜放入一个椭圆形硬纸片（调整倾斜角，使其恰好与圆柱面相合），并与乒乓球相切；再放入一个乒乓球，与圆柱和纸片同时相切．如图 8．

问题 4：分别记两个乒乓球与椭圆纸片的切点为 F_1 和 F_2，在椭圆上任取一点 P，点 P 所在圆柱母线与两球分别切于点 A 和 B．$PF_1+PF_2=AB$ 与线段 AB 有怎样的大小关系？

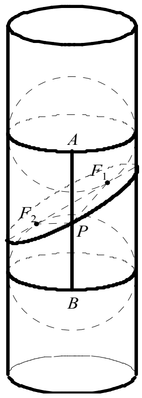

图 8　装有两个内切球的圆柱

在得出等式 $PF_1+PF_2=AB$ 之后，引入椭圆焦点概念，总结椭圆焦半径性质，并据此给出圆柱的机械画法．然后给出椭圆的轨迹定义．

3.3　椭圆的标准方程

为避免两度平方，采用洛必达的对称设法（这种方法已经为古巴比伦人所用）．设 $|PF_1|=a+z$，$|PF_2|=a-z$，则有

$$a^2+2az+z^2=(x+c)^2+y^2 \quad (1)$$

$$a^2-2az+z^2=(x-c)^2+y^2 \quad (2)$$

(1)−(2) 得

$$z=\frac{cx}{a} \quad (3)$$

(1)+(2) 得

$$a^2+z^2=x^2+y^2+c^2 \quad (4)$$

将(3)代入(4)，整理得椭圆标准方程．

课后思考：若焦点在 y 轴上，椭圆的方程是什么？

4　课堂实施与问卷调查

就 HPM 视角下的椭圆概念引入方式与基于教材的椭圆引入方式的优劣，对沪、滇两地 8 所高中共 723 名学生进行了问卷调查（问卷包含更多有关椭圆的问题），其中 141 名学生尚未学过立体几何，582 名学生已学过立体几何．调查结果如图 9．从图 9 中可见，绝大多数学过立体几何的学生和超过半数未学过立体几何的学生都更乐于接受发生法．

按照 HPM 视角下的教学设计，研究者于 2010 年 5 月在上海市某民办中学实施椭圆概念和方程的课堂教学．该校生源不佳，在本市高中排名垫底．学生没有学过立体几何，对于旦德林球能否为他们所理解，教师心存顾虑．

学生在课堂上的反应以及课后教师对他们的访谈表明，学生对本节课表现出浓厚的兴趣，绝大多数学生都能理解和掌握椭圆焦半径性质的推导过程，教师原来的顾虑时多余的．以下是对某学生的访谈片断．

师：你能理解今天课上讲的椭圆性质的推导方法吗？

生：可以，当然可以了．

师：从图上看，你不觉得线段 PA 要比线段 PF_1 长吗？

生：没有啊，那个是立体的啊．

师：那你能复述一下推导过程吗？

生：嗯，先在椭圆上任取一点，两次利用球的两条切线长相等．就是那个 $|PF_1|+|PF_2|=AB$ 为定值．

师：今天的这种上课方式和以前的上课方式相比，你觉得哪个好？

生：这样好，以后都这样上吧．

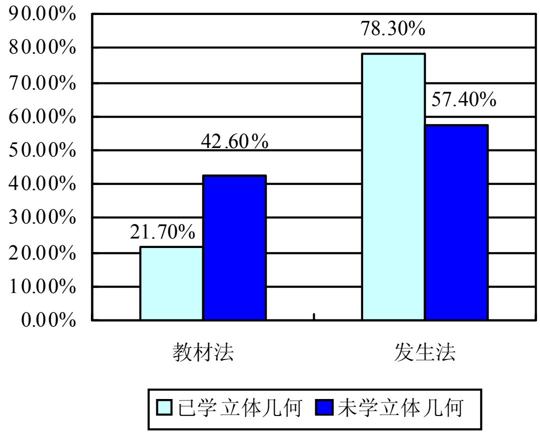

图 9　高中生对椭圆概念两种引入方式的倾向性

从椭圆的发现到椭圆的轨迹定义，教师总共用了 20 分钟，这当然要比传统教法耗时得多．但学生对于焦半径性质推导的理解表明，他们已有是一定的空间想象能力，在教具和多媒体的辅助下，旦德林并不会成为理解的障碍．

出乎教师意料的是，半数学生在理解椭圆方程推导时遇到了困难．他们认为，本来就有很多字母，洛必达的参数法又引入了一个字母，计算时难以区分；所有的同学都表示，自己不可能想到用这种设法来求推导方程．看来，两度平方法仍不失为最佳选择，或者，在引入对称设法之前尚需合理的铺垫．

5　结　论

众所周知，数学史在中学的境遇是“高评价、低应用”．造成这种情况的原因之一是人们对数学史的肤浅认识——教学中运用数学史，无非就是讲点故事．这只是对历史信息的直接运用，属于数学史运用的第一层次，而 HPM 视角下的数学教学通常指的是数学史运用的第二层次——借鉴历史、重演历史、重构历史．研究表明，由于呈现椭圆知识的自然发生过程、关注学生的认知水平和学习动机，HPM 视角下的椭圆教学产生了理想的效果，受到了学生的喜爱．因此，有必要进一步深入开展 HPM 视角下的数学教学研究，开发更多的 HPM 教学案例，让数学史融入数学教学不再成为一句空话．

[参 考 文 献]

[1]　汪晓勤，张小明．HPM 的研究内容与方法[J]．数学教育学报，2006，15（1）：16–18．

[2] Fauvel J, Van Maanen J. History in Mathematics Education [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
[3] 孔德．论实证精神 [M]．黄建华译．北京：商务印书馆，1999．
[4] Spencer H. Education: Intellectual, Moral, & Physical [M]. New York: Hurst & Company, 1862.
[5] Safuanov I S. Psychological Aspects of Genetic Approach to Teaching Mathematics [J]. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, (4): 153–160.
[6] Klein F. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint [M]. London: Macmillan & Co, 1932.
[7] Pólya G. Mathematical Discovery [M]. New York: John Wiley & Sons, 1965.
[8] Edwards H M. Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
[9] Freudenthal H. Major Problems of Mathematics Education [J]. Educational Studies in Mathematics, 1981, 12(2): 133–150.
[10] Tzanakis C. Presenting the Relation between Mathematics and Physics on the Basis of Their History [C]. In: V Katz. Using History to Teach Mathematics: An International Perspective [A]. Washington: The Mathematical Association of America, 2000.
[11] Apollonius. Conics [C]. Translated by R C Taliaferro. In: R. M. Hutchins. Great Books of the Western World (11)[A]. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1982.
[12] Van Maanen J. Seventeenth Instruments for Drawing Conic Sections [J]. Mathematical Gazette, 1992, 76(476): 222–230.
[13] L'Hospital. Traité Analytique des Sections Coniques [M]. Paris: Montalant, 1720.
[14] Taylor C. An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics [M]. Cambridge: Deighton Bell and Co, 1881.

Teaching Mathematics from the Viewpoint of HPM: the Case of the Ellipse

WANG Xiao-qin, WANG Miao, ZOU Jia-chen
(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract: The teaching design from the viewpoint of HPM is mainly based on the genetic principle, which asks for a topic to be taught according to its reconstructed history. In this paper, the history of the concept of the ellipse is examined and reconstructed. Based on the reconstructed history, the genetic approach to its teaching is designed and practiced in a senior middle school in Shanghai. Senior middle school students' opinions on this approach is investigated through a questionnaire survey. It is found that students have no difficulty in understanding the derivation of the focal-radii property of the ellipse by means of the Dandelin sphere and the teaching design based on the history of mathematics is more preferable than that based on the textbook.
Key words: ellipse; definition of the ellipse; the equation of an ellipse; genetic approach to teaching; the Dandelin sphere

[责任编校：陈隽]