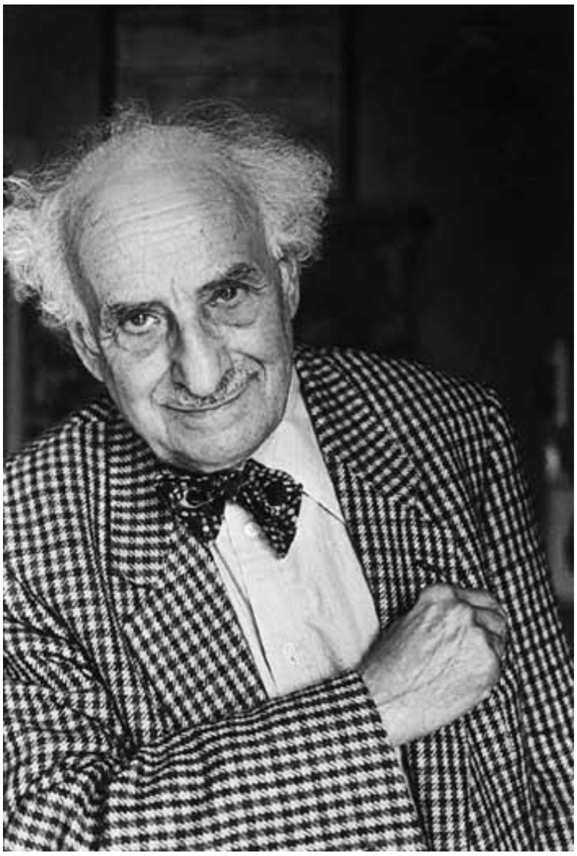
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2017 年第 6 卷第 5 期



汉斯·弗赖登塔尔

（Hans Freudenthal,1905—1990）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

学生应该去重复历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道了我们有幸知道的东西将会发生的历史。

——弗赖登塔尔

本期的封面人物是世界著名数学家、数学教育家汉斯·弗赖登塔尔（Hans Freudenthal,1905-1990）。

弗赖登塔尔于 1905 年 9 月 17 日出生于德国小镇——卢肯瓦尔德，父亲是当地犹太社区的领唱和宗教教师。弗赖登塔尔年少时，在卢肯瓦尔德接受教育，他不仅对数学和科学很感兴趣，而且也很喜欢文学，阅读了许多诗集和文学经典。1923 年，他进入柏林大学学习数学和物理。后来弗赖登塔尔时常回想起他在柏林大学的学生时光，这是他人生中一段难忘的经历，数学院的良好氛围以及学生之间、师生之间热忱的关系是他心目中的典范。1927 年，阿姆斯特丹大学著名数学家布劳威尔（Brouwer，1881 - 1966）在柏林讲学，弗赖登塔尔第一次与布劳威尔会面，这极大地影响了他事业的发展。1930 年，弗赖登塔尔受邀到阿姆斯特丹做布劳威尔的助手，并很快成为阿姆斯特丹大学数学系的讲师。1931 年，弗赖登塔尔被授予博士学位。1932 年，他与荷兰教师苏珊约翰娜结婚。

当初离开德国对于弗赖登塔尔是有利的，当 1933 年纳粹党掌权，通过法律剥夺德国犹太教徒的工作时，他可以在阿姆斯特丹继续教学做研究。1936 年和 1937 年，他相继发表了关于黎兹空间中谱定理以及同纬射影定理的重要论文。1940 年，当德国入侵荷兰时，他正在研究实半单李群拓扑学的代数特性，犹太教的背景使得他和他的家人的处境非常艰难，纳粹侵略者不允许弗赖登塔尔继续在大学任教，为了躲避纳粹党的迫害，他和家人不得不隐藏身份。1945 年 5 月，阿姆斯特丹被加拿大军队解放，此后不久，弗赖登塔尔得以恢复他在大学中的职务。1946 年他被授予乌特勒支大学纯粹数学与应用数学以及基础数学的教授职位，在乌特勒支大学任职。1951 年起，他担任荷兰皇家科学院院士，1954 年起又担任了荷兰数学教育委员会主席。1963 年-1974 年间他一直是国际数学教育委员会（ICMI）的理事，1967 年担任了该委员会主席。1971 年，他还在乌特勒支大学成立数学教育发展研究所，1991 年，该机构改名为弗赖登塔尔研究院。

1987 年 12 月，已经 82 岁高龄的弗赖登塔尔应邀到华东师范大学和北京讲学，这件事情是陈昌平先生促成的，当时经费有限，陈昌平先生说要请就请最好的。弗赖登塔尔在华东

师范大学数学系演讲时，走上讲台的第一句话就说："在荷兰，中学教室里的桌椅摆法都是围成一圈，教师在学生中间活动。如果有一个学校的教室像今天这样摆桌椅：前面一张讲台，下面是一排排桌椅，那么这所中学的校长大概要被撤职了！"广大听众在他幽默风趣的讲学中思考着中国的数学教育之道。他的演讲为我国数学教育改革提供了新的思路，他的思想对我国数学教育研究产生了积极而深远的影响。1990 年 10 月 1 日清晨，弗赖登塔尔在公园的长椅上平静地离开了人世，享年 85 岁。弗赖登塔尔一生中为国际数学教育事业做出了巨大的贡献，即便在他八十岁高龄之后，依然在不断地思考着数学教育中的问题，关心着孩子们的成长和发展，这是尤其令人钦佩的。

弗赖登塔尔早在三、四十年代，就以拓扑学和李代数方面的卓越成就而为世人所知，从五十年代起，他把主要精力放在了数学教育方面。1967 年至 1970 年担任"国际数学教育委员会"（ICMI）主席期间，他做了两件对数学教育事业的发展有着深远影响的大事。第一，召开了第一届国际数学教育大会（ICME），从此，四年一度的国际数学教育大会成为各国数学教育工作者交流研究成果的最好机会；第二，在 1968 年创办了《数学教育研究》（Educational Studies in Mathematics），现在，《数学教育研究》已成为国际上最有影响的数学教育刊物之一。弗赖登塔尔还出版了一系列数学教育著作，影响遍及全球，主要有《作为教育任务的数学》、《播种和除草》以及《数学结构的教学现象学》等。基于弗赖登塔尔为数学教育做出的突出贡献，有人把他和伟大的数学家克莱因（F.Klein,1849 -1925）相提并论，说："对于数学教育，在二十世纪上半叶是克莱因做出了不朽的贡献，在下半世纪是弗赖登塔尔做出了卓越的成就。"自 2003 年开始，国际数学教育委员会设立了数学教育研究领域的两个最高奖项——克莱因奖和弗赖登塔尔奖。弗赖登塔尔奖以弗赖登塔尔的名字命名，表彰最近 10 年间在数学教育领域内做出突出贡献的数学教育家。

弗赖登塔尔从数学学科出发，对数学教育中的许多关键性问题阐述了自己的看法，例如：强调数学教育要面向数学现实——现实世界及学生的数学现实，用再创造的方法进行教学，强调数学反思、数学化等，这里主要介绍他"再创造"的思想。弗赖登塔尔反复强调：学习数学的唯一正确方法就是实行"再创造"，也就是学生本人要自己去发现或创造出要学的东西；教师的任务是引导和帮助学生去进行这种再创造的工作，而不是把现成的知识灌输给学生，这是弗赖登塔尔关于数学教学方法的基本思想。

弗赖登塔尔在论述"再创造"的重要性时指出：数学家向来不是按照他创造数学的思维过程去叙述他的研究成果的，而是恰好相反，把思维过程颠倒过来，把结果作为出发点，去把其他的东西推导出来。弗赖登塔尔把这种叙述方法成为称为"教学法的颠倒"，指出了这

种颠倒掩盖了创造的思维过程，如果学习者不实行再创造，他就难以真正地理解学习的内容，更谈不上灵活运用了。

如何进行再创造？因为生物学上的“个体发展过程是群体发展过程的重现”这条原理在数学学习上也是成立的，所以，虽然对于个体的思想怎样发展我们几乎一无所知，但我们可以从人类的发展中知道许多东西。也就是说，历史可以给我们启发，因为历史可以告诉我们数学是怎样创造的。

但是，学生是否应该重复人类的学习过程？当然不应该。历史的发展是曲折复杂的，个人无须重复整个历史的进程，也无须回顾通过形式和内容不断地相互作用而去产生和建立知识及能力的概念等级，但是，在某种意义上，学生应该去重复历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道了我们有幸知道的东西将会发生的历史。

人类学习的历史能被个别的学生以某种方式重复一遍吗？弗赖登塔尔认为既然一个聪明的年轻人能再创造出许多他自己的数学，那些不太聪明的孩子为什么就不能在别人——成年人或他们同龄人的帮助和指导下也这么做呢？为什么人们不能抓住机会去追求、去攀登、去钻研，从而达到他们力所能及的高度和深度呢？这里弗赖登塔尔强调了教师的指导，强调通过借助外力让学生力所能及地发挥数学潜能。有指导的再创造意味着在创造的自由性和指导的约束性之间，以及在学生取得的乐趣和满足教师的要求之间达到一种微妙的平衡。

弗赖登塔尔强调的是教学过程中的“再创造”，数学史的作用在于可以为再创造的过程提供一定的启发。值得注意的是，弗赖登塔尔提到，数学史是人类系统化的学习过程，系统化不应该被看作是一个历史的进步，而应当被看作一种心理的进步。这也就是说，出于教学的目的去利用数学史时，应该将历史的顺序与心理的顺序结合起来。

弗赖登塔尔是一位学问精深而广博的学者，他穷其一生耕耘在数学及数学教育的土壤上，他的数学教育理论并非空中楼阁，而是建立在丰富的实践基础上，这种踏实做学问的态度以及坚持不懈的理想追求是值得后人学习的。

目　录

CONTENT

理论探讨

HPM 视角下的小学数学教学：理论与实践

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 数学史的教育价值

早在 19 世纪，一些数学家和数学史家就已经开始关注数学史的教育价值了。如美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）称，一门学科的历史乃是“使面包和黄油更加可口的蜂蜜”，认为数学史在课堂上可以激发学生的学习兴趣；又称，“学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难”[1]，这就是我们通常所说的“历史相似性”，历史为教学提供了一面镜子。卡约黎由此断言：数学史是数学教学的有效工具[2]。此后，数学家、数学史家和数学教育家们对数学史的教育价值进行更深入的讨论，最终导致数学史与数学教育关系国际研究小组（简称 HPM）的诞生，使得“数学史与数学教育之间的关系”成为数学教育学科中与数学教育心理学（PME）并列的学术研究领域。通常所说的 HPM，指的是“数学史与数学教育之间的关系”这一研究领域本身。

1991 年，英国学者弗福尔（J. Fauvel, 1947-2001）基于对已有文献的分析，总结出数学教学中运用数学史的 15 条理由。十年后，Gulikers 和 Blom 建立了关于数学史教育价值的三维分类框架[3]，并且在每个维度上对教师和学生分别作出讨论，见表 1。

近年来，我们通过数学史融入数学教学的大量实践，印证了数学史的许多教育价值；结合西方学者的讨论和总结，这些价值可以分成六类，即：知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效。

知识之谐，指的是借鉴、重构历史的数学教学，使得知识的发生和发展自然而然，符合学生认知基础，易于为学生所理解；方法之美，指的是通过引入历史上的数学思想方法，拓宽学生的视野，让学生在古今不同方法的比较中，体会数学思维的灵活性、丰富性和创新性；探究之乐，指的是一个主题的历史为教师设计探究活动提供借鉴，数学史上丰富多彩的问题，为学生提供了探究机会，学生在探究过程中，积累数学活动经验，像数学家那样获得成功的体验；能力之助，是指数学史有助于培养学生的数学核心素养以及阅读、写作等其他

方面的能力；文化之魅，是指数学史揭示了数学与现实世界或人类其他知识领域之间的密切

表 1　Gulikers 和 Blom 对数学史教育价值的分类

类别	教　师	学　生
概念视角	（1）个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展过程（历史发生原理），因而数学历史是数学教学的指南； （2）学生的错误和认知障碍与数学史上的错误和认知障碍是有关联的，了解历史上的重要时刻可以为教师提供预测学生认知障碍的工具； （3）丰富教师的知识储备和教学资源； （4）有助于更好地理解数学的本质。	（1）帮助学生理解数学； （2）使学生获得心理安慰； （3）通过古今数学方法的对比，拓宽学生的思维； （4）帮助学生以非线性方式（即非演绎方式）学习； （5）提供另类方法，促进学生思考。
文化视角	（1）发展多元文化进路； （2）加强数学与其他学科之间的联系。	（1）有助于解释数学在社会中的角色以及数学发展的内外因； （2）展现数学是人类的文化活动； （3）消除数学学习上的性别差异，鼓励女生学习数学。
动机视角	（1）创造活跃的课堂氛围； （2）获取有用的史料，激发教师对所教主题的热情。	（1）增加学生的学习兴趣； （2）创造学生的学习动机； （3）使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心； （4）培养优秀生的远见卓识。

联系，呈现了数学之美，展示了数学文化的多元性；德育之效，是指数学史恢复了数学背后的人文精神，有助于培养学生积极的情感态度和价值观，让他们拥有历史感，并树立良好的品行和操守。

鉴于数学史丰富的教育价值，越来越多的数学教育工作者对 HPM 产生浓厚的兴趣。HPM 领域的研究课题很多，图 1 给出小学 HPM 研究的六个重要课题。这些课题中，一线

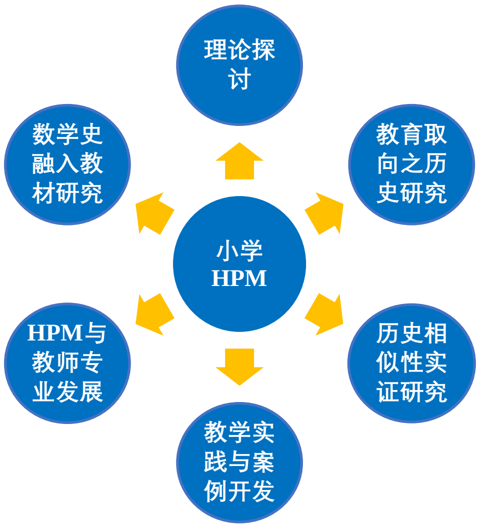


图 1 小学 HPM 的若干研究主题

教师最更感兴趣的是数学史融入数学教学的实践与案例开发。融入数学史的数学教学，通常称为“HPM 视角下的数学教学”。

2 小学数学的历史材料及其运用方式

对于小学一线教师来说，HPM 视角下的数学教学是一件知易行难的事情。首先，大多数教师并未接受过数学史的教育，对所讲授主题的历史不甚了了，手头也缺乏可用的数学史材料，可谓“巧妇难为无米之炊”。其次，大多数教师缺乏 HPM 知识，很多教师对于“数学史融入数学教学”的认识甚至只停留在讲故事的层次；即使有了数学史材料，他们也往往不知道如何对其进行裁剪、加工，并将裁剪、加工后的材料用于教学设计。

小学数学的历史材料大致可以分成“人物与事件”、“概念与思想”、“运算与法则”、“问题与求解”、“公式与命题”、“工具与符号”六类，表 2 给出了与有关知识点对应的例子。

表 2 小学数学的历史材料

类 别	例 子	知识点
人物与事件	刘徽与小数的发明；泰勒斯与三角形内角和的发现；祖冲之与圆周率的计算；开普勒与圆面积公式的推导；韦达与字母表示数；阿基米德与大数的表示	小数；三角形内角和；圆周率；圆面积；字母表示数；大数的认识
概念与思想	分数和小数的起源；角概念的历史；《墨经》和《几何原本》中的圆的定义；负	分数；小数；角；圆；负数；用字母表示数；位置的表示

	数的历史；用字母表示数的历史；位置表示方法的历史	法
运算与法则	16 世纪的手指算；15 世纪意大利的格子算；古代印度数学家在“除以零”问题上的错误；古代中国、印度和近代欧洲的分数除法	一位数的乘法；二位数或多位数的乘法；正整数的除法；分数的除法
问题与求解	历史上的一元一次方程问题；《九章算术》中的移项法；《九章算术》和《算法统宗》中的盈不足问题；斐波那契《计算之书》中的行程问题	一元一次方程的概念、解法与应用
公式与命题	三角形和梯形面积公式与出入相补原理；三角形内角和的历史；圆面积公式的历史	三角形与梯形的面积；三角形内角和；圆的面积
符号与工具	加、减、乘、除、等于、大于、小于、角等数学符号的历史；量角器的发明	正整数的四则运算；角的概念；角的度量

数学史是HPM实践的基础，而一些主题的历史并非直接可以从一般数学史著作中查到，需要进行深入的教育取向的历史研究。因此，我们既需要阅读二手的研究文献（如卡约黎的《初等数学史》、史密斯的《数学史》、希思的《希腊数学史》、刘钝的《大哉言数》、卡茨的《数学史通论》等等），也需要查阅数学史的原始文献（如中国古代的算经十书、欧几里得的《几何原本》、斐波那契的《计算之书》、程大位的《算法统宗》、欧拉的《代数基础》等等）。

在历史研究之后，需要选择适合于教学的材料进行教学设计。为此，我们根据有关数学教学原则，如波利亚（G. Pólya, 1887-1985）的“主动学习、最佳动机、阶段序进”原理以及 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）的“兴趣、动机、直观、文化”原理等，结合数学史的教育价值，建立了史料选取和教学设计的五项原则——趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性。历史材料必须让学生觉得有趣，最好含有数学故事，而非枯燥无味；必须符合史实，而非随意编造；必须符合学生的生活经验和认知基础，而非艰涩难懂；必须切合教学目标，而非为历史而历史；必须令人耳目一新，而非老调重弹、稀松平常。

根据数学史融入数学教学的实践，结合西方学者的有关讨论，我们总结出数学史在数学

教学中的四种运用方式——附加式、复制式、顺应式和重构式。表 3 给出各方式的描述与相应的例子。

表 3 数学史在小学数学教学中的运用方式

类 别	描 述	例 子
附加式	展示有关的数学家图片，讲述有关数学故事等，去掉后对教学内容没有什么影响。	在讲授位置的表示方法时，讲述笛卡儿表示苍蝇位置的故事；在讲授“大数的认识”时，讲述阿基米德数沙的故事；在推导圆面积公式时讲述开普勒的故事。
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等。	在讲行程问题时，直接采用《九章算术》中的凫雁相逢问题、《计算之书》的两船相遇问题；在讲两位数乘法时，直接引入格子算。
顺应式	根据历史材料，编制数学问题；或对历史上的思想方法进行适当的改编。	根据《几何原本》第 1 卷命题 37：“同底且位于相同的两条平行线之间的三角形面积相等”提出问题：在两条平行线之间有两个同底的三角形，从中可以得到哪两个三角形的面积相等？（人教版小学数学（五上）“多边形面积”之习题）
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史。	按照“质—量—关系”的顺序再现角概念的历史；按照“品圆—画圆—识圆—用圆”的顺序重构圆的历史。

四种方式的水平依次增加，但在实际教学中，运用哪一种方式，需要视具体教学内容和教学目标而定。一般地说，重构式多用于数学概念的教学，复制式和顺应式多用于运算、命题和问题解决的教学中，而附加式则可用于任何一类主题的教学。

历史重构式教学法，就是我们通常所说的“发生教学法”。尽管重构式并没有固定的设计模式，但这种方法实际上是对所讲授主题的历史、逻辑和心理顺序的融合，它遵循两种基本思想：教学必须建立在学生的认知基础之上，符合学生的认知规律；同时需要凸显主题的必要性，激发学生的学习动机。

3 小学 HPM 教学实践与案例开发

根据上文的分析，要让一名没有受过数学史和 HPM 专业训练的小学数学教师独立设计和实施 HPM 教学，是不现实的。为了开发出较为成功的 HPM 课例，我们采用了团队合作的模式。团队有高校研究者和小学一线教师组成，前者可以发挥数学史文献、HPM 理论、教育研究方法等方面的优势，而一线教师则对教材和学生更为熟悉。团队协作可以实现优势互补，从而提高工作效率，提升课例研究水平。图 1 给出了案例开发的基本流程。

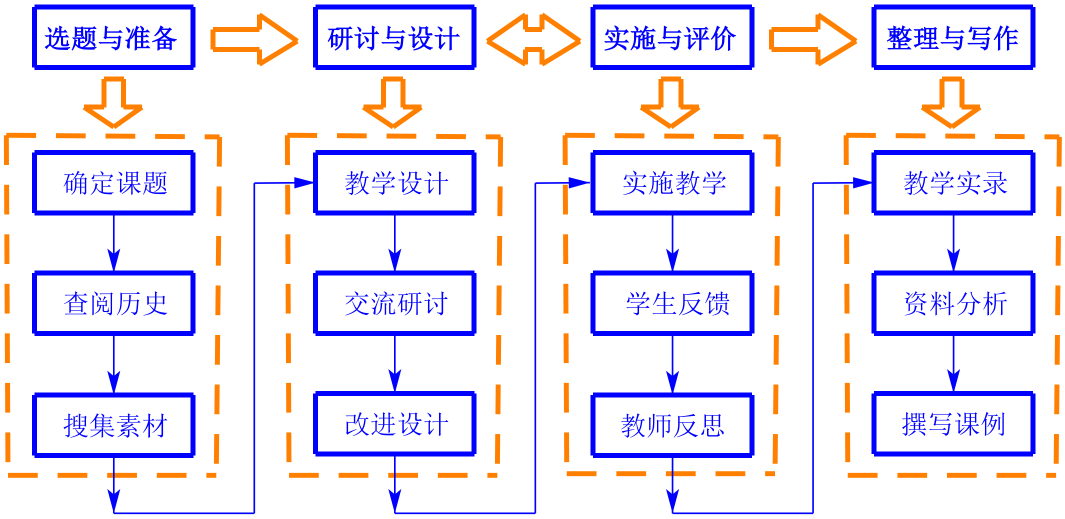


图 2 小学 HPM 教学案例开发的流程

（1）选题与准备

HPM 教学的选题取决于研究团队对相关主题历史的了解程度和对史料的掌握情况。若某个主题的历史脉络清晰，史料丰富，则适合于 HPM 视角的教学。例如，人们对于正整数乘法的历史已经有较为清晰的了解。15 世纪末，意大利数学家帕西沃利（L. Pacioli, 1445-1517）在其《算术、几何、比与比例大全》中汇总了八种乘法，其中包括格子算和我们今天的竖式乘法[4]。因此，正整数的乘法是合适的选题。

确定课题之后，高校研究者基于原始文献和二手研究文献，对有关主题的历史进行深入研究，从中选取合适的材料，并将其提供给一线教师。

（2）研讨与设计

一线教师研读有关材料，并将其用于教学设计。在研究团队定期举行的讨论班上，一线教师汇报自己的教学设计，团队成员根据教学目标和 HPM 的理念，对教学设计提出意见或建议。据此，教师对教学设计进行修正。一个较为完善的教学设计往往是经过多次研讨和修正才形成的。

团队研讨是 HPM 教学案例开发过程中不可或缺的环节。

（3）实施与反馈

教学设计形成之后，教师通常要试讲，试讲也是在正常的数学课上完成的。如果试讲的效果不理想，教师还会进行第二次甚至第三次试讲。然后是正式开课，团队成员（有时还有当地教研员、教师所在的教研组）前往观摩。教学之后，让学生完成一份问卷，并在适当的时候（通常是中饭之后的休息时间）选择部分学生进行访谈，了解教学目标的达成情况以及学生对 HPM 教学的看法。针对教学设计与实施情况，团队进行深入的交流和研讨。教师本人当天完成一份教学反思。

（4）整理与写作

在接下来的时间里，教师需要完成课堂实录，并在团队其他成员的指导下，撰写教学案例。

所谓 HPM 教学案例，是指在课堂上发生的、将数学史融入数学教学的富有意义的典型事件，HPM 教学案例的撰写，就是对该事件的叙事性的追忆和描述。HPM 教学案例通常由引言、历史材料及其运用、教学设计与实施、学生反馈和结语（或反思）五部分组成。实践证明，HPM 案例的撰写对于教师专业发展具有显著的促进作用，而 HPM 教学案例的发表则对 HPM 理念的传播起着重要的推动作用。

4 小学 HPM 教学案例的评价

随着 HPM 实践研究的深入，逐渐形成了 HPM 视角下的数学教学理论，该理论可用“一、二、三、四、五、六”来概括，如图 3 所示。

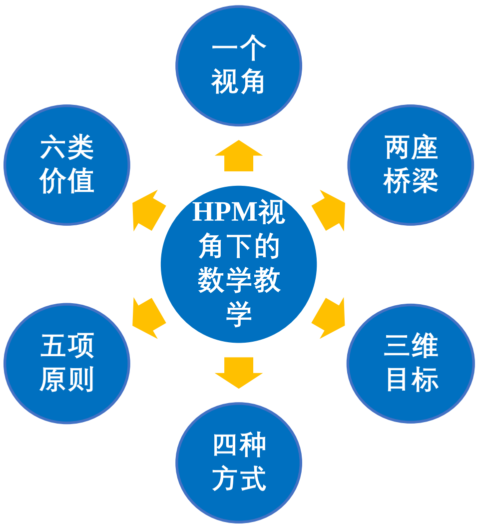


图 3 HPM 视角下的数学教学理论框架

一个视角，是指 HPM 的视角，即借鉴数学知识的发生发展、再现历史上的数学思想方

法、利用丰富的数学历史资源的教学视角。

两座桥梁，是指 HPM 视角下的数学教学在历史与现实、数学与人文之间各架起一座桥梁。历史与现实的沟通，就是知识的历史顺序、逻辑顺序与学生的心理发生顺序的融合。比利时-美国科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）说过，在科学和人文之间只有一座桥梁，那就是科学史。同样，我们也可以说，在数学与人文之间也有一座桥梁，那就是数学史。数学与人文的沟通，是数学背后人性的彰显，是数学学科德育的体现。两座桥梁是 HPM 视角下数学教学的重要特色。

三维目标是针对教师专业发展而言，包括知识、信念和能力，其中教师的知识可以用“教学取向的数学知识”(MKT)来刻画，而 MKT 包括一般内容知识(CCK)、水平内容知识(HCK)、专门内容知识（SCK）、内容与学生知识（KCS）、内容与教授知识（KCS）、内容与课程知识（KCC）六个成分。数学教师的信念包括对数学的信念和对数学教学的信念，而能力包括教学设计能力、教学研究能力等。实践证明，HPM 可以丰富和完善教师的 MKT，而在其他目标上的有效性尚有待于实践的检验。

关于四种方式、五项原则和六类价值，上文已有介绍，不再赘述。

根据上述理论框架，我们可以对一个小学 HPM 课例作出评价。首先，根据教学中的历史材料及其运用方式，可以判断它是否采用了 HPM 的视角。若教师在课上仅仅附加式地讲了一个数学故事，而其他教学内容与数学史无关，则这节课不属于 HPM 视角的课。只有使用了两种以上的方式来运用数学史，才称得上 HPM 的视角。

其次，鉴于学生的认知基础和教学目标的达成情况，根据两座桥梁、四种方式和五项原则，可以判断一个课例中数学史料是否适切，运用方式是否多元，融入是否自然。

再次，根据六类价值，我们可以判断一个课例中，数学史的哪些价值得到了体现，而哪些价值没有实现。

最后，我们可以通过课堂观察、访谈等方法，考察教师在有关主题上的 MKT 的变化，印证 HPM 对教师专业发展的有效性。

5 结语

教学实践表明，HPM 营造了不一样的课堂，改变了学生，也改变了教师。我们相信，在小学数学教育中，HPM 将是一个前景广阔、富有魅力的学术领域，而 HPM 视角下的小学数学教学实践与案例开发必将成为是未来该领域最重要的研究方向。目前，虽然江苏启东

蔡宏圣老师的团队以及华东师大 HPM 研究团队各自已开发了一些教学案例，但由于上文所述的原因，对于数学史“高评价、低应用”的现象依然普遍存在，真正意义上的小学 HPM 案例并不多见，对国内小学数学教育研究文献的统计分析也印证了这一点。

一枝独秀不是春，百花齐放春满园。我们希望，在不久的将来，有千千万万的小学数学教师加入 HPM 学习共同体，研究 HPM，实践 HPM，传播 HPM，创造小学数学教育美好的明天。

参考文献

[1] Cajori, F. The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 1899, 7(5): 278-285

[2] Cajori, F. *A History of Elementary Mathematics*. New York: The Macmillan Company, 1896.

[3] Gulikers, I., Blom, K. ‘A historical angle’: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, **47**: 223-258

[4] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol. 2). Boston: Ginn & Company, 1925. 107-117

教学实践

HPM 视角下的“三角形中位线定理”的教学

张莉萍[1] 栗小妮[2]

（1. 上海市江宁学校 上海，200331；2. 华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

《三角形中位线》是沪教版初中数学八年级下册二十二章《四边形》中第三节第三课时内容，是在学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形知识之后的又一几何教学中的重要内容，是深入应用特殊四边形知识后得出的又一性质定理。在三角形中位线定理证明探究过程中，教科书上是引导学生将一个三角形通过割补，补成一个平行四边形的操作，再通过构建旋转全等形将三角形问题转化成平行四边形问题进行证明。但其设计较为刻意，采用了取特殊情况进行证明的方法，较为狭隘，而本节课的设计是要将这一方法进行一般化，融入刘徽的出入相补原理，让学生体会从特殊到一般，再理解一般和特殊的关系来探究三角形中位线与第三边的关系，从而体验从特殊到一般的研究问题的方法以及渗透转化思想的应用。因此本课设想在 HPM 视角下，从解决实际生活中的问题出发，让学生在设计解决方案中，自然学习到中位线的概念和定理，并让学生在探究定理证明方法的过程中，掌握重要的数学研究方法和思想方法，对学生的后续学习有指导和启示作用。因此教学目标设计如下：

1．理解三角形的中位线概念，在经历三角形中位线概念形成和性质发现的过程中，激发学生学数学用数学的热情，在定理的探索与证明中，让学生体会操作、观察、归纳、推理、假设，应用的数学研究过程，培养学生演绎推理能力以及严谨求实的科学态度。

2．在经历探索三角形中位线定理的过程中，运用图形运动的观点来认识添置辅助线的过程和作用，同时体会从特殊到一般的数学思想。

3．通过对三角形中位线定理证明方法历史的介绍，感知数学定理的历史文化内涵，通过运用数学知识解决实际问题的这一活动，感知数学来源于生活又作用于生活的本质。

2 历史材料及其运用

古巴比伦时期（公元前 1800-1600 年）的数学泥版上记载着六兄弟分割三角形土地的问

题，三角形的面积和高已知，三角形是用平行于底边、且间距相等的直线来分割。由此可见，古人已知分割三角形的平行线段的长度与三角形第三边长度之间的关系，三角形中位线等于底边的一半，不过是其中的一种特殊情况。本节课“顺应式”利用这一史料，将其改编为“四兄弟分割三角形土地”问题，将三角形分割为面积相等的四块，来引入中位线。[1] [2]

在《九章算术》注释中，刘徽通过割补的方法来推导三角形面积公式：取三角形两腰的中点，过中点作底边的垂线，将垂线外侧的小三角形补到上方的相应位置（图 1），得到一个矩形，该矩形的面积等于原来的三角形的面积，它的长等于原三角形的高，它的宽等于原三角形底边的一半，即三角形面积等于半底乘以高。刘徽的第二种方法是：连接两腰中点（中位线），过顶点作中位线的垂线，将中位线上方的小三角形分割成两个小直角三角形，分别将它们补到相应位置（图 1），得到一个矩形，矩形的长为原三角形的底边长，宽为原三角形高的一半，故三角形的面积等于底乘以半高。从刘徽的三角形面积推导过程也可得到三角形中位线定理。可知，中国古代数学家已经知道三角形中位线与底边的位置关系和大小关系。[3]

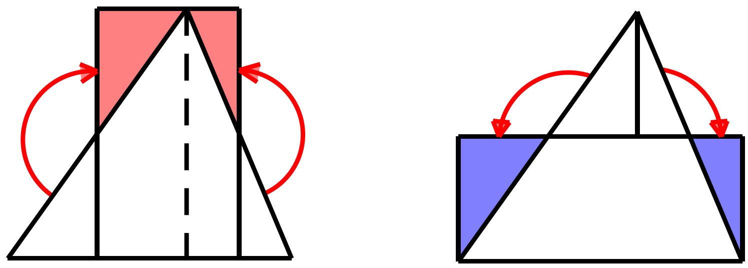


图 1　刘徽推导三角形面积公式的方法

本节课的重点是中位线定理的证明，教科书中倍长中线的做法与刘徽的割补法本质上都是利用三角形的旋转，故本节课在教科书中的证法与刘徽的证法基础上进行了更一般的推广。

欧几里得在《几何原本》中将线段之间的关系转化为三角形面积之间的关系，证明了“将三角形两腰分割成成比例的线段，则分点连线段平行于三角形的底边。”三角形中位线是其特殊情形。[4]

除了上述方法外，近代西方早期教科书中还出现了“反证法”、“同一法”来证明了此定理。 因此中位线定理的证明方法有着悠久的历史， 不同时期，证明的方法也各不相同，科学家们在证明中位线定理的方法上百花齐放，既有传承又有创新，因此内容极具历史价值和教育价值。本节课利用微视频的形式向学生介绍中位线定理的历史，让学生感知古人的研究精神，从而继承科学家们的坚韧和勇于开拓的精神，渗透了数学学科的育人作用。

3 教学设计与实施

3.1 创设历史情境，自然引出中位线概念

为了使中位线的知识引入较为自然，根据数学史的资料，在课前为学生创设了土地分割问题的情境，学生在设计方案过程中部分学生无意识的运用到了三角形中位线，由此教师自然引出三角形中位线的概念。

在一块由考古学家发现的一块古巴比伦泥版上记载着这样一个有趣的故事：在巴比伦两河流域，有四位兄弟本来相安无事的生活着，直到一天他们父亲的去世打破了这一平静，大家为了分割父亲留下的一块土地而争论不休，谁都不肯吃亏。土地为三角形形状，请同学们利用所学的数学知识设计方法帮助这四位兄弟解决矛盾，回归平静的生活，同时也要对自己设计的方法有所说明，来说服四兄弟停止争论。

师：每位同学在课前都设计了三角形土地的分割方案。请问你的方案中的分割线段怎样形成？面积相等的理由是什么？

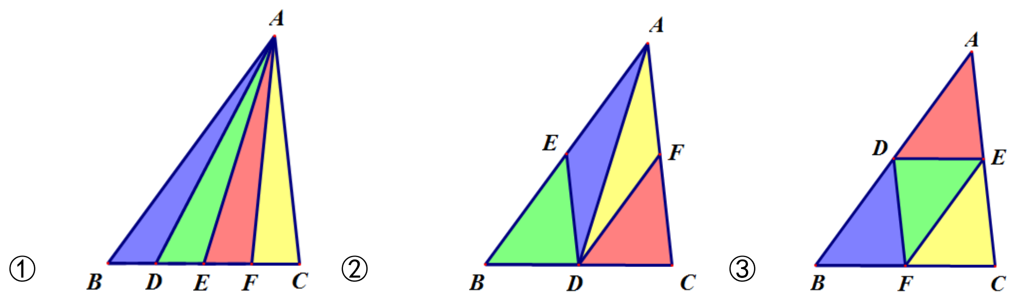


图 2　学生设计的分割方法

生 1：我是先取 BC 的中点 F，再取 BF、CF 的中点，然后和 A 相连进行分割，利用等底同高三角形面积相等。

生 2：取 BC 中点为 D，联结 AD，再分别取 AB、AC 中点为 E、F，分别联结 DE 和 DF，也是同底等高三角形面积相等。

师：请同学们观察和比较这两位同学分割方案的相通之处。

生：他们都利用了中线进行分割。

师：三角形的中线是三角形中较为重要的线段之一，其本身就具有将三角形面积均分的性质，大部分同学是合理的利用了这一数学知识来解决了土地分割这个实际问题，学以致用，本身也是学习数学的目的之一。

通过观察两位同学设计方案的相通之处，让学生感知利用三角形中线均分三角形面积这一性质解决实际问题，感知数学来源于生活，同时也帮助学生回忆三角形中较为重要的线段——中线，为后续引出中位线做铺垫。

生 3：我是取三边中点，然后顺次联结起来。我觉得分割出的 4 个三角形是全等三角形，但是没有找全证明全等的条件。

师：如果不能用逻辑推理来证明全等，还可以用什么方法来说明这四个三角形全等呢？

生 4：可以用尺量一下四个三角形的三边的长度。

师：那测量来判断全等的依据是什么？

生 4：全等的判定方法 S.S.S。

生 5：可以将四个三角形剪下来，如果能完全重合，说明这四个三角形全等。

师：判断依据是什么？

生 5：全等形的概念。

师：请回忆什么叫全等形？

生 5：通过操作能够完全重合的图形称为全等形。

师：实际操作和测量也是研究数学问题的一种方法，而且同学所说的测量和重合都是有理论依据的，是可行的，但操作和测量毕竟会产生一定的误差，所以还是要通过严密的逻辑论证来就行证明。

师：让我们再来观察第三位同学设计方案中，*DE* 这条线段，实质是联结三角形两边中点的线段，我们把这样的线段称为：三角形的中位线，其也是另一条三角形较为重要的线段，也是我们今天所学的主要内容。

因为要解决证明四个三角形全等问题，现有的知识不够，再由学生设计方案中出现的线段引出中位线概念，很自然，符合学生认知需求。通过追问“*DF*，*EF* 这两条线段是不是三角形的中位线”，巩固中位线概念，也让学生明白第三位同学实质上是取中点，构建了三角形三条中位线来进行分割土地。

3.2　从特殊到一般，自主探究中位线定理

先猜想再演绎推理是研究数学问题的一种方法，由老师带动学生进行此方法的应用，让学生体验此方法应用于数学问题研究过程。

师：假设四个图形是全等形，那么中位线 *DE* 和第三边 *BC* 之间有怎样的位置和数量关系？

生：$DE \parallel BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$。

师：反过来，如果我们能证明出中位线与第三边的关系，或许它就能帮助我们来证明这四个三角形全等。请同学们进行尝试证明！

课堂活动中大部分学生利用倍长中线，构建全等形证明。教师引导学生归纳，解题的实质是将三角形的问题转化成平行四边形的问题，利用了转化的数学思想。但有一位同学采用了刘徽的出入相补的方法进行证明。

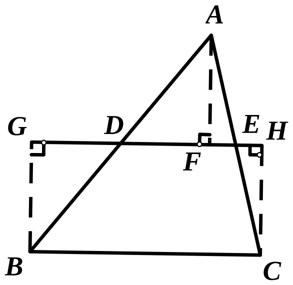


图 3　生 1 的解题方法

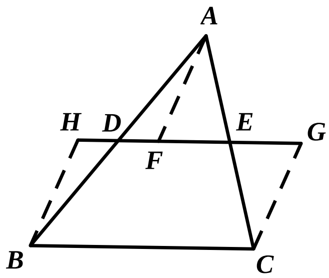


图 4　生 2 的解题方法

生 1：之前在学梯形的时候，有学到过梯形可以补成平行四边形或矩形，刚才同学的方法是补全成平行四边形，我是利用三角形的高，将$\triangle ADE$进行分割，分别转到下方，补成一个矩形，也能够证明中位线和第三边的关系。

师：请同学们观察下，与之前证明方法的异同。

生：都是利用了倍长中线。一个利用了一次，一个利用了 2 次；都是将三角形问题转化成四边形问题，一个是转化成平行四边形，一个是转化成矩形。

此问题的作用是让学生通过比较两种方法的异同，感知两种方法的相通之处，深刻理解三角形问题转化成平行四边形问题的转化思想的运用，同时为接下来引导出一般证明方法做铺垫。

师：生 1 是利用了三角形特殊的线段高，将图形分割，分别旋转到下方，拼成更为特殊的平行四边形—矩形解决问题的，同学们还有什么方法可以将$\triangle ADE$分割，转到下方也能使结论得证呢？请再尝试并进行小组交流。

因为在分割土地中多次提到和进行过总结，所以学生第一反应是利用中线分割，课堂中多次提到三角形中比较重要的线段，因此角平分线也可以用来分割，有 8 位同学进行了尝试。小组交流过程中，有一位同学取了一个一般的点。

生 2：他们都取得是 DE 上的特殊点，所以我随便取了个点试试，结论还是可以得证的。

师：同学们通过作高、作角平分线、作中线，将△ADE 进行分割，实质都是取了 DE 上的特殊点，这位同学在 DE 上任意取一点，同样构建旋转全等，将三角形问题转化为平行四边形问题，这就告诉我们，DE 上的任意一点，都能够使结论成立，他的这种方法是将前面取特殊点的方法一般化，这是从特殊到一般的研究方法。

然后，通过教师几何画板演示，学生再次感知下特殊和一般的联系。倍长中线是这一般方法中的特殊情况，无论取 DE 边上的哪一点，都是利用了旋转全等图形，将三角形问题转化平行四边形问题，从而三角形中位线定理得证。

最后，观看《三角形中位线定理证明方法的历史》微视频。视频中介绍了古巴比伦时期泥板上的分土地问题、利用《几何原本》中面积转化的方法证明三角形中位线定理的方法、刘徽推导三角形面积公式的方法以及简单介绍了近代西方几何教科书中中位线定理的证明方法。通过观看历史上中位线定理的证明方法，让学生感受知识的产生是来源于生活的需要，历史上的数学家们并没有因为有人证明出了中位线定理而停止研究，而是探究出了很多不同的方法进行证明，探究不同的方法之间的区别和联系进一步深化了我们的思维，而视频中展示的丰富多彩的证明方法给学生留下了深刻的印象。

3.3 回归问题解决，灵活运用中位线性质

本节课中中位线定理的产生是由于之前学生在分割土地的时候无法证明分割出的四个小三角形全等时介绍给学生的一个新知识，学习新知的目的是为了更好的解决此证明，因此学过中位线定理后再回归解决问题，使整节课的学习首尾呼应。同时也让学生体会到，.数学知识的发展起源于人们在现实生活中的实际需求，探究得到新的知识可以更简洁的用来解决之前无法解决的问题。

师：学了中位线定理，同学们能解决之前在土地分割问题中的证明四个三角形全等的问题了吗？

在学生简单阐述解决方法后，教师追问“您喜欢哪种方案？为什么？”

生 1：我喜欢方案 1，因为他说理比较容易，四兄弟比较容易听懂和接受。

生 2：我也喜欢方案 1，因为图形很美观。

生 3：我喜欢方案 3，因为相对于方案 1，方案 1 的土地利用率不高，如果要耕种的话，走一个来回需要很长时间，而且三角形最上端比较窄，无法很好的利用。

生 4：我也喜欢方案 3，因为四个图形一模一样，直观上四兄弟比较容易接受这个设计方案。

生 5：我不喜欢方案 3，因为如果我是四兄弟之一的话，又假使分给我的是中间那块，另外三块就 把我包围在里面，万一他们进攻我，我很危险，四面受敌。

生 6：我也选方案 3，因为按照光照来说，四块土地每天能接受到的光照比较均匀，大家种植的庄稼都会长的差不多好。

4 学生反馈

中位线定理证明的探究环节是本课的一次创新之举，全班共 24 人，在教师引导之前，有 21 人采用倍长中线的方法，1 人采用刘徽“作高”的方法，2 人无思路。在展示“作高”方法后，有 15 人尝试采用“中线”进行分割，8 人采用“角平分线”进行分割，1 人采用“任意”点进行分割。这说明了老师引导非常有效，学生能够从高，联想到运用三角形中的其它特殊线段进行分割。在探究活动中，同学们热情高涨，乐在其中，被新的方法所吸引，被层层深入的探究所折服，同时思维也在不断的升华。

课后让学生对“喜欢的中位线定理证明方法”做了一个排列，很多同时还是把 F 点在 D 点的特殊情况排位第一，因为只要证明一次全等，相对较为简便，也有同学对微视频中介绍的反证法和同一法很感兴趣。对于“中位线定理证明中所用到的数学思想方法是什么？”这一问题，所有学生都提到转化思想，16 位学生谈到从特殊到一般的研究问题的方法。

本节课历史材料的融入让学生对数学的悠久历史产生了浓厚的兴趣，拓宽了学生的视野，很多的同学在“你喜欢本课中所讲到的数学史吗？”的回答中，都说到了自己很佩服古人的意志和探究精神，古人的不断钻研为后人提供了丰富的知识，虽然很早就出现中位线定理，但是人们没有停止追求更丰富的证明方法，也让学生体会到了学无止境的含义，充分达到了德育之效。

从知识层面上而言，中位线定理的探究加深了学生对中位线定理的理解，全体同学都能运用“取中点构建中位线”来解决课后反馈单中的练习题，中位线定理的探究学生对中位线定理的运用能力的提高也起到了的推波助澜的作用。

5 教学感悟

传统课堂中，教师更倾向于将本节课的重点放在中位线的应用上，通过一定的练习，让学生学会如何在不同的情形下通过添加中位线来解决问题。而通过精细解读教材，我们发现教科书中本节课的重点在于“让学生探索三角形中位线定理的性质并掌握三角形中位线定理，

初步学会这个定理的运用”，即重点在于中位线定理的探索和证明。[5]而实际教学中，教师即使希望将重点放在“探索与证明”上，也无材料可用，只能局限于教科书中的“裁剪三角形”而已。三角形中位线定理的证明方法上，辅助线的填法也较为单一，且各种辅助线填法之间并无共同性，无法让学生体会数学思想方法的精华，而数学史的融入恰好解决了教师“无米之炊”的问题。教师“顺应式”利用数学史，巧妙设置“四兄弟分土地”问题，让学生在解决问题的情景中发现中位线定理，在学生基本都能想出教科书中“倍长中线”证明中位线定理的基础上，并没有直接过渡到定理的应用，而是利用学生课堂生成的刘徽的“割补法”，将定理的证明方法从“特殊”到“一般”进行拓展，让学生理解只要取中位线上任意一点，都可以实现从三角形到特殊四边形的转化，而后再由“一般”到“特殊”进行归纳总结，让学生意识到“倍长中线”只是一般方法的一种特殊情形而已，实现思想的升华。这样的处理方式，可以让学生深入理解三角形中位线定理证明中所蕴含的数学思想方法，真正实现了教科书中对本节课的设计意图。

本节课利用微视频来介绍三角形中位线定理的历史，让学生了解了更多历史上关于中位线定理证明方法的知识，视频中对于多种证明方法的介绍，开阔了学生的视野，让学生感叹证明方法多样之余，也产生对数学家们的敬佩之心，更是感受到了数学家们为了追求知识的不懈努力和奉献精神，从而激发了学生热爱科学，敢于创新的精神。尤其是微视频中刘徽的出入相补的方法与班中一位同学的方法类似，引起学生共鸣，增强了学生学习的信心和自豪感。

总的而言，本节课融入数学史，实现了“知识之谐”、“探究之乐”、“方法之美”、“德育之效”等多层价值，是一次超越历史、超越古人的一次尝试。

参考文献

[1] 李霞,汪晓勤.三角形中位线定理的历史.中学数学月刊,2016(9):58-60.

[2] 白富荣.三角形的中位线教学设计.中学数学研究,2013(11):19-21.

[3] 欧几里得.几何原本[M]. 兰纪正,朱恩宽译.西安:陕西科技出版社,2003:153-154.

[4] 郭书春.汇校九章算术[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2009: 49-51.

[5] 上海市教育委员会.上海市中小学数学课程标准[M].上海:上海教育出版社,2014.

课例分析

基于数学史的新知引入课例分析

陈晏蓉　汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

实践表明，HPM视角下的数学教学（即融入数学史的数学教学）不仅对学生的学习产生了积极的影响，而且对也丰富和完善了教师的面向教学的数学知识（MKT），其中包括内容与教学知识（KCT）。引入是课堂教学的主要环节之一，为整节课的知识传授做铺垫。巧妙的课堂引入可以在短时间内吸引学生的注意力、激发他们的学习动机并引领他们主动参与到课堂中。因此，关于如何引入新知的知识是KCT的重要组成部分。

早在20世纪50年代，美国学者琼斯（P. S. Jones, 1912~2002）就曾指出，数学史为教师提供了引入新课的话题，也为学生提供了发现新概念或新思想的方法[1]。当代数学教育家Tzanakis和Arcavi也指出，数学史丰富了教师的背景知识，认为教师通过数学史可以确定引入数学新知的动机[1]。

近年来，越来越多的一线教师对于HPM视角下的数学教学产生兴趣，相关的课例（本文称之为“HPM课例”）日益增多。我们关心的是，在这些课例中，教师是如何引入新知的？数学史在新知引入中是否起作用？有关学者的上述论断是否可以得到印证？

为了回答上述问题，我们对部分高中HPM课例进行了考察和分析，试图为HPM课例开发与实践提供参考。

2 课例选取

我们选取 2007-2016 十年间发表的 11 个 HPM 课例[2~12]作为研究对象。这些课例所属课型均为新授课，6 个涉及代数主题，2 个涉及三角学主题，2 个涉及解析几何主题， 1 个涉及微积分主题。大多数课例均由大学数学教育研究人员和中学数学教师合作开发而成，课例研究的流程如图 1 所示[1]。实践中，第二个环节“研讨与设计”和第三个环节“实施与评价”之间往往会经历多次循环。

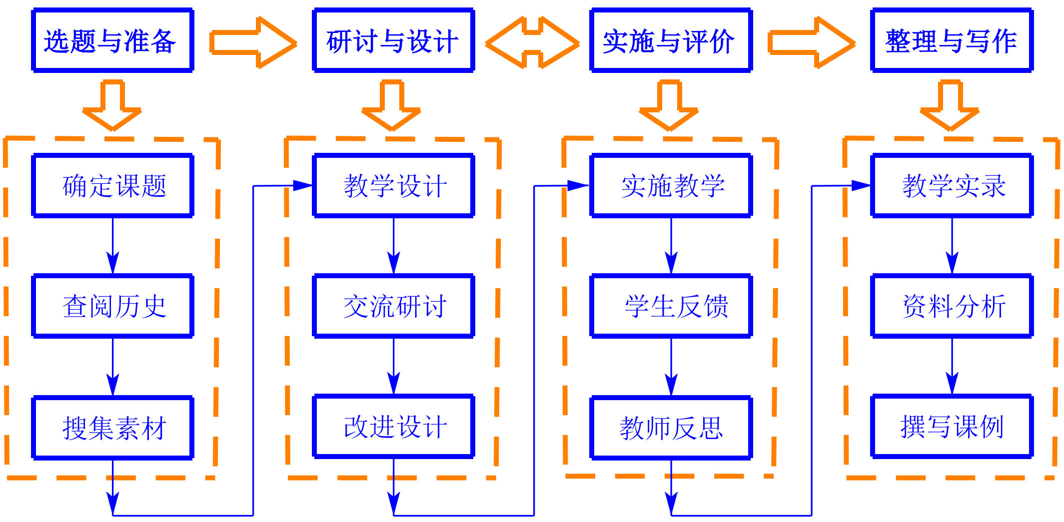


图 1 HPM 课例研究的流程

在已经开发的高中 HPM 课例中，并不是每一个课例都融入了数学史，本文中的课例选择标准是新知引入与数学史密切相关。

3 新知引入的类型

数学教学中的新知引入方法很多，不同的作者都曾给出过各自的分类方法，一些作者还提到利用数学史料来引入[13][14]，但对于如何利用数学史料来引入，迄今很少有人作出进一步的探讨。通过分析，在本文所考察的 11 个 HPM 课例中，7 个采用了问题引入，2 个采用了故事引入， 1 个采用了演示引入， 1 个采用了实例引入。

3.1 问题引入

问题引入是通过让学生解决一个或多个具体的问题，在解决问题的过程中引入新知。

在课例“对数”[2]的开始，教师由计算天文学中一光年的大小：$299792.468\times 31536000$ 的问题引入，让学生从中体会运算之繁，了解 16-17 世纪天文学家在研究天体运动规律时要耗费大量的时间进行数据运算。接着，通过等差数列和等比数列之间的对应关系，体会数表的效用与局限，由此引入对数的概念。

在课例“两角和与差的三角公式”[3]中，教师根据古希腊数学家帕普斯（Pappus, 3 世纪末）的和角公式几何模型，设计一系列问题。

问题 1：图 2 展示的是两角和的正弦公式的证明方法，你能说明其证明过程吗？

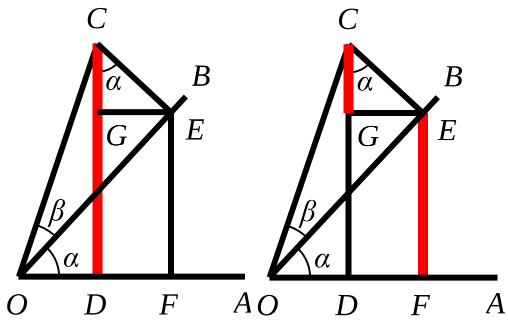


图 2

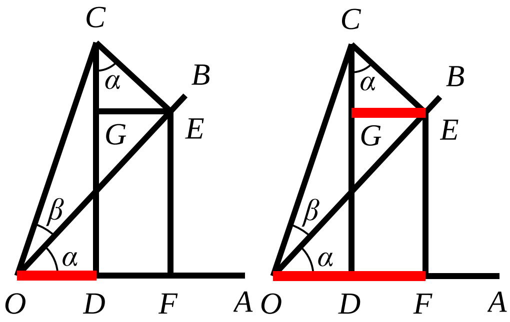


图 3

问题 2：参考了上述证法，再看看图 3，能得到什么结论呢？

问题 3：你能利用问题 1 与问题 2 的结果计算出 $\sin 75°$ 与 $\cos 75°$ 的值吗？

问题 4：求 $\sin 25°\cos 65° + \cos 25°\sin 65°$ 与 $\cos 40°\cos 35° - \cos 40°\sin 35°$ 的值。

问题 5：问题 1 和 2 中的公式是否对任意角 α 与 β 都成立？

在课例“正弦定理”[4]中，教师以流星的测量问题引入，如图 4 所示，*O* 为地球球心，*A*、*B* 为观测者所在位置，观测者相距 500*km*，*AD*、*BD* 为地平线，交于 *D* 点，从 *A*、*B* 观测流星 *C*，仰角分别为 $\alpha = 23.2°$、$\beta = 44.3°$，求流星与两位观测者的距离分别是多少。而后，教师通过引导学生将实际问题抽象为数学问题，即在三角形中，已知两角及所夹边，求其余两边的问题。从而引入本节课的主题。

流星测量引入是根据 10 世纪阿拉伯天文学家阿尔·库希（al-Kuhi）的流星测量方案改编而成的，属于顺应式。

在课例“均值不等式”[5]中，教师首先介绍了《几何原本》第六卷命题 13：求作两条已知线段的比例中项（即几何中项）。欧几里得的作法如图 5 所示。设 *AC*、*CB* 是两条已知线段，它们在同一条直线上，以 *AB* 为直径作半圆 *ADB*，在点 *C* 处作 *AB* 的垂线 *CD*，交半圆周于 *D*，则 *CD* 就是所求的几何中项。

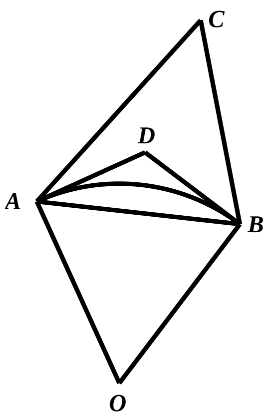


图 4

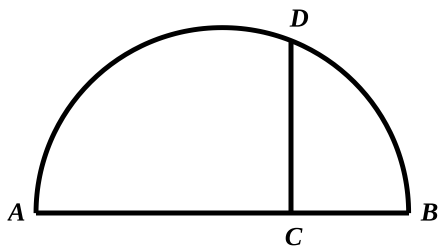


图 5

据此，教师设计了以下问题串。

问题 1：结合图 5，证明 *CD* 是 *AC* 和 *CB* 的几何中项。

问题 2：在图 5 中作出 *AC* 和 *CB* 的算术中项，然后比较算术中项和几何中项的大小。

问题 3：已知 $a>0$，$b>0$，我们将 $\sqrt{ab}$ 和 $\dfrac{a+b}{2}$ 分别称为 *a* 和 *b* 的几何平均数和算术平均数。根据问题 2 的结论易于得出几何平均数和算术平均数之间的大小关系。请用代数方法来证明这一关系。

问题 4：正数 *a*、*b* 的几何平均数和算术平均数何时相等？请结合图 5 说明。

在课例“曲线与方程”[6]中，教师通过古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius，公元前 3 世纪）的“二线”和“三线”轨迹问题引入：求到两条相互垂直的定直线距离相等的动点轨迹以及到两条平行线距离乘积与到第三条与它们垂直的直线距离的平方相等的动点轨迹。阿波罗尼奥斯原问题中，直线的位置关系是任意的，并且距离之比或距离乘积与距离平方之比为任意常数，教师对其进行了特殊化的处理，故属于顺应式。

在课例“数系扩充与复数的引入”[7]的开始，教师提出一个具体情景中的问题：要用 20 分米长的彩带制作一个面积为 24 平方分米的长方形框架，应该如何确定长和宽？学生通过求解得出长为 6 分米，宽为 4 分米。接着，教师给出卡丹（G. Cardan, 1501~1576）在《大术》中提出的问题：“和为 10，乘积为 40 的两数分别是多少？”教师由卡丹的解法引入虚数的概念。

在课例“导数的几何意义”[8]中，教师通过三个具体的问题引入：

- 我们很容易画出平面的反射光线，那么在曲面上光是如何反射的呢？
- 已知某物体的运动轨迹，我们如何确定它的速度方向呢？
- 我们很容易确定斜坡的坡度，但拱桥的坡度又如何确定呢？

三个问题分别对应于 17 世纪数学家研究过的三大问题——光在曲面上的反射问题、曲线运动的速度方向问题以及曲线的夹角问题，正是这三大问题促使数学家对曲线的切线进行研究。因此，教师无声地运用了数学史。

3.2 故事引入

所谓故事引入，即将数学史上有关知识的发生背景以故事的形式讲述给学生，以此来引入新知。数学史的运用方式主要为附加式。

在课例“函数的零点”[9]中，教师由以下故事引入：在神圣罗马帝国时期，人们经常在

公共场所举办数学竞赛。比赛常常吸引众多的观众，其盛大景况堪与明星演唱会相媲美。神圣罗马帝国皇帝腓特烈二世也是个数学迷。有一次，他举办了一场宫廷数学竞赛，其中一道竞赛题是求三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根。来自比萨的大数学家斐波那契（L. Fibonacci）成功地获得了它的近似解，并精确到了小数点之后的 6 位数字。斐波那契赢得了比赛，深受皇帝的赞赏。教师进而引导学生作相应三次函数的图像，寻找方程的根与函数图像之间的关系。

在课例“递推数列”[10]中，教师以古代印度的故事引入：在世界中心贝那拉斯的圣庙里，一块黄铜板上插着三根宝石针。梵天在创造世界的时候，在其中一根针上从下到上地穿好了由大到小的 64 片金片，这就是所谓的汉诺塔。不论白天黑夜，总有一个僧侣按照下面的法则移动这些金片：一次只移动一片，不管哪根针上，小片必须在大片上面。僧侣们预言，当所有的金片都从梵天穿好的那根针上移到另外一根针上时，世界将在一声霹雳声中消灭，而梵天塔、宇宙和众生也都将同归于尽。由此引入汉诺塔游戏。

3.3 演示引入

演示引入即教师设计具有启发性和趣味性的实验活动或是使用自备的教具、动态课件，通过实际操来引入新知。数学史的运用方式大多属于顺应式。

在课例“抛物线概念”[11]中，教师借鉴古希腊数学家发现圆锥曲线的过程，通过圆锥模型，展示了椭圆和双曲线的截法，然后引导学生思考：用平行于母线的平面去截圆锥，能截出什么图形？教师用实物（实际上是一个抛物面）来拟合圆锥的截口，然后将该实物与二次函数的图像进行比较，从而引出抛物线。

3.4 实例引入

所谓“实例引入”，即将历史上与本课所教内容有关的具体例子用于引入部分。数学史的运用方式主要为复制式和顺应式。

在课例 “数列概念”[12]中，教师以两河流域泥版（公元前 7 世纪）上所记录的一张月相变化表（表 1）作为第一个实例来引入数列概念：将满月分成 240 部分，则从新月开始，每天的月相变化情况如表 2 所示。该表呈现的其实是一个月相数列：前 5 项构成公比为 2 的等比数列，第 5~15 项构成公差为 16 的等差数列。

表 1 月相变化表

1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	10	20	40	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240

4 基于数学史的新知引入的特点

M·克莱因（M. Kline, 1908~1992）曾提出四个数学课程原理——兴趣原理、动机原理、直观原理和文化原理[15]，而波利亚（G. Pólya, 1887~1985）则提出三个数学教学原理——主动学习原理、最佳动机原理和阶段序进原理[16]。根据上述原理，结合课堂引入的功能，我们认为，一种理想的新知引入方式至少需要具备以下基本特征：

（1）可学性，即引入建立在学生已有知识基础之上，易于为学生所理解；

（2）有效性，即引入能够有效地揭示新知的必要性，激发学生的学习动机；

（3）关联性，即引入能够为后面的相关知识服务；

（4）趣味性，即引入能够激发学生学习新知的兴趣。

根据上述特点，我们对各 HPM 课例中的引入方式进行分析。

“对数”是人教版教科必修 1 中的内容，教科书通过人口增长模型 $y=13\times1.01^x$ 来引入，符合知识的逻辑顺序，但不符合历史顺序。对数的发明源于数学家简化大数乘除运算的动机，在历史上，其主要功能就是简化计算。发明对数的主要方法是利用等差和等比数列之间的对应关系，事实上，“对数”中的“对”，就是“对应”的意思。HPM 课例试图通过历史的重构，有效地揭示了对数的必要性，为对数的运算法则埋下伏笔，具备有效性、关联性和趣味性特点。

“函数的零点与方程的根”是人教版高中数学必修 1 中的内容，教科书由二次函数图像与 x 轴交点和一元二次方根之间的关系，引出函数的零点概念。学生对于一元二次方程的解法已经耳熟能详，为何还要通过二次函数的图像来解方程？HPM 课例则通过斐波那契求解三次方程的故事引入，学生不了解三次方程的解法，通过作图发现三次方程的根与函数图像之间的关系，更能激发学生的学习动机和兴趣，因而满足有效性、关联性和趣味性特点，但可学性上不如教科书。

“两角和差的三角公式”是人教版高中数学必修 4 中的内容，教科书由电视发射塔的高度测量引入，贴近生活实际，体现了新知的必要性。HPM 课例中由帕普斯和角公式几何模型引入，直接为和角公式的推导服务，具备关联性特点，但未能体现有效性。

“正弦定理”是人教版高中数学必修 5 中的内容，教科书由直角三角形三边与三角的数

量关系引入。HPM 课例中由历史上流星测量问题的引入，揭示了正弦定理的必要性，更具有效性和趣味性。

“数列的概念”是人教版高中数学必修 5 中的内容，教科书由毕达哥拉斯形数引入，是少数运用数学史的典型例子之一。形数突出了数列的序的特征，也为数列通项公式概念做好铺垫，但未能有效地揭示数列的必要性。HPM 课例运用两河流域月相表，反映了数列知识与现实生活的密切联系，从而凸显新知的必要性，具备有效性、趣味性特点。但由于该数列的通项公式不易导出，因而在关联性上不如毕达哥拉斯形数。

“递推数列”是人教版高中数学必修 5 中的内容，教科书直接通过几个递推数列的例子来引入，学生感到比较突兀。HPM 课例则通过汉诺塔的故事引出一个游戏，从操作中得出递推数列，寓教于乐，体现了可学性、趣味性、有效性和关联性。

“均值不等式”是人教版高中数学必修 5 中的内容，教科书采用第 24 届国际数学大会会标引入，融入了数学史元素，但更适用于不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$。HPM 课例由《几何原本》第六卷命题 13 引入，更适用于均值不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，且有助于问题串的设计以及均值不等式链的建立，在关联性上更胜一筹。两种引入在有效性上均体现不够。

“曲线与方程”是人教版高中数学选修 2-1 中的内容，教科书通过平面直角坐标系中平分一三象限的直线方程 $y=x$ 以及圆的方程，建立曲线与方程之间的关系，该引入建立在学生学过的直线和圆的基础上，具有可学性的特点，但在有效性上有所欠缺。HPM 课例则再现了阿波罗尼奥斯的“二线”轨迹问题和“三线”轨迹问题，学生用原有几何知识可以解决前者，但难以解决后者，从而感受到几何方法的局限性与解析方法的必要性，因而既体现了可学性，也体现了有效性。

“抛物线的定义与方程”是人教版人教版高中数学选修 2-1 中的内容，教科书直接通过对二次函数图像的思考以及运用《几何画板》作图引出本节内容，几何画板的动态演示让学生对于抛物线有一个直观的认知；HPM 课例则通过实物模型的展示，再现了数学史上抛物线的发现过程，解决了“为什么抛物线属于圆锥曲线”以及抛物线焦点的来源问题，体现了有效性、关联性和趣味性的特点。

“数系的扩充与复数的引入”是人教版高中数学选修 2-2 中的内容，教科书通过方程 $x^2+1=0$ 引入，符合数系扩充的逻辑顺序。在初中阶段，学生已经习惯于“一个数的平方为正数”以及“方程允许无解”这样的观念。为什么一个方程非要有解不可呢？教科书的引入虽然直接、快速，但未能有效地解决虚数概念必要性问题。HPM 课例则通过卡丹问题，

让学生看到“两个数的和为实数，但这两个数却都不是实数”的事实，从而引发认知冲突，有效地揭示了新知的必要性。

“导数的几何意义”是人教版高中数学选修 2-2 的内容，教科书由切线的动态形成过程引入，缺乏必要的铺垫。HPM 课例借鉴历史，通过三个现实问题——“光在曲面上的反射”、“曲线运动的速度方向”和“拱桥的坡度”引入，揭示切线研究的必要性，以此激发学生的学习动机。

表 2 总结了各课例中新知引入的基本特征。

表 2 各 HPM 课例的新知引入特点

课题	可学性	有效性	关联性	趣味性
对数	√	√	√	√
函数的零点与方程的根		√	√	√
两角和与差的三角公式	√		√	
正弦定理	√	√	√	√
数列的概念	√	√		√
递推数列的概念	√	√	√	√
均值不等式	√		√	
曲线与方程	√	√	√	
抛物线的定义与方程	√	√	√	√
数系的扩充与复数的引入	√	√	√	
导数的几何意义	√	√	√	

由表 2 可知，绝大多数 HPM 课例的新知引入都具备可学性、有效性和关联性特点。虽然一些课例在新知引入上也注重趣味性，但鉴于高中生（特别是数学成绩好的学生）的特点，一些教师主要关注数学史对学生认知上而非情感上的助益，因而引入的趣味性不足。

5 结 语

综上所述，我们所考察的 11 个 HPM 课例在新知引入中主要采用了问题引入、故事引入、演示引入和实例引入这四种方式，其中，问题引入方法采用得最多。数学史的运用方式为附加式、复制式和顺应式。通过数学史的融入，多数课例的引入能够有效地揭示新知的必要性，体现“知识之谐”，从而激发学生的学习动机；同时，也能满足通常的引入所应具备

的可学性和关联性特点。数学史在为一线教师提供新知引入的素材的同时，也帮助教师更好地理解新知发生的动因，从而设计出更合理、更有效的引入。因此，HPM 课例印证了本文引言部分所提及的数学史的价值。我们有理由相信，HPM 课例中的新知引入设计为现行教科书提供了有益的补充。

另一方面，部分 HPM 课例的引入未能兼顾四种特点，因而在数学史料的选择、裁剪和加工上，还有很大的完善空间。此外，HPM 课例的设计和实施需要建立在对教科书的深入理解之上。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017

[2] 金惠萍, 王芳. HPM 视角下的对数概念教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014, (9): 28-34.

[3] 张小明. 两角和差的三角公式推导---数学史融入数学教学的案例研究[J]. 数学教学, 2007, (2): 42-44.

[4] 张筱瑜, 汪晓勤. “正弦定理”:用历史拓思维、润情感[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (6): 21-25.

[5] 张小明. 均值不等式的 HPM 学习单设计[J]. 中学数学教学参考(高中版), 2012, (10): 68-70.

[6] 石和飞. “曲线与方程”: 用古希腊轨迹问题串联[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016, (03): 52-56.

[7] 方国青, 王芳. HPM 视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究[J]. 数学教学, 2013, (4): 4-29.

[8] 王芳, 汪晓勤. HPM 视角下“导数几何意义”的教学[J]. 数学教育学报, 2012, 21(5): 57-60.

[9] 陈飞. “函数的零点”: 用历史故事和问题激发动机[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (12): 28-31.

[10] 李玲. “递推数列”: 从汉诺塔游戏出发[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015, (9): 19-23.

[11] 徐超. 抛物线概念教学: 重构数学史[J]. 教育研究与评论, 2015, (8): 26-31.

[12] 李玲, 汪晓勤. 数列概念: 通过历史体现“奇、趣、本、用”[J]. 教育研究与评论(中学教

育教学), 2016, (4): 61-65.

[13] 张守波. 浅谈中学数学教学导入新课的方法. 数学通报, 1996, 35(1): 1-2

[14] 于鸿丽. 数学课堂教学的导入技能. 中学数学教学参考, 2007, (1-2): 10-12

[15] Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books[J]. *Mathematics Teacher*, 1958, 51(6): 418-427

[16] Pólya, G. *Mathematical Discovery* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1965. 132-133.

HPM 教学课例形成过程及其启示

——以“三角形中位线定理”为例

牟金保

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

数学史融入数学教学的实践和课例开发是 HPM（History and Pedagogy of Mathematics，数学史与数学教育）研究的重要方向之一。[1]HPM 教学课例（以下简称“课例”）是指在课堂上发生的、将数学史融入数学教学的富有意义的典型事件，课例的开发过程就是对该事件发生过程的叙事性描述。近年来，在大量该领域课例研究的驱动下，数学史在课堂教学中的运用越来越成熟，课例开发已经取得了丰硕的成果，成为基于数学核心素养课堂转型教学的重要促动因素，产生了广泛的影响。[2]虽然课例开发已经有了丰硕的成果，但是课例的开发过程，仍然是很多研究者以及教师感兴趣的话题，对于课例开发过程进一步的研究有助于研究者思考如何产出成熟的课例，对于教师的实践有着一定的指导作用。但目前为止，课例开发过程方面开展的研究还较少，为了让更多对课例开发感兴趣的研究者与中小学一线教师详细了解课例开发过程，本文拟以“三角形中位线定理”为例，来呈现课例形成过程，同时提炼该过程对教学的启示。

《三角形中位线定理》是沪教版初中数学八年级下册二十二章《四边形》中第三节第三课时内容，属初中几何知识中重要的知识点之一，该知识点数学史料丰富，如果合理融入课堂教学一定会彰显知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效。本节课的课例现在已开发完成，属于 HPM 研究团队（以下简称“团队”）与中学一线教师（以下简称“教师”）联合开发的课例之一，开发全程在上海进行，经历了初次尝试——再次实践——模拟课堂——课例形成的过程。课例开发涉及面广，其中执教者包括 3 名初中教师，1 名大学教师；涉及上海 3 所初中，1 所大学。除此之外，每次活动都会有上海市名师工作室成员、高校教师、硕士、博士研究生以及访问学者参与研讨，受关注度较高，因此此课例具有一定的典型性，对其分析有助于开发更好的类似课例。

2 初次尝试

2.1 课题研讨

课例的课题选定取决于团队和教师两方面。对于团队来说，该课题应该是历史脉络清晰、史料丰富、教育价值明确，则适合实施 HPM 视角下的课堂教学；对于教师来说，该课题应该是能够帮助学生更好理解知识点，深刻揭示数学本质。“三角形中位线定理”这一课题就是在满足两方面需求的情况之下产生的课例。选定课题后，研究团队就与中学一线教师召开研讨会，由一线教师提出在大多数教学实践中不能解决的问题，对于“三角形中位线定理”来讲，一线教师提出的问题大致归纳为以下五点：（1）中位线概念产生的不够自然，仿佛“从天而降”；（2）教材只是选取特殊情况进行先割补再旋转，没有体现出特殊到一般的数学思想方法；（3）简单地割补和旋转不能让学生体会实验几何到论证几何的过渡过程，更不能培养学生演绎推理能力以及提高学生数学素养；（4）大多数课堂教学不会让学生探究三角形中位线与第三边的关系，导致学生对三角形中位线概念理解不透彻，达不到课标要求“理解”层次的目标；（5）“立德树人”的大背景下，在严格落实德育课程应有的德育功能同时，如何体现数学课程的德育功能，发挥数学课堂教学在育人中的渠道作用。

2.2 备课研讨

根据课题研讨中教师提出的问题，团队对该课题的数学史进行深入研究与探讨，按照“趣味性”、“科学性”、“有效性”、“可学性”和“新颖性”的五项原则选取适切的史料提供给教师，并就相关问题通过电话和网络进行交流。其中，趣味性是指数学史料涉及数学背后的故事，让学生觉得有趣。科学性是指数学史料符合史实，而不是胡编乱造的，也不能有数学上的错误。有效性是指数学史料必须满足教学目标的要求，不是为了数学史而数学史。可学性是指数学史料的难易程度要符合学生的认知基础，易于学生接受。新颖性是指数学史料要有新意，有特色，而非老调重弹，人云亦云。[3]对于“三角形中位线定理”来讲，主要提供以下数学史料：（1）公元前 1800-1600 年期间古巴比伦数学泥版所记载的“六兄弟分割三角形土地的问题”的史料；[4]（2）《九章算术》注释中关于刘徽利用割补法推导三角形面积公式的史料；[5]（3）古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前 330～公元前 275)欧几里得《几何原本》中线段之间关系转化为三角形面积之间关系的史料；[6]（4）三角形中位线定理有多种证明方法，比如在近代西方早期教科书中出现了一些证明方法，18 世纪法国数学家勒让德（A.M.Legendre,1752-1833）在《几何基础》中给出的反证法[7]、苏格兰数学家莱斯利（J.Leslie,1766-1832）在《几何和平面三角学基础》（1817）中给出欧氏面积法[8]、Phillips

在《几何基础》[9]（1878）和 Newcomb 在《几何基础》[10]（1899）中给出同一法和 Macine 在《平面和立体几何基础》[11]（1895）给出平行四边形法。鉴于不同类型的教师①拿到史料的运用和组合方式不尽相同，表现出来的效果也截然不同。团队会向教师给出数学史融入数学教学的四种方式[2]——附加式、复制式、顺应式和重构式，以供研讨后自然融入课堂教学。其中附加式是指展示有关数学家图片、讲述有关数学故事等。复制式是指直接采用历史上的数学问题、思想方法等。顺应式是指根据历史材料编制数学问题。重构式是数学史应用的最高层次，是指追溯思想的历史起源，通过借鉴，重构知识的发生、发展历史，以寻求激发学习动机的最佳方式。[3]团队研讨教学设计是备课研讨中重要环节之一，“三角形中位线定理”也不例外。教学设计研讨形式主要先以教师团队在讨论班说课，然后集体讨论的次序进行，最终通过共同反复打磨来确定教学目标。

2.3 课堂实践

初次尝试阶段教学流程按照问题引入——性质探究——定理证明——课堂小结四个环节进行实施。问题引入环节通过“土地分割问题”，给出一道土地分割的情景“现有一块三角形土地，连接三角形两腰中点分三角形土地为一块小三角形和一个小梯形，已知原三角形的高为 50，小梯形的面积为 300，求原来三角形和分割得到的小三角形的底边。”改编成一道数学问题引入新课“如图 1，在ΔABC中，D、E 为 AB、AC 的中点，BC边上的高 AF 为 50，$S_{梯形DBCE}=300$，求 DE、BC。”；性质探究环节主要引导学生从图 1 到图 2 进行自主探究；定理证明环节教师将学生注意力集中到动态的思维上，引导学生证明中位线定

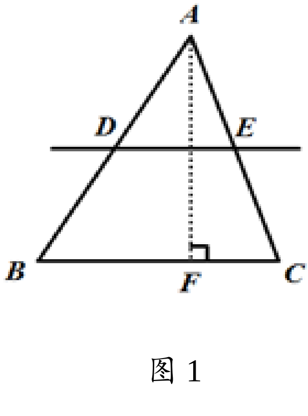


图 1

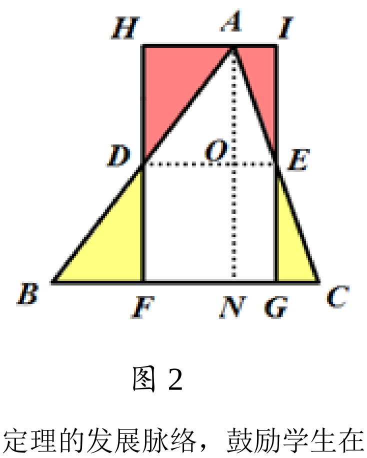


图 2

理；[12]课堂小结环节教师回顾并梳理三角形中位线定理的发展脉络，鼓励学生在以后学习中发现问题、解决问题，并发散思维，多尝试用不同的方法解决问题。教学流程如图 3：

① 这里主要指新手教师、熟手教师和专家型教师

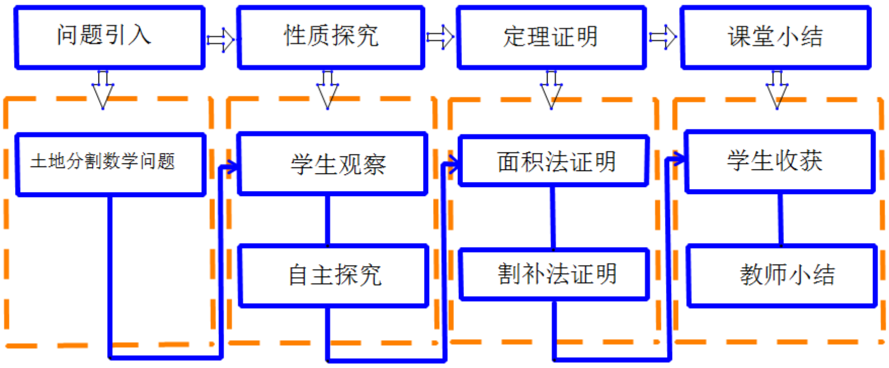


图 3

由于初次尝试，课堂实践没有达到相应的效果，其中表现出的问题主要为引入部分不自然，中位线没有自然的引出，同时也没有很好的与后面的证明活动自然衔接，教师的引导性过强，文化与德育元素并不突出。因此六条教育价值中，知识之谐，探究之乐，文化之魅与德育之效没有很好的体现。

3 再次实践

由于初次尝试阶段的课堂实践并不完美，因此在课后评价修正的基础上再次进行实践。教学流程按照复习旧知——探究新知——定理证明——课堂小结四个环节进行实施。复习旧知环节主要通过让学生快速回答有关三角形的知识；探究新知环节主要加入了剪纸活动，教师给每组学生一个三角形，让学生自主探讨将一个三角形分成两个面积相等的三角形，随后让学生剪出四个面积两两相等的三角形，目的是通过剪纸活动引出中位线的概念；最终让学生猜想中位线和底边的位置关系和数量关系而得出中位线定理。定理证明环节，教师给出了欧几里得的面积法和刘徽的割补法，并利用微视频介绍了另外三种证明方法。课堂小结环节，教师让学生总结本节课的关键词。教学过程如图 4[13]：

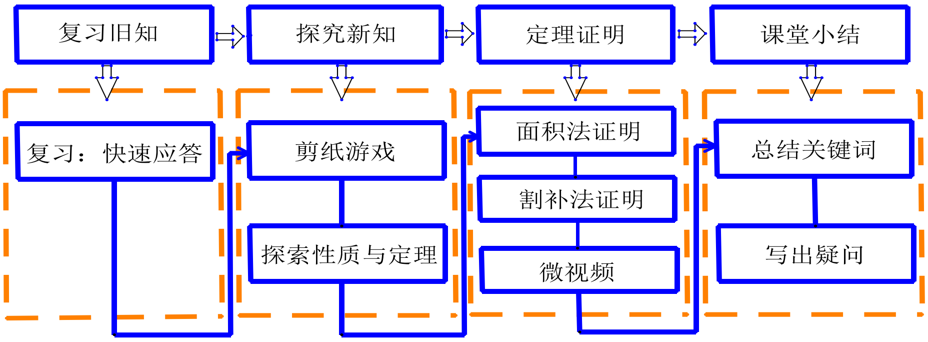


图 4

在此次实践中，引入环节首次采用了将一个三角形分成四个两两相等的三角形，期望自

然的引出中位线这一概念，实践证明效果很好，基本达到了知识之谐这一价值，但由于后面的活动教师引导性过强，没有基于学生的自主探究活动进一步过渡到中位线定理的产生与证明。因此，在探究之乐上还有所欠缺，同时证明方式给出过多，讲解过快，学生没有很好的消化，探究之乐、文化之魅与德育之效没有很好的呈现。

4 模拟课堂

虽然两次课堂课例教学各有所长，但都不是很完美，没有达到预期相应的教学目标。为了达到教学目标，形成更完美课例，团队决定在华东师范大学教师教育学院 2016 级专硕《数学教学设计与课例分析》课堂进行模拟教学。模拟课堂使用的史料与前两次课堂实践基本相同，教学流程按照新课引入——概念形成——性质探究——知识巩固——课堂小结五个环节进行，具体以问题串的形式呈现。其中新课导入环节设置两个问题：（1）如何将三角形分割成四个面积相等的三角形？（2）你是如何操作的？概念形成环节设置两个问题：什么是中位线？中位线和中线有何区别？性质探究环节设置三个问题：（1）为什么你所得到的四个三角形是两两全等的？（2）你能猜想出中位线的性质吗？（3）如何证明三角形的中位线？知识巩固环节设置一个问题：课堂小结环节设置一个问题：这节课你收获了什么？

通过问题串的模拟课堂教学，使这节课的教学思路更加清晰，教学目标更加明确。整个课堂贯穿于一个历史情境“土地分割问题”，教学设计意图如图 5：

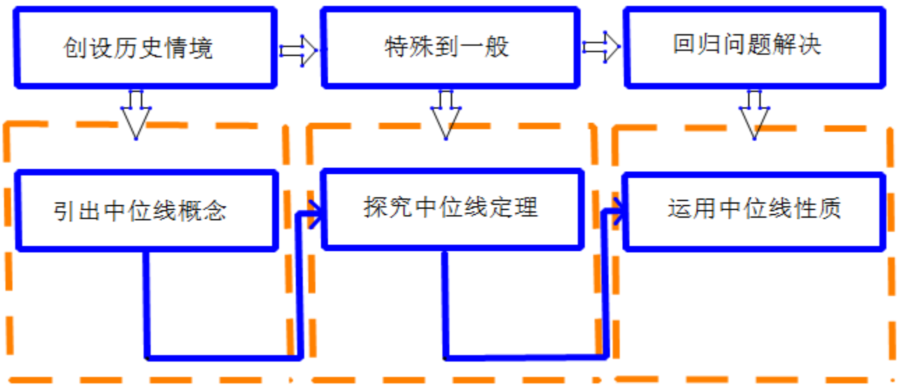


图 5

模拟课堂的流程设计基于前面两次教学实践的基础之上，关键在于解决从引出中位线自然过渡到中位线定理及其证明的问题，因此在模拟课堂上开始采用问题串的形式，在分三角形面积问题之后进一步给出如何证明三角形中位线定理这一问题，实践证明，此问题很好的解决了从中位线概念到中位线定理及其证明的过渡问题，同时问题串的设置让整节课成为了

一个整体。模拟课堂达到了知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效六方面的价值，整个课例趋于成型。

5 课例形成

通过初次尝试——再次实践—模拟课堂三个环节，相对完美的课例设计框架已经形成。在这种情况下，团队与教师进一步研讨，在这个过程中发现，中位线定理的证明方式可以在刘徽的证明基础上进一步完善，如图 6 所示，可以不拘泥于刘徽的方法，从一边的端点，到垂点，再到中点，最后到一般的点，从而体现特殊到一般的思想，给学生更大的发挥空间。

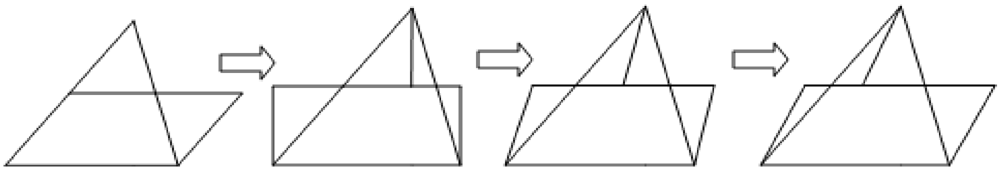


图 6

课例形成阶段的教学按照创设情境——从特殊到一般——回归问题解决的主线组织课堂教学，具体的教学设计意图如图 7 所示。

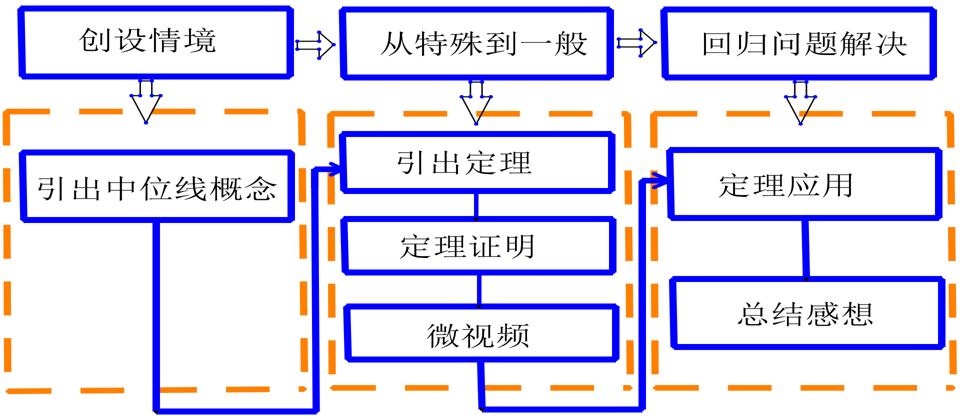


图 7

课后进行了学生反馈，主要从教师引导探究效果、中位线定理证明的数学思想方法、是否喜欢数学史融入课堂教学以及中位线定理理解方面进行测评，反馈表明教学效果很好；结语部分主要讲本课例教学和大多数传统课堂教学进行比较得出：本课例“顺应式”利用数学史打破课本上单一的证明方法，从特殊到一般的相互转化，让学生体会数学思想方法的精华，真正达到课程标准对本节课的要求；三角形中位线定理的微视频，激发了学生热爱科学、敢于创新的精神，感叹证明方法多样之余将自己的证明方法与古人的方法对比，引起学生的

古今共鸣，自信心和自豪感油然而生。从反馈中可以看出，本节课解决了课题研讨时教师提出的问题，达到了备课研讨时设定的教学目标。

总体而言，本课例的形成通过初次尝试——再次实践—模拟课堂——课例形成四个环节，每个环节都经历了研讨，实践以及反思三个过程，各环节从发现问题到解决问题（如图 8），使得课例的知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效等多层教育价值凸显。

图 8

6 启示

从以上过程中可以得到课例开发的启示如下：首先，要考虑一个概念或定理的自然形成，即知识的和谐产生，对于引入问题的选取非常关键，往往恰当的引入大多需要借鉴历史上此概念或定理的产生背景，让学生自然而然的得到该概念或定理。其次，课堂中要注重各个环节之间的衔接，其中问题串的设置尤为关键，在教学中使用好问题串可以使得课堂教学更具有整体性。最后，定理的证明或问题的解决不能原样照搬历史上的方法，而更要注重与学生的认知起点以及逻辑基础相结合，对历史上的解法按照课标要求做出相应的改造加工，从而让学生自然的探究出与古人相一致的解法，在此之后还可以渗透文化之魅与德育之效。以上可以看到，本课例的生成过程对我们有很大的启发，在六项教育价值与四种应用方式的基础上，如何将一个课例打磨成一个经典课例，还需要更多课例开发中不断探索。随着课例的不断开发，在借鉴国际上课例研究经验的基础上，总结具有我国特点的课例研究理论将是我们的最终目标。课例研究的成果在改良课堂教学的基础上，势必会融入到教师的教育体系，进一步促进教师的专业发展。课例形成的过程，就像和氏璧需要能工巧匠不断地打磨才能闻名于世，宝剑需要经过不断地锤炼才可以削铁如泥一样，一节好的课例同样也需要不断地打

磨才可以发挥更好的教育价值。同时这个过程也是一把双刃剑，一面成就课例，一面磨炼教师，促进教师的专业发展。课堂实践也证明好的课例可以优化课堂教学、提升教师专业水平和教学素养。好的课例也能突出主题、注重探究，强调针对性、体现整体性、坚持互动性、保持连贯性，彰显教师个性、关注学生差异、追求真实有效、发挥团体智慧。

参考文献

[1] 汪晓勤,张小明.HPM 研究的内容与方法[J].数学教育学报,2006(1):16-18.

[2] 汪晓勤.HPM 的若干研究与展望[J].中学数学月刊,2012(2):1-5.

[3] 汪晓勤.HPM 视角下的“角平分线”教学[J].教育研究与评论(中学教育教学),2014(5):29-32.

[4] 李霞，汪晓勤.三角形中位线定理的历史[J].中学数学月刊,2016(9)：58-60.

[5] 郭书春.汇校九章算术[M].沈阳:辽宁教育出版社,1998.

[6] 欧几里得.几何原本[M].西安:陕西科学技术出版社,2003:153-154.

[7] Legendre A.M.*Elements of Geometry*[M].Cambridge:Hilliard&Metcalf,1825:49-61.

[8] Leslie J.*Elements of Geometry*[M].Edinburgh:James Ballantyne&Co.,1817:35-36.

[9] Phillips W.H.H.*Elements of Geometry*[M].New York:Sheldon&Co.,1878:31-32.

[10] Newcomb S.*Elements of Geometry*[M].New York:H.Holt,1899:59.

[11] Venable Charles S.*Elements of Geometry*[M].New York：University Publishing Co.,1875:67.

[12] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].第二版.上海:高等教育出版社,2009 .

[13] 沈中宇,李霞,汪晓勤.HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J].教育研究与评论（中学教育教学）,2017(1):35-41.

学术讯息

HPM 暑期学校会议综述

王鑫[1] 岳增成[2]

（1 华东师范大学教师教育学院，上海，200062;2 华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引言

1972 年开始作为国际数学教育大会（ICME）研究小组、1976 年开始成为国际数学教育委员会（ICMI）国际附属研究小组的数学史与数学教育（History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM），是数学教育中成立最早且较为重要的研究领域之一。然而，直到 2005 年西安第一届全国数学史与数学教育会议的召开，才标志着 HPM 开始进入我国大陆学术界的视野。近些年来，HPM 在国内受到了广泛关注，一方面通过中国知网检索发现，2010 年以来每年与之相关的文献超过 100 篇，另一方面，以国内最有影响力的数学教育类期刊之一《数学教育学报》为例，2010 年后载文下载频次前 20 的论文中，就有 6 篇与数学史、数学文化对数学教育的作用有关[1]。但是，HPM 在国内的发展也存在一些问题，比如对已有研究不关注，研究方法缺乏科学性，缺少数学史家与一线数学教师的合作，缺少对学生认知发展的关注等[2]。因此，有必要梳理国内 HPM 的大致发展脉络，以引领我国 HPM 学科的发展。恰逢被张奠宙先生评价为“这部著作的出版，必将成为我国数学史全面融入数学教育的一个历史性标志”[3]的《HPM：数学史与数学教育》出版之际，吸引了来自全国 29 个省、市、自治区的 500 余名数学教育工作者和数学爱好者的 HPM 暑期学校又于 2017 年 7 月 29 日至 30 日在华东师范大学顺利召开，使得对“我国 HPM 的大致发展脉络是什么”“有哪些新的研究主题”的探讨更具现实意义。

2 HPM：从实践到理论

在大会报告上，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授作了题为“HPM：从实践到理论”的报告，与我们分享了 HPM 在中国大陆从无到有，从实践到理论的发展历程。

20 世纪上叶，一些欧美数学家、数学史家、数学教育家，如 F.克莱因（C.F. Klein, 1849～1925）、卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）、史密斯（D.E. Smith, 1860～1944）、波利亚（G. Polya,

1887～1985）、弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905～1990）等大力提倡在数学教学中运用数学史，正是由于这些先驱者的不懈推动，HPM 成为了国际数学教育的新思潮，并发展出了为何与如何之探讨、教育取向之历史研究、历史相似性实证研究、教学实践与案例开发、HPM 与教师专业发展、数学史融入教材研究等研究方向。21 世纪初 HPM 理念传入中国后，起初，高校研究者以纯数学史研究为主，并介绍一些国外 HPM 理论，中小学一线教师主要通过讲述数学家的奇闻轶事来激发学生的数学学习兴趣，因此，HPM 进入中国的早期阶段，理论与实践处于分离状态。在这样的大背景下，汪晓勤教授受华东师范大学原校长刘佛年（1914～2001）“教育研究工作者要深入实际，参加教育工作的调查和学校的教育试验”的启示，从 2007 年开始扎根中学一线，与中学数学教师按照图 1 所示的流程合作开发 HPM 课例。目前已开发中学课例 100 余个，内容涵盖代数、几何、三角、解析几何和微积分等内容。

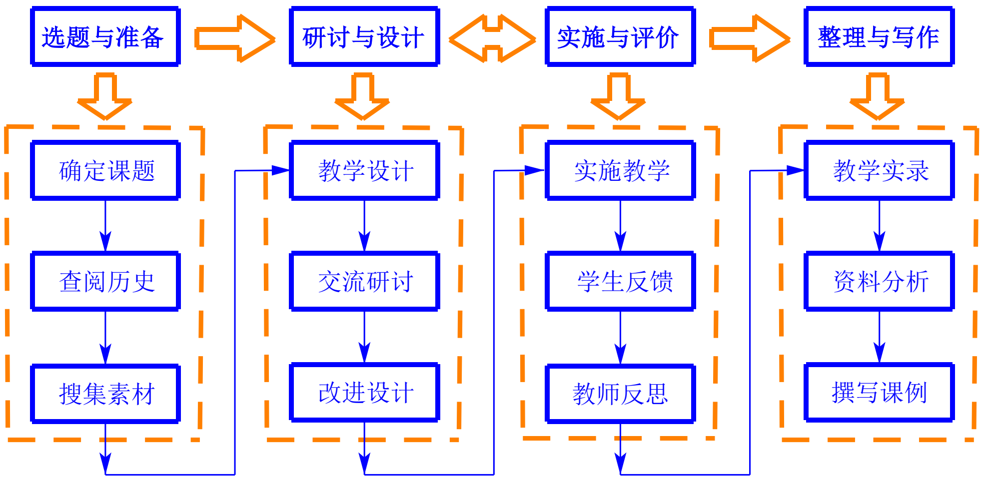


图 1 HPM 课例开发的流程

在 HPM 课例开发的过程中，汪晓勤教授的 HPM 团队首先总结出了数学教学中运用数学史的四种方式：附加式、复制式、顺应式、重构式，并以高中“数列的概念”、初中“三角形中位线定理”为例，阐述了四种方式的具体应用及内涵。在“数列的概念”一课，情景引入环节中古巴比伦泥版上的月相表、莱因德纸草书上的猫和老鼠趣味问题是直接采用的数学史上的问题，既富有历史韵味，又蕴含生活哲理，在数学史的运用方式上属于复制式。教师还将原本的约瑟夫问题改编成 10 人围成一圈按照特定规则点数做游戏的问题，贴近学生生活，极具趣味性，易于学生理解和接受，该用法属于顺应式。在最后的拓展环节，教师介绍了数列与谷神星的发现之间的奥秘，数列竟能帮助天文学家预测出行星的存在，揭示出数列的应用和价值，该用法则属于附加式。“三角形中位线定理”一课利用三角形土地分割问题将中位线概念的产生、中位线性质的发现、中位线性质的证明串在了一起，把知识的历史发展顺序、知识的内在逻辑顺序与学生的认知发展顺序融合到了一起，是重构式运用的体现。

其次，在国外 HPM 教育价值研究的基础上，结合我国数学教育中"四基"、"四能"、"数学核心素养"等目标，总结、提炼出了中国的 HPM 教育价值体系（见图 2）。以初中"三角形内角和"为例，课堂伊始，教师讲述了泰勒斯（Thales, 公元前 6 世纪）到朋友家做客偶然观察到地板上镶嵌的地砖的故事，设计拼图活动，再现泰勒斯当年的探究和发现过程，渗透了从特殊到一般的思想，可见数学史有助于揭示数学知识产生和发展的自然性，体现了知识之谐。学生受拼图的启发，想到了辅助线的不同做法，与毕达哥拉斯（Pythagoras, 公元前 6 世纪）、克莱罗（Clairaut, 1713～1765）、欧几里得（Euclid, 公元前 3 世纪）等数学家以及 19 世纪末美国教科书上的证明不谋而合，历史上这些不同的证明方法体现了方法之美。数学史上的问题为学生提供了探究机会，有助于学生积累数学活动经验、获得成功的体验，体现了探究之乐的教育价值。三角形内角和定理的发现和证明过程揭示了数学与现实世界之间的联系，展现了数学文化的多元性，体现了文化之魅。学生与古代数学家"对话交流"，数学家仿佛成了课堂上一位额外的学生，有助于学生树立起数学学习的自信心，体现了德育之效。又如高中"数系的扩充与复数的引入"一课则体现出了知识之谐、探究之乐、文化之魅、德育之效等教育价值。

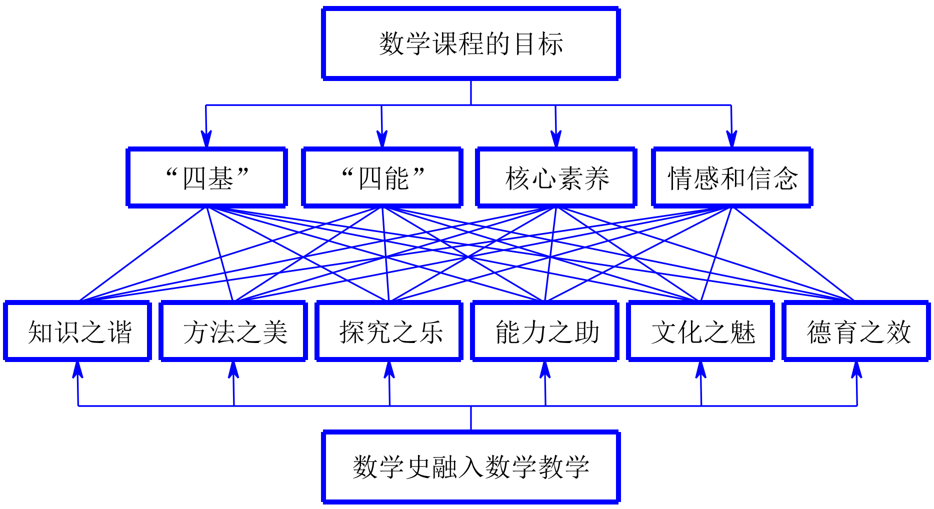


图 2 中国的 HPM 教育价值体系的构建[4]

再次，将 HPM 课例开发与数学教师专业发展的知识、信念、能力三维目标结合在了一起。其中，知识是目前研究的重要方向，可以用美国数学教育家鲍尔（D.L. Ball）提出的 Mathematical Knowledge for Teaching（简称 MKT）来刻画。MKT 指的是"完成数学教学工作所需要的数学知识",其组成成分如图 3 所示。HPM 与 MKT 有着密切的关系，一方面数学史有助于 MKT 的完善，另一方面 MKT 对数学教育中数学史运用的研究有所帮助[5]。汪教授主要对前一个角度进行了论述，比如在高中"函数的概念"一课，教师通过对函数概念历史

的学习，知悉了初中函数“解析式”定义的局限性，了解到了为什么要学习函数的新定义，从而自身的 SCK 得以增长；知悉学生对函数概念的理解具有历史相似性，即学生对函数概念的理解主要停留在“解析式”或“变量依赖关系”层面，这与欧拉早期对函数的认识相一致，有助于教师自身 KCS 的增长；在前两者的基础上，教师将函数概念的历史发展、学生的认知基础、函数知识的逻辑顺序融入到函数概念的教学中，自身的 KCT 有所增长；另外，在这个过程中，教师查阅了函数概念的历史材料，这属于 KCC 的范畴。初中“用字母表示数”一课也在这四个维度上有所体现。

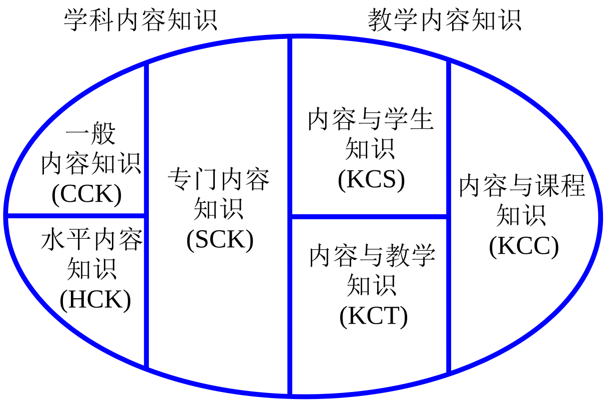


图 3 数学教师 MKT 的结构[6]

最后，汪教授提到经过 10 余年的扎根，形成了基于实践的 HPM 理论框架，该框架可以概括为“一个视角、两座桥梁、三维目标、四种方式、五项原则、六类价值”。其中三维目标是教师专业发展的知识、信念、能力三个方面，四种方式即数学教学中运用数学史的方式，六类价值是课堂中运用数学史对学生而言所体现出的教育价值，这些已在上文中有所介绍，另外，一个视角是指 HPM 的视角，两座桥梁是指数学史架起了数学与人文、历史与现实之间的两座桥梁，五项原则是史料选取的原则，包括趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性，即历史材料必须让学生觉得有趣，最好含有数学故事，而非枯燥无味；必须符合史实，而非随意编造；必须符合学生的生活经验和认知基础，而非艰涩难懂；必须切合教学目标，而非为历史而历史；必须令人耳目一新，而非老调重弹、稀松平常。

3 HPM 的基石：教育取向的数学史研究

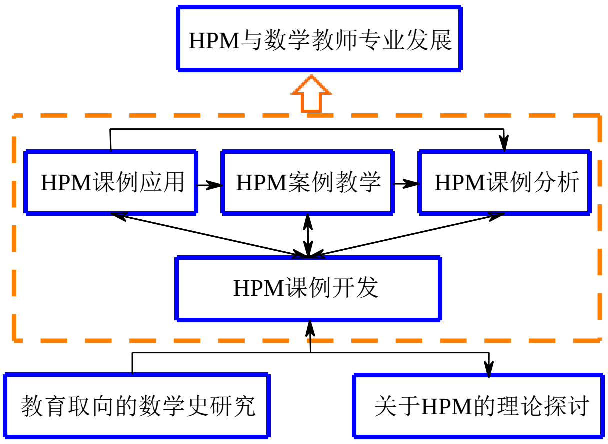


图 4 国内 HPM 研究的主要内容及流程

图 4 呈现了目前国内 HPM 研究的主要内容及其流程，从中可以发现，教育取向的数学史研究在 HPM 领域居于重要的地位。栗小妮老师首先从宏观的角度报告了教育取向数学史研究研究的是什么？途径有哪些？她指出 HPM 视角下的数学史研究不是为历史而历史，而是为教育而历史，其目的是期望通过研究历史上相关知识点（概念、公式、定理等）的演变，获取教学启示，为数学课堂教学提供相关材料，为今日教科书的编写提供借鉴[7]；因此，教育取向的数学史研究为解决 HPM 领域长期存在的“无米之炊”问题带来了方法和启示。教育取向数学史研究的途径主要有两种：一是已有的数学著作，如中国古代的《九章算术》、国外数学史著作《古今数学思想》、《数学史》等；二是对早期教科书的研究，主要是 19、20 世纪以美国为主的西方早期教科书。接着从微观操作的层面，介绍了如何利用上述两种途径对“三角形中位线定理”相关的史料进行教育取向的数学史研究：首先在已有数学著作中搜集可能会对教学活动有所帮助和启示的数学史料，包括古巴比伦泥版上的三角形分割问题，欧几里得《几何原本》中的相关命题，我国数学家刘徽（3 世纪）采用“割补法”得出三角形面积公式的两种推导方法，半底乘以高，及底乘以半高。再从西方早期教科书入手，发现历史上还曾出现过反证法、同一法、平行四边形法等多种方法。总之，数学史为我们打开了一扇大门，让我们无不感叹古人的智慧和创新，让我们不再局限于课本上的“唯一”证法，勇于打破思维定势，培养了学生的创造性思维。

陈莎莎、刘帅宏两位教师从早期教科书这一路径入手，分别对周期函数和全等三角形判定定理的发展进行了研究。前者对 20 世纪中叶以前西方早期教科书中周期函数概念的发展历程进行了梳理，展示了历史上周期函数的不同定义，以期为 HPM 视角下周期函数的概念教学提供借鉴，帮助学生克服对周期函数的认知障碍。后者通过对 1720～1959 年间出版的 92 本美国早期几何教科书的研究和分析，将历史上出现的全等三角形判定定理 SAS、ASA、 SSS 的证明方法进行了总结和阶段划分，发现主要有叠合法、操作法、操作加叠合法、反证法等，增加了课堂上证明方法的多样性。另外可以将历史上出现的 SSA 错误方法作为学习的跳板，帮助学生更深刻地理解 SAS 判定定理。

4 HPM：理论与实践的互动

4.1 HPM 课例开发

尽管国际 HPM 已有四十几年的历史，目前也处于繁荣阶段，但 HPM（包括 HPM 与教师教育）与一般数学教育研究框架、理论构建与方法论之间缺少清晰的联系，因此 HPM 与一般数学教育理论之间的联系还需要进一步加强[8]。中国的 HPM 实践有所不同，因为它以国际上较为认可，且在中国具有 60 多年历史的课例研究（Lesson Study）为载体，成功架起了 HPM 与一般数学教育的桥梁，加之课例研究是一个实践依据、研究导向的专业发展的合作模式，它能够促进教师学习，改善教学与学生学习，有利于课程实施与教学结果的共享，还有利于理论与实践的互动[9]，中国的 HPM 实践也架起了 HPM 与在职教师专业发展的桥梁，这与国际上 HPM 与教师专业发展的主流方式也有所不同，因为国际上主要以课程的形式促进职前教师的专业发展[10]。目前，国内已形成了以 HPM 课例开发为起点，包括 HPM 课例开发、课例应用、案例教学在内的在职教师专业发展体系（如图 4），已有很多中小学数学教师与 HPM 研究团队、教师专业发展指导团队、学校教研团队这三个团队中的一个或几个，在共同体的支持下、以 HPM 理论框架为指导合作进行 HPM 课例研究。

在 HPM 课例展示和研讨环节中，就有部分中小学数学教师分别在高中、初中、小学 3 个专场中分享了合作开发的“数列概念”、“三角函数序言课”、“平行线判定”、“实数概念”、“三角形中位线定理”等 HPM 课例，并与参会者进行了深入的交流。

以上课例都只是针对某一节课进行的融入数学史的尝试，事实上，数学史可以融入更多联系紧密的数学内容中，这就是模块的方法（The modules approaches），包括最小规模的历史包，通常在某一主题下的 2-3 节课中融入数学史；中等规模的模块，也许需要在 10-20 节课中融入数学史；最大规模的是课程，整门课程都融入数学史[11]。任何一块数学内容都不是孤立存在的，数学教学与教科书编写都是根据数学知识的内在逻辑顺序展开的，前后内容具有不可分割的联系，沈中宇老师以此为出发点，聚焦于单元模块教学，以数列、立体几何、解析几何三个单元为例，并以行动研究方法为依托，介绍了为何以及如何将数学史融入单元模块的教学。他从史料应用的连续性、知识发生的自然性和情感渗透的整体性探讨了数学史

融入单元模块教学的教育价值，为数学史料在整个单元中的系统运用、为 HPM 教育价值的深刻展现提供了新的思路。基于单元模块教学的 HPM 行动研究分为计划、行动、反馈、反思四个部分，在立体几何单元教学的计划阶段，通过对 20 世纪中叶以前 97 种西方早期教科书等历史文献的研究，选取出合适的史料，对平面的概念、空间中的线线关系、面面平行的判定、线面垂直的判定这四节课进行初步的教学设计；在行动阶段，首先对高一、高三学生进行调查，通过回收的数据改进教学设计，然后进行教学实践；在反馈阶段，每节课后对全班学生进行后测，对收集到的问卷、访谈结果和课堂录像加以分析，反观教学目标的达成情况；在反思阶段，教师反思教学过程，结合实践中遇到的问题对四节课进行再设计，然后整理编写，形成数学史融入教学的初始材料。为了形成较为完善的 HPM 课例，行动研究的这四个步骤往往需要经过多次循环实施。

4.2 HPM 课例分析

精彩的 HPM 课例的标准是什么？这是 HPM 课例研究的重要基础之一，因为只有运用科学的评价框架对教学设计、课堂教学进行评价，才能指引 HPM 课例开发向着更好的方向发展。沈中宇等基于上述的 HPM 理论框架，从史料的适切性、方式的多元性、融入的自然性、价值的深刻性等方面构建了 HPM 课例的评价框架[12]。结合这一框架，陈莎莎、刘帅宏两位老师分别以高中的“任意角”和小学的“用字母表示数”为例，阐述了 HPM 视角下同课异构的分析框架。

对于 HPM 与非 HPM 的同课异构，可以从新课引入、概念建构、公式探究、新知巩固、课堂小结这五个环节分别进行宏观比较和微观比较。“任意角”的 HPM 课重在概念建构，通过追溯角的历史，演示日晷实验来创造角；非 HPM 课则重在公式探究，通过设问引导来探究角的推广公式。由此总结出 HPM 视角下高中数学概念教学的特点，学生体会学习角的必要性，深刻理解任意角的概念，体现了知识之谐；让学生经历探究的过程，体现了探究之乐；让学生体会数学与天文学、文学、现实的联系，理解数学活动的本质体现了文化之魅；古诗和日晷实验能够激发学生的学习兴趣，树立自信心，体现了德育之效。

对于 HPM 与 HPM 的同课异构，可以从教学目标、重难点及教学流程上进行宏观比较，再从 HPM 课例评析框架的四个维度进行微观比较，从而思考如何完善已有的 HPM 教学设计。在“用字母表示数”的两节 HPM 课中，在史料的适切性方面，A 课选取的是代数发展三阶段的史料，B 课则选取毕达哥拉斯的形数问题并对其进行改编，相比之下 B 课更能凸

显史料的有效性和新颖性。在方式的多元性方面，两课均借助微视频呈现古代数学家和故事，属于附加式。A 课提炼出算数到代数的三阶段，是对历史内容的重构；B 课改编形数问题，探究任意一个的情形，也属于重构。但 B 课将毕达哥拉斯的问题运用到教学中，层层设问，复制式和顺应式的运用更为突出，因此，B 课中数学史的融入较为深入。

5 HPM：研究新进展

5.1 HPM 视角下阅读材料的编写

《普通高中数学课程标准（实验）》指出："数学是人类文化的重要组成部分。数学课程应适当介绍数学的历史、应用和发展趋势……" [13]，2017 年普通高考考试大纲中也增加了对数学文化的要求，因此数学教育工作者应加强对数学文化的重视。以数学史为主题的阅读材料是教科书中传播数学文化的重要途径，但调查发现教师和学生对这部分内容的关注度普遍偏低，这与编写阅读材料的初衷大相径庭，因此阅读材料的编写与使用是一个值得探讨的问题。日本教材开发专家有田和正认为：所谓教材开发，就是指"对那些在学生周围无限存在的素材，通过转换视角、重组内容、改变顺序等方式进行加工，使学生能从中产生问题，激发起探究的热情"。[14]根据这些理论及课程标准的相关要求，结合数学学科的特点，王鑫老师总结出阅读材料编写应遵循的趣味性、可学性、有效性、科学性、人文性五项原则，并利用这些原则分析了现有教材中"三角学与天文学"阅读材料存在的问题，期望通过查阅三角学相关的数学著作，考查三角学的前世今生，来弥补不足之处。她通过系统考察三角学的起源和从弧到角、从全弦到半弦、从线段到比值的发展过程，解决了学习三角学的必要性问题，在明确三角学与对数之间关系的基础上，从中提炼出一些有价值的素材，如托勒密定理与两角和与差的正弦、余弦公式的推导，韦达用倍角公式解 45 次方程问题，还有雷格蒙塔努斯勇担重任、雷提库斯学术传承等故事。

5.2 HPM 序言课与教师专业发展

序言课是数学教育领域中比较新颖的一个研究方向，它的主要任务是揭示数学学科研究的对象、内容和解决问题的思想方法，具有承上启下的作用[15]。在正式学习某一章或某几章内容之前，教师如果能以序言课的方式让学生了解"为何学习？""学习什么？""如何学习？"这些问题，会帮助学生对将要学习的内容有一个宏观认识和整体把握，了解前后章节

的联系，初步构建知识网络，可以有效地激发学生的学习兴趣和探究热情，为后续学习奠定良好的基础。但在实际教学中，一方面教师在思想上不重视序言课的教学，加之课时紧张，常常没有时间安排序言课；另一方面，教师缺乏理论指导和案例教学，不知如何去设计一节精致的序言课，这一课型给教师提出了新的挑战，因为教师要把学生未曾学习但高度相关的很多内容融合到一节课中，且要以学生能够理解和参与的方式组织教学内容、安排教学活动，是一件相当困难的事情。因此，序言课的开展需要教师具有良好的 MKT，特别是 SCK。基于此，齐春燕老师作了题为“基于数学史的高中数学教师专门内容知识的发展——以六节三角函数序言课为例”的报告。她以六节三角函数序言课为依托，通过对课堂观察、半结构式访谈、问卷调查、教案、教师反思等收集的多种数据的分析，研究了六位教师基于数学史的专门内容知识（HSCK）的专业成长。

5.3 HPM 课例应用与 HPM 案例教学

尽管 HPM 课例开发对教师的专业发展促动很大，比如讲授序言课的六位教师在课例开发的过程中，知识、信念都得到了一定的发展，但教师需要投入大量的时间与经历，需要 HPM 研究团队、一线教师和教师专业发展指导者等在课例研讨、课例打磨过程中的共同参与，且单个教师 HPM 课例的开发对 HPM 理念传播的贡献有限。因此，汪晓勤教授的 HPM 团队基于 HPM 课例开发探索了 HPM 理念传播与教师专业发展的另外两种途径：HPM 课例应用与 HPM 案例教学。

HPM 课例应用是对已开发的较为成熟的 HPM 课例的二次利用，教师根据其教学目标及任教班级的实际情况，对课例中的一些环节进行修改和完善，然后用于教学实践。岳增成老师从为何进行 HPM 课例应用出发，以四年级“角的概念”为例，阐述了如何利用已开发的 HPM 课例于二次教学。第一步是研读教科书和教参，对教学目标、重难点进行再定位。第二步是根据教学目标和任教班级的实际情况，研读已开发的 HPM 课例，找出其中的问题，予以完善，并进行试讲。第三步是根据试讲效果，对教学设计进行再修改。第四步是反思课例应用的全过程。由此可见，HPM 课例应用不仅反过来促进了一节更完美的 HPM 课例的生成，而且只要已开发的 HPM 课例一经发表，就会有更多感兴趣的教师将其应用于自己的教学实践中。

HPM 案例教学是传播 HPM 理念、促进教师专业发展的另外一种重要途径。邹佳晨老师聚焦于数学教师的专业发展，以“数系的扩充与复数的引入”为例，详细介绍了如何运用

已开发的 HPM 课例于教师教育课程"数学史与数学教育"，主要包括教材呈现—历史分析—设计研讨—案例展示—评价反馈六个步骤。通过数学史研究，整理出卡丹问题、邦贝利三次方程问题等丰富的素材。并对职前和在职教师进行调查，"如果执教这节课，你会如何进行教学设计？""哪些史料可以用于课堂教学？"已开发的案例中利用卡丹问题和邦贝利三次方程问题来引入虚数，揭示了虚数概念的本源及其产生的必要性。课后学生反馈表明，相比于教科书中 $x^2+1=0$ 的引入而言，这样引入虚数的方式更易于理解和接受，数系的扩充过程更加自然清晰，对虚数概念的理解更加深刻透彻，体现了知识之谐、探究之乐、文化之魅和德育之效。在评价反馈中，展示了职前和在职教师对复数概念的意象，以及复数概念案例教学对本科师范生、全日制硕士、在职教育硕士和在职教师四类群体影响的调查结果。

6 总结与展望

中国大陆的 HPM 经过十余年的发展，已从扎根实践到理论生成，又从理论生成到理论与实践的互动，并出现了新的研究动态；不再仅仅局限于教育取向的数学史研究与 HPM 课例开发，已形成了基于教育取向数学史研究的、共同体支持下的、以 HPM 课例开发为核心的体系，构建了包括课例开发、课例应用、案例教学在内的、特色鲜明的教师专业发展与 HPM 理念传播体系，且以课例研究为载体的课例开发不再局限于单个课例的开发，出现了模块教学、序言课等新类型，阅读材料等传播数学文化的课程素材也受到了一定的关注，课例评价体系的雏形已形成。但总体而言，大陆的 HPM 还处于发展阶段，理论与实践的互动还有待进一步加强，特别是需要借助更多像 MKT、课例研究这样的一般数学教育理论，从而使得 HPM 与一般数学教育的联系更为密切；HPM 与教师专业发展的体系还需要进一步完善，一方面课例开发、课例应用、案例教学方面的研究还需要进一步深化，另一方面，它们之间的最佳组合方式及其最优切入口还需要深入探索；教科书中数学史的研究、包括课堂评价、学生评价等在内的评价框架的构建需要投入更多的精力，因为无论国际上、还是国内这方面的研究都很少，且它们也是加强与一般数学教育联系的关键；最后，认识论与数学史的关系在大陆处于真空状态，需要予以关注。

参考文献

[1] 万家练. 对《数学教育学报》下载频次较高的论文评析——以 2010 年后的载文为例[J].

数学教育学报, 2016, 25(2): 96-102.

[2] 康世刚, 胡桂华. 对我国“数学史与中小学数学教育”研究的现状分析与思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18(5): 65-68.

[3] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京,科学出版社, 2017.

[4] Wang, X., Qi, C., &Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study [J]. *Science & Education*, 2017.

[5] Jankvist, U.T., Moscold, R., Fauskanger, J. & Jakobsen, A. Analysing the use of history of mathematics through MKT[J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(4): 495-507

[6] Ball, D. L. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1990, 21(2):132-144.

[7] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, (01): 16-18.

[8] Jankvist, U.T. An implementation of two historical teaching modules: outcomes and perspectives. In: Barbin E, Kronfellner M, Tzanakis C, editors. History and epistemology in mathematicseducation – Proceedings of the 6th European Summer University. Vienna: Holzhausen Publishing; 2011. p. 139–152.

[9] Huang,R., Shimizu,Y. Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM Mathematics Education*, 2016, 48(4), 393–409.

[10] Barbin, E & Tzanakis,C . History of Mathematics and Education. In Lerman, S. (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Netherlands: Springer, 2014: 255-260.

[11] Jankvist, U.T. A categorization of “whys” and “hows” of using history in mathematics education[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71(3): 235-261.

[12] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (01): 35-41.

[13] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（实验稿）[S]. 北京, 人民教育出版社, 2005: 2.

[14] 沈晓敏. 对话教学的意义和策略[D]. 上海,华东师范大学, 2005.

[15] 范文豪. 高中数学《立体几何》序言课教学的实践与研究[J]. 现代基础教育研究, 2014, 14(02): 148-152

活动信息

HPM 活动简讯

金秋十月，桂花飘香的季节，华东师范大学 HPM 研究团队在上海、义乌、宜兴等地参加了如下学术活动：

◆2017 年 9 月 4 日，在上海市华东师范大学第二附属中学进行 HPM 课例观摩活动。本次观摩课在六年级举行，主题为“从小学数学到初中数学：数学文化的视角”，授课教师为陈慧老师。

本节课从代数和几何两个角度出发，让学生初步感受初中数学与小学数学的差异：从算术到代数的转变和从直观几何到演绎几何的转变。课堂中利用了历史上字母表示数发展的三个阶段以及出入相补原理等、徐光启和利玛窦的故事和尺规作图等素材对两大转变进行了深入浅出的刻画。

（沈中宇 孙丹丹 供稿）

◆2017年9月28日，在上海市华东师范大学附属第四中学进行HPM课例观摩活动。本次观摩课为初一年级的“完全平方公式”，授课教师为李莉老师。

在课堂中，李老师从历史上数学家们对“已知正方形面积，求边长”问题的研究引入，给出学习完全平方公式的必要性，接着让学生从几何和代数角度探究完全平方公式，最后回到引入的问题，并用一段微视频介绍了完全平方公式的历史。

◆2017年10月16日，在上海市武宁中学进行HPM课例观摩活动。本次观摩课为初二年级的“演绎证明”，授课教师为宋万言老师。

在引入环节，宋老师用错觉图形来说明“眼见不一定为实”，接着学生想到测量的方法，但仍有误差，从而引出演绎证明。接着回顾了泰勒斯利用拼图证明三角形内角和定理的方法，让学生进一步探究添加辅助线的多种方法，学生的方法与历史上的方法不谋而合，最后利用微视频介绍了演绎证明的由来和发展。

（王鑫 供稿）

◆2017年10月19日-20日，在浙江省义乌中学开展高中HPM教学研讨活动。本次活动观摩了“点到直线距离公式”和“两角差的余弦公式”两节HPM课例，授课教师分别是楼萍萍老师和金素英老师。

楼老师让学生探究点到直线距离公式的不同证明方法，学生给出了多种多样的方法，这些方法与历史上的多种方法不谋而合。金老师通过问题串让学生从几何角度探究两角差的余弦定理，通过引导，学生最终探究出两种拼法，从而更深入地理解了这一定理。

会后，华东师范大学HPM研究团队与王芳工作室的成员进行了热烈的研讨，举行了华东师范大学“立德树人”学科德育实验学校的授牌仪式，仪式之后，汪晓勤教授与多位义乌中学学生进行了热烈的交流。

（陈晏蓉 丁倩文 供稿）

◆2017年10月26日分别开展了初中和高中两个HPM课例观摩活动。

初中的课例观摩活动在上海市市西中学进行。观摩主题为“平行线的判定1”，授课教师为王进敬老师。王老师从行船遇到礁石的情境引入平行线的概念，接着展示平行符号的发展过程。然后让学生利用概念探究平行线的画法，并将学生的画法与历史上的相对应。之后让学生进一步述说这些画法背后的原理，从而加深对平行线的理解。最后引出平行线与几何原本的联系，利用微视频讲述了背后的历史故事。

高中的课例观摩活动在江苏省宜兴中学进行。观摩主题为“三角学序言课”，本次活动的形式为同课异构，授课教师分别为杨志刚老师和张海强老师。两位老师均从“为什么要学习三角学”、“学习三角学的什么内容”以及“如何学习三角学”三个角度出发，参照三角学的历史发展过程将高中三角学的三大部分联系起来，开展了两节精彩的三角学序言课。课后，汪晓勤教授进行了精彩点评。

（张亚琦 何伟淋 供稿）

◆2017年11月8日在上海市交通大学附属中学进行华东师范大学教师教育学院教育实习观摩展示课暨教育见习活动。这次观摩展示课是一堂HPM视角下的公开研讨课，课题为高二年级的“椭圆的标准方程”，授课教师为教师教育学院研二的孙朔老师。

孙老师利用改进的“旦德林双球模型”引出椭圆的两个焦点及其性质，从而自然地给出椭圆的定义，接着引导学生建立直角坐标系，借鉴“和差术”给出椭圆标准方程的推导，课后，以小视频对圆锥曲线的历史发展过程进行了总结。本次活动给研一学生做了很好的示范。

（马艳荣 供稿）