基于数学史的初中数学问题提出课例分析

丁倩文　汪晓勤　(华东师范大学教师教育学院　200062)

摘　要:对 15 个已开发的初中 HPM 课例进行统计分析,发现共有 41 个基于数学史料提出的问题.提出这些问题的策略有自由设问、直接采用、改变情境、条件操作和对称互换,其中以自由设问为主;教师主要将其用于引入和探究环节.教师在数学史料的研究和搜集、问题提出策略的灵活运用上还有很大的提升空间.

关键词:数学史;初中数学;问题提出;课例分析

1　引言

数学史与数学教育之间的关系(HPM)是数学教育的重要研究领域之一,而 HPM 视角下的数学教学实践研究是 HPM 领域最主要的工作之一[1].近年来,越来越多的大、中、小学教师对 HPM 产生了浓厚的兴趣[2],相关的课例也日益增多.在这些课例中,数学史融入教学的方式可分为附加式、复制式、顺应式和重构式四种.除了附加式以外,其他三种方式都与数学问题提出息息相关.

所谓“问题提出”,是指在给定的情境下编制新的问题或在解决问题过程中对问题进行改编[3].已有研究表明,关于问题提出的一个重要研究方向是探索教师和学生能够提出什么样的问题[4].在一节数学课中,引入、探究、例题、练习诸环节都离不开数学问题,好的数学问题往往是成功的关键.另一方面,教师通过让学生参与问题提出活动,可以更好地了解学生对知识的理解情况,但这样的活动要求教师自己具备较好的问题提出能力[5],并且能够创设出适合学生提出问题的情境[6].因此,教师需要掌握相关的素材以及根据这些素材提出新问题的策略.

历史上的数学问题浩如烟海,为数学教学提供了丰富的素材.但历史问题并非都可以直接用于课堂教学,需要经过裁剪和加工;同时,很多历史材料本身并非数学问题,但往往可以成为教师提出新问题的背景或出发点.那么,在已有的初中 HPM 课例中,教师在提出数学问题时,究竟运用了哪些数学史素材?又采用了哪些策略来提出问题?本文试图通过课例分析来回答上述问题.

2　课例的选取

本文选取 2014—2017 年这四年间发表的 15 个初中 HPM 课例作为研究对象[7-21].这些课例的课题主要涉及代数和几何两个领域,对应的内容有数与式、方程与不等式、函数、图形的认识、图形与变换、图形与坐标以及图形与证明.所有课例都是由高校研究者和中学一线教师合作开发,具体流程见图 1.

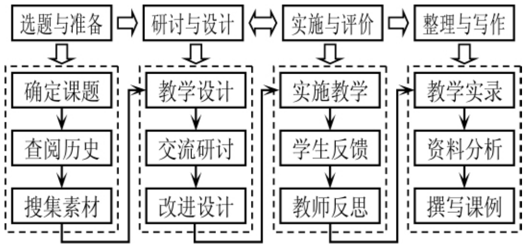

图 1　HPM 课例研究流程

课例的设计遵循趣味性、可学性、科学性、新颖性和有效性五项原则,都以体现探究之乐、知识之谐、方法之美、文化之魅、德育之效为目标.从课型上看,它们都是新授课.课例的选择标准是其中包含基于数学史料提出的数学问题.

3　基于数学史料的问题提出策略

已有的研究表明,问题提出的策略有条件操作、目标操作、对称互换和新旧链接四种[22].根据数学史料来提出新问题,当史料本身为一个数学问题时,所用策略或为直接采用,或为改变情境(不改变条件和目标),或为上述四种之一,所提出的问题分别称为再现式问题、情境式问题、条件式问题、目标式问题、对称式问题和链接式问题.当一则史料不是某个数学问题,而是一个命题、一个故事、一段史实等时,需要根据教学需要来选择问题的条件和目标,此时所用策略不符合上述策略中的任何一种,称为自由设问策略,所提出的问题称为自由式问题.当史料为一个数学问题时,也可能使用自由设问策略来产生新问题.表 1 总结了基于数学史的问题提出策略和相应的例子.

4　各课例中的数学史问题

在我们考察的 15 个课例中,共发现 41 个基于数学史料提出的数学问题(简称基于数学史的问题或 HBP),这些问题分为再现式、自由式、情境式、条件式和对称式五类,各类型的分布如图 2 所示.

表 1　基于数学史的问题提出策略分类

策略	描述	例子	问题类别
直接采用	直接采用“原汁原味”的问题或仅仅进行语言的翻译	今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺.问：折者高几何？(《九章算术》勾股章原题)	再现式
改变情境	对原问题的情境进行改编、或增加符合现代学生生活经验的情境，而保持已知条件和目标不变	大风将学校 1 丈高的木制旗杆吹折，杆头着地，着地处距离杆根 3 尺，请你计算旗杆断裂处离地面距离.	情境式
条件操作	对原问题的条件进行改编而保持目标不变	竹高 12 尺，被大风吹折，竹梢着地，着地处离竹根 4 尺.问：折断处离地面有多高？	条件式
目标操作	对原问题的目标(所求项或所证明的结论)进行改编而保持已知条件不变	竹高 1 丈，被大风吹折，竹梢着地，着地处离竹根 3 尺.问：折断处离竹梢有多长？	目标式
对称互换	互换原问题中的条件和目标	竹高 1 丈，距离地面 4.55 尺处被大风吹折，竹梢着地，求着地处到竹根的距离.	对称式
新旧链接	将原问题的目标作为新的已知条件提出新问题	竹高 1 丈，被大风吹折，竹梢着地，着地处离竹根 3 尺.求折断部分与未断部分之间夹角的正弦.	链接式
自由设问	根据教学需要自由选择问题的条件和目标，不符合上述六种策略的任何一种	大风将学校高 15 米木制旗杆从距离地面 6 米处吹裂，随时可能倒下伤及他人.学校决定从断裂处砍断旗杆，现需要划一个安全警戒区域，你能求出这个区域的面积吗？	自由式

由图 2 可知，41 个问题中绝大多数为自由式问题，其次为再现式问题，其他类型的问题很少.

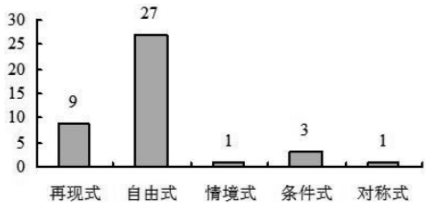

图 2　各类数学史问题的频数

4.1　再现式问题

共有 6 个课例采用了再现式问题.课例“分数指数幂”[7] 采用了欧拉《代数基础》中的问题：将 a^2 和 $\sqrt{a}$ 化成指数同为 $\frac{1}{3}$ 的幂.课例“平方差公式”[8] 直接采用了古希腊数学家丢番图(Diophantus，3 世纪)《算术》中的问题：已知两个正数的和为 20，积为 96，求这两个数.丢番图利用“和差术”和平方差公式来解决.课例“字母表示数”[9] 采用了丢番图《算术》中的另一个问题：已知两数的和与差，求这两数.该问题要求学生用字母表示已知的和与差.

课例“一次方程组的应用”[10] 直接采用了意大利数学家斐波那契(L. Fibonacci，13 世纪)《计算之书》中的问题：“若甲得乙之 7 第纳尔，则甲的钱是乙的 5 倍；若乙得甲之 5 第纳尔，则乙的钱是甲的 7 倍.问：甲、乙各有多少钱？”和程大位(1533－1606)《算法统宗》中的问题：“隔墙听得客分银，不知人数不知银；七两分之多四两，九两分之少半斤.试问各位善算者，多少人分多少银？”这些问题都是原汁原味的数学史文献中的问题.

4.2　自由式问题

有 11 个课例采用了自由式问题.在课例“同底数幂的运算”[11] 中，教师根据阿基米德《数沙者》中的大数记法，采用自由式问题来引入新课：

问题 1　从 1 数到 1 万，再从 1 万数到 1 万万，请用科学记数法来表示 1 万万.

问题 2　把第一步得到的数作为一个新数 a，从 a 开始数到 1 万万个 a，请用科学记数法来表示这个数.

问题 3　把第二步得到的数作为一个新数 b，从 b 开始数到 1 万万个 b，请用科学记数法来表示这个数.

问题 4　阿基米德得到装满整个“宇宙”(以地球为中心，地日距离为半径的球)的沙粒数目不超过 6 个 1 万万相乘再乘以 1 000，用今天的记数法如何表示？

16 世纪德国数学家斯蒂菲尔(M. Stifel，1487－1557)在《整数算术》(1544 年)中将幂指数从非负整数推广到负整数，建立了表 2 所示的指数和幂之间的对应关系.

表 2 指数和幂的对应表

指数	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
幂	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

在课例“分数指数幂”[7] 中，教师根据这则材料提出如下问题：

(1)1,2,4 三个数中，中间的 2 与左右的 1,4 之间究竟有什么关系？

(2) 如果在指数 0 和 1 之间插入平均数$\frac{1}{2}$，那么对应的幂 $2^{\frac{1}{2}}$ 会是什么数呢？

这里，教师借鉴斯蒂菲尔的“幂与指数对应法”，从正整数指数与幂之间的对应关系入手，提出问题，引导学生通过类比得到分数指数幂与方根之间的关系，从而经历分数指数幂的形成过程.

美国数学家贝曼(W.W.Beman) 和史密斯(D. E. Smith,1860－1944) 在《新平面与立体几何》中、贝兹(W. Betz) 和韦布(H. E. Webb) 在《平面几何》中分别给出湖畔两点之间距离的测量方法：如图 3，欲测量湖畔两点 A,B 之间的距离，在点 O 处立一个木桩，过点 O 固定线段 $A'B$ 和 AB'，使得 $OA'=OA$，

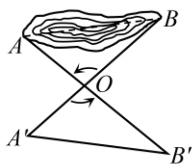

图 3

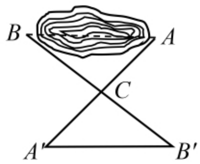

图 4

$OB'=OB$，则 $A'B'=AB$；如图 4，在点 C 处立一个木桩，过点 C 固定线段 AA' 和 BB'，使得 $CA'=CA$，$CB'=CB$，则 $A'B'=AB$. 课例“全等三角形的应用”[12] 根据上述史料，提出更开放的问题：“小明和朋友们游览风景区看到一个美丽的池塘，想知道池边两点 A,B 之间的距离，问有哪些方法？”由此为学生提供更多的探究性机会.

4.3 情境式问题

情境式问题仅仅出现在 1 个课例中. 斐波那契在《计算之书》中设题：“若干人平分 10 第纳尔，每人得若干. 若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同，求第一次分钱人数.” 这是一个分式方程问题. 课例“可化为一元一次方程的分式方程”[13] 对该问题进行改编，添加了“雇工付酬”的生活情境：斐波那契连续两天雇佣工人搬运货物(人数和酬金见表 3)，若两天人均所得酬金相等，求第一天雇佣的工人数 x.

表 3 雇佣工人搬运货物的账目

	工人人数(人)	人均所得(第纳尔 / 人)	总金额(第纳尔)
第一天雇人	x		10
第二天雇人	$x+6$		40

4.4 条件式问题

有 3 个课例采用了条件式问题. 课例“一次方程组的应用”[10] 采用了古巴比伦泥版 VAT 8389 上的问题，但对其中的数据作了适当的改编：“已知两块地共 5 亩，第一块地亩产 4 担粮食，第二块地亩产 3 担粮食. 第一块地的产量比第二块的产量多 6 担. 问：两块地的面积各为多少？”

课例“一元二次方程的配方法”[14] 中将阿拉伯数学家花拉子米《代数学》中的问题“一平方与十根等于三十九迪拉姆，求根”进行改编，将 39 改为 20，使得问题难以直接用因式分解法来解，从而凸显配方法的必要性.

课例“字母表示数”[15] 将历史上著名的鸡兔同笼问题进行改编，题目改为：有一天，鸡、兔、蜘蛛被关在同一个笼子里，一共有 45 个头，240 条腿. 第二天早上发现蜘蛛被鸡吃掉一半，又有一半的鸡和三分之一的兔逃跑了，剩下的鸡、兔、蜘蛛一共有 130 条腿. 问：鸡、兔、蜘蛛原来各有几只？显然改编后的问题将原来鸡兔同笼问题的条件和情境做了修改，此题目的在于让学生体会用字母表示未知数.

上述问题有的是直接将数学史问题的条件进行修改，有的则是同时改变问题情境和问题条件，都属于条件式问题.

4.5 对称式问题

对称式问题只出现在课例“可化为一元一次方程的分式方程”[13] 中，将斐波那契《计算之书》中的原题“若干人平分 10 第纳尔，每人得若干；若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同，求第一次分钱人数”的条件和目标进行互换，即已知第一次分钱人数为 2 人，加上 6 人后，总金额增加 30 第纳尔再进行平分，每人所得与前面相同，求第一次分的总金额.

5 若干特点

5.1 历史材料

HPM 视角下的数学教学设计必须遵循科学性原则. 因此，15 个课例中的 41 个数学问题均源自历史上的数学原始文献. 图 5 和图 6 分别给出了原始文献的地域和年代分布情况.

从图 5 可见，基于数学史的问题主要源自古希腊、

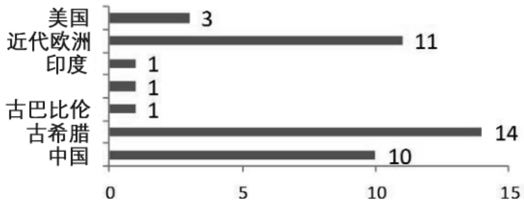

图 5　数学史料的地域分布

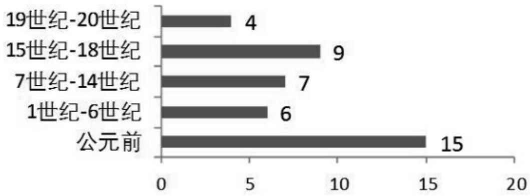

图 6　数学史料的时间分布

中国和近代欧洲的数学文献，但教师在选择史料时并不局限于某一国家或地区.数学名著是教师的第一选择，其中最典型的是欧几里得的《几何原本》、斐波那契的《计算之书》、程大位的《算法统宗》和欧拉的《代数基础》.从图 6 可见，这些原始文献分布在各个历史时期.数学史是一座宝藏，蕴含了取之不尽、用之不竭的教学资源[2].参与课例研究的教师和高校研究人员主要是出于教学设计的需要，才从这些名著中选择素材，但对于数学名著并没有全面、深入的了解；大部分相关人员所能接触到的名著也屈指可数.总的说来，15 个课例所涉及的历史材料是十分有限的.

5.2　问题提出的策略

虽然我们在 15 个课例中发现了五类基于数学史的问题，但自由式问题占有压倒性的多数，备受教师青睐.究其原因，一是相关教师所掌握的历史材料(特别是历史文献中的数学问题)十分有限.二是在所掌握的材料中，能直接用于课堂教学的很少.根据弗赖登塔尔的观点，在教学过程中教师应该充分利用学生的认知规律、已有的生活经验和教学实际，灵活处理教材，根据实际需要对原材料进行优化组合[22].三是相关教师所掌握的问题提出策略比较单一，而自由式问题相对其他类型的问题显得灵活且易于操作.

15 个课例中未出现链接式问题和目标式问题，进一步说明教师在问题提出策略上还有很大的提升空间.

5.3　基于数学史的问题在不同教学环节中的分布

图 7 显示了基于数学史的问题在不同教学环节的分布情况.从图 7 中可见，基于历史的数学问题主要用于引入和探究环节.在引入环节，基于历史的问题易于激发学生的学习动机和兴趣；在探究环节，基于历史的问题为学生提供了探究机会，让他们经历新知的发生和发展过程.

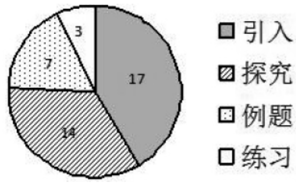

图 7　基于数学史的问题的教学环节分布

然而，教师在例题和练习环节很少运用基于历史的问题.究其原因，一是教师在教学中更多地依赖教科书和学校统一使用的学案；二是教师缺乏适合用作例题或习题的历史材料；三是他们可能认为数学史在帮助完成引入或探究任务之后，本来就该悄然谢幕，无需贯穿一节课的始终.

6　结语

本文考察的 15 个初中 HPM 课例，从某种意义上说，是初中 HPM 实践的一个缩影.从中我们看到，根据数学史材料提出数学问题乃是数学史融入数学教学的重要途径.课例中所涉及的绝大多数历史材料采自不同时空的数学原始文献，确保了科学性；问题提出的策略包括直接采用、改变情境、自由设问、条件操作和对称互换五种，目标操作和新旧链接策略付之阙如，自由设问策略一枝独秀；基于历史的问题主要用于引入和探究环节.

课例分析表明，经典数学名著为问题提出提供了丰富的素材，但教师在名著的研读和材料的搜集上有待加强，所运用的问题提出策略不够丰富.在教学设计过程中，初中教师有必要与高校研究人员一起对原始文献进行研讨，并掌握史料的选择、裁剪和加工方法，学习 HPM 视角下的问题提出策略，思考基于数学史的问题的教育价值，从而提高问题提出的能力，获取更加丰富多彩的问题，从而进一步优化 HPM 教学设计，改善 HPM 教学实践的效果.

参考文献

[1]　汪晓勤.HPM 的若干研究与展望[J].中学数学月刊，2012(2)：1-5.

[2]　汪晓勤.HPM：数学史与数学教育[M].北京：科学出版社，2017：237-316.

[3]　Silver E A. On mathematical problem posing[J]. For the Learning of Mathematics, 1994, 14(1): 19-28.

[4]　Cai J. Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning [J]. Educational Studies in Mathematics, 2013, 83(1): 57-69.