



【课堂研究·特设专栏: HPM 课例研究(之一)】

编者按: 对 HPM 视角下的数学教学, 教师们日益关注和推崇, 日益乐于学习 HPM 的理论并运用到教学实践中。本期起, 本刊特邀华东师范大学汪晓勤教授的 HPM 课例研究团队开设“HPM 课例研究”专栏, 以推进 HPM 的理论与实践研究, 为数学教学、数学教育的改革和发展发挥积极作用。

基于数学史的初中数学新知引入课例分析

姜浩哲, 汪晓勤

(华东师范大学 教师教育学院, 上海 200062)

【摘要】研究者通过对 2014—2017 年间 10 个初中 HPM (History and Pedagogy of Mathematics 的缩写, 意为数学史与数学教育) 课例进行分析发现, HPM 视角下的新知引入有问题引入、故事引入、演示引入三种类型。大多数 HPM 课例新知引入具备可学性、关联性、有效性和趣味性的特点, 体现了数学同现实生活的紧密联系, 使学生的学习兴趣 and 动机在“知识之谐”中能够得到有效激发。但部分 HPM 课例在引入方式的选择和运用、数学史料的选取和加工上还有待进一步完善和改进。

【关键词】数学史; 新知引入; 初中数学; HPM 课例

一、引言

作为课堂教学的重要环节, 新知引入具有引起学生注意、激发学生动机、构建教学目标、明确学习任务以及建立新旧知识联系等功能^[1], 精妙的新知引入往往有“转轴拨弦三两声, 未成曲调先有情”之效。同时, 新知引入还是一门教学艺术, 能起到预示课堂高潮、引导学生思维等效果^[2]。在我国, 绝大多数数学教学由旧知识引入新知识, 这既符合“温故而知新”的传统教育方式, 也符合现代认知主义理论和建构主义思想。但是, 部分教师在实际课堂中运用“以旧引新”的方式时, 淡化了从旧知识到新知识的发生发展过程, 甚至在简单复习旧知识后直接把新知识告诉学生, 因此达不到理想的教学形态^[3]。

数学史为丰富和拓宽传统教学新知引入的方式提供了一种有效路径。早在 20 世纪初, 美国数

学史家卡约黎 (F. Cajori) 就指出, 数学史是有效的教学工具。美国学者琼斯 (P. S. Jones) 则认为, 数学史能提供新课引入的话题以及帮助学生“发现”新概念或新思想的方法。美国著名数学家和数学史家 M. 克莱因 (M. Kline) 强调, 数学史是教学的指南。英国数学史家福韦尔 (J. Fauvel) 将增强学生的学习动机作为数学教学中运用数学史的重要理由之一。查纳基斯 (Tzanakis) 和阿卡维 (Arcavi) 等学者则相信, 通过数学史, 教师可以确定引入一种新数学知识的动机^[4]。有关数学史教育价值的各家观点都表明, 数学史对于课堂上的新知引入具有重要意义。

鉴于此, 本文对 2014—2017 年间发表的 10 个具有代表性的初中 HPM 课例^[5-14]进行考察和分析, 希望从中总结基于数学史的初中数学新知引入方式的类型和特点, 为初中数学教学以及

【作者简介】姜浩哲, 华东师范大学教师教育学院硕士研究生, 主要从事数学史与数学教育研究; 汪晓勤, 华东师范大学教师教育学院教授、博士生导师, 主要从事数学史与数学教育研究。

【基金项目】上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(D1508)



HPM 课例开发与实践提供参考。

二、新知引入的方式

基于已有的分类方法^{[15]38-44}，结合对初中HPM 课例的具体分析，我们发现，基于数学史的初中数学新知引入有问题引入、故事引入、演示引入三种类型（见表1）。从数学史运用方式来看，问题引入采用了复制式或顺应式，故事引入采用了顺应式或重构式，而演示引入数学史的运用水平最高，全部采用了重构式。

表1 基于数学史的初中数学新知引入方式

类别	具体含义	数学史运用方式
问题引入	呈现数学史上或根据数学史改编的一个或多个具体问题，使学生在解决问题的过程中引入新知	复制式或顺应式
故事引入	将数学史上有关知识的发生背景以故事的形式讲述给学生，并依托数学故事设计相关问题情境以引入新知	顺应式或重构式
演示引入	教师基于数学史设计具有启发性和趣味性的实验活动，引导学生通过实际操作引入新知	重构式

1. 问题引入

课例“字母表示数”^{[5]28-30}以复制式的数学史运用方式，将数学史融入新知引入教学。教师先通过古埃及时期《莱因德纸草书》中的问题，帮助学生回顾字母可以用来表示未知数，再由古希腊数学家丢番图（Diophantus）所著《算术》中的“已知两数的和与差，求这两个数”的问题引入新知。学生会用字母去设所求的两个未知数。然而，两数的和与差虽是已知的，但题中没有给出，这使学生产生了认知冲突，教师继而引导学生进行探究。

课例“一元二次方程的配方法”^{[6]38-42}以复制式的数学史运用方式，将数学史融入新知引入教学。教师通过一组课前练习题帮助学生了解古人运用几何图形进行开平方运算的方法，呈现阿拉伯著名数学家花拉子米（Al-Khwarizmi）所著《代数学》中的问题：一平方与十根等于二十迪

拉姆，求根。问题所涉及的一元二次方程 $x^2 + 10x = 20$ 不易用因式分解法来解。教师进而引导学生探索几何解法，引入“配方”的有关内容。

课例“可化为一元一次方程的分式方程”^{[7]42-46}以顺应式将数学史融入新知引入教学。教师在介绍13世纪意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci）的生平后，出示了斐波那契经商时遇到的问题：两次雇佣工人搬运货物的详细账目分别如表2和表3所示。若两次工人第一天和第二天的人均所得都相等，分别求表格中的 x 和 y 。这道题是根据《计算之书》中的问题改编的，学生能在教师引导下审题，找等量关系，并列方程 $\frac{y}{2} = \frac{y+30}{8}$ 和 $\frac{10}{x} = \frac{40}{x+6}$ ，教师由此要求学生观察、比较问题中的两个方程，引出新课。

表2 第一次雇佣工人搬运货物详细账目

第一次	工人人数 (人)	人均所得 (第纳尔/人)	总金额 (第纳尔)
第一天雇人	2		y
第二天雇人	8		$y+30$

表3 第二次雇佣工人搬运货物详细账目

第二次	工人人数 (人)	人均所得 (第纳尔/人)	总金额 (第纳尔)
第一天雇人	x		10
第二天雇人	$x+6$		40

2. 故事引入

课例“同底数幂的运算”^{[8]39-42}以顺应式将数学史融入新知引入教学。教师由阿基米德（Archimedes）和叙拉古王子盖罗（Gelo）在海边散步时谈论“宇宙沙数”的故事引入：一天，阿基米德和他的朋友叙拉古王子盖罗在海边散步，阿基米德请盖罗猜测脚下的沙滩和整个西西里岛上共有多少粒沙子，盖罗回答有无穷多粒，而阿基米德则详细介绍了自己的大数记数法。根据他的几何证明，若将沙粒看作粟壳那么大，装满整个“宇宙”（以地球为中心，地球和太阳的距离为半径的球）的沙粒数目为不超过6个1万万相乘再乘以1000。教师引导学生用科学记数法表示1万万、1万万个1万万……，并思考6个1万



万相乘再乘以1000究竟有多大,进而引出 $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ 的同底数幂运算公式。

课例“平方差公式”^{[9]43-47}以顺应式将数学史融入新知引入教学。教师选择等周问题,将发生在古希腊的欺骗性土地分配事件改编为庄园主与佃户的故事:从前,一个狡猾的庄园主把一块边长为 a ($a > 5$) m的正方形土地租给佃户张老汉。第二年,庄园主对张老汉说“我把这块地的一边减少5m,相邻的另一边增加5m,继续租给你,租金不变,你也没有吃亏,你看如何?”张老汉一听,觉得好像没有吃亏,就答应了。回到家中,张老汉把这件事和邻居一讲,大家都说“你吃亏了!”由此,教师引导学生比较 a^2 和 $(a+5)(a-5)$ 的大小,判断张老汉是否真的吃亏了,从而引出平方差公式。

课例“平面直角坐标系”^{[10]32-37}以重构式将数学史融入新知引入教学。教师首先讲述了笛卡儿(R. Descartes)发明坐标系的历史故事:一天,笛卡儿因病躺在床上无所事事,于是又想起了那个折磨他很久的问题,即如何将平面上的点和数联系在一起。天花板上,有一只小小的苍蝇慢慢地爬动。笛卡儿想,如果把苍蝇看成一个点,那么该怎么用数来表示苍蝇的位置呢?然后,教师根据故事中的情境设计了以下问题串。

问题1:如果这只苍蝇向右爬了5cm,怎么用数来表示它的位置?如果向右爬了3cm呢?

问题2:如果这只苍蝇向左爬了5cm,怎么用数来表示它的位置?如果向左爬了3cm呢?

问题3:如果这只苍蝇向上爬了5cm,怎么用数来表示它的位置?如果向下爬了3cm呢?

问题4:如果这只苍蝇先向右爬3cm,再向上爬5cm,那么怎样表示它的位置?

课例“反比例函数”^{[12]41-47}以重构式将数学史融入新知引入教学。教师首先将我国古代的劝善书《太上感应篇》中记载的故事引入:明朝万历年间,扬州有一家大南货店,店主在临死时告诉儿子,他的一杆秤乃乌木合成,中间空的地方藏有水银,称出时,将水银倒在秤头,称入时,将水银倒在秤尾,从而造成“入重出轻”现象。

接着,教师向学生展示杆秤实物并介绍使用原理,然后出示与杆秤有同样原理的天平模型。如图1所示,点 O 相当于提钮所在的位置,点 A 相当于秤盘所在的位置, B 处所挂重物相当于秤砣。这一模型上的四个量可以分别设 $AO = a$ cm, $BO = b$ cm, A 处挂的物体重 mg , B 处挂的物体重 ng 。最后,教师通过演示实验引导学生探究“ a 、 n 不变时, b 、 m 有怎样的关系”和“ a 、 m 不变时, b 、 n 有怎样的关系”两个问题,引出反比例函数。

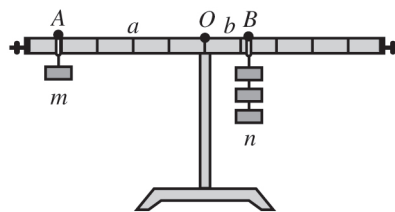


图1 天平模型

3. 演示引入

课例“实数的概念”^{[12]41-47}以重构式将数学史融入新知引入教学。教师根据古希腊毕达哥拉斯学派发现不可公度量的历史,设计了折纸和拼图的教学活动。教师首先提出“如何求一张A4纸长与宽的比”的问题,接着要求学生进行如图2所示的折纸操作,指出折痕 AE (即正方形 $ABEF$ 的对角线)和A4纸的长 AD 相等,进而提出“若 AB 长为1,则 AE 长为多少”的问题,并引导学生通过多种方法将两个边长为1的正方形拼成一个以它们的对角线为边长的大正方形。最后,教师指导学生运用二分法估算面积为2的大正方形的边长,自然引出了无理数的概念。

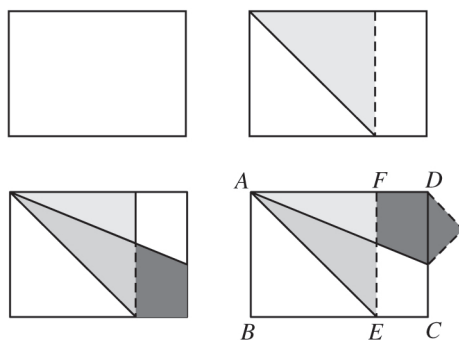


图2 寻找与A4纸的长相等的线段



课例“平行线的判定”^{[13]34-40}以重构式将数学史融入新知引入教学。教师以《墨经》《数理精蕴》《几何原本》中对平行线的判定(定义)方式为切入点,引导学生进行从“用距离刻画平行”到“用角刻画平行”的探究。在教师的提示和启发下,学生首先联想到用两条直线之间的距离相等来刻画平行,接着发现可以先画已知直线 a 的垂线,再画垂线的垂线 b ,得到 $b \parallel a$,而后进一步探索发现了用三角尺的直角沿直尺上推得到两条平行直线,最后有学生发现能运用三角尺其余任意某个角和直尺推得平行直线。教师随即演示了这一过程(如图3),自然引出了平行线的判定方法和基本性质。

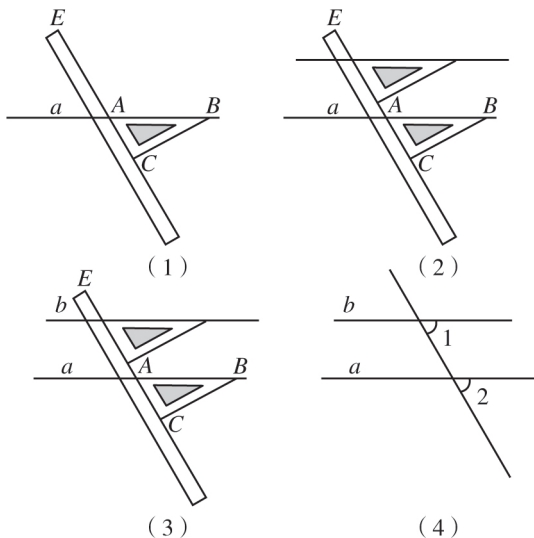


图3 运用三角尺其余任意某个角和直尺推得平行直线

课例“三角形内角和”^{[14]40-44}以重构式将数学史融入新知引入教学。教师基于三角形内角和的历史,引导学生开展泰勒斯(Thales)当年探究和发现三角形内角和定理的拼图实验:分别将6个同样的等腰三角形围绕一个共同顶点无缝且不重叠地拼接在一起(如图4),可以发现具有共同顶点的6个角的和为 360° ,而在这6个角中,三角形的3个内角 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 各出现两次,故知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$;利用6个同样的不等边三角形重复上述实验(如图5),可以得到相同结论。

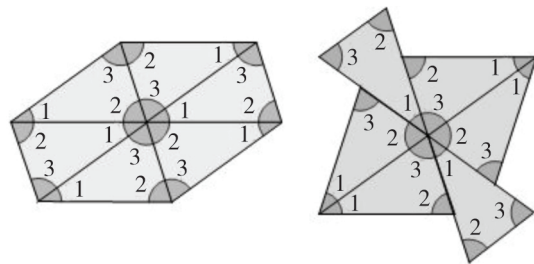


图4 利用6个同样的等腰三角形进行拼图实验

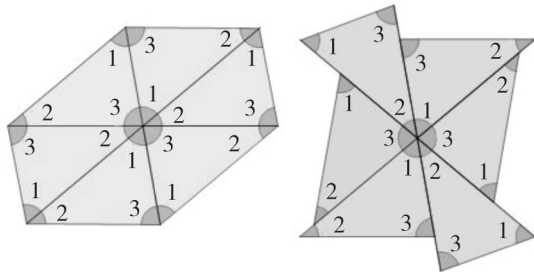


图5 利用6个同样的不等边三角形进行拼图实验

三、基于数学史的新知引入特点

根据M. 克莱因提出的四个数学课程原理(兴趣、动机、直观、文化)和波利亚(G. Pólya)的三个数学教学原理(最佳动机、主动学习、循序渐进),理想的新知引入方式被认为至少应具备以下特征^{[3]43-46}。

- ① 可学性,即引入建立在学生已有知识基础之上,易于学生理解;
- ② 有效性,即引入能够有效地揭示新知学习的必要性,激发学生的学习动机;
- ③ 关联性,即引入能为后面的相关知识服务;
- ④ 趣味性,即引入能够激发学生学习新知的兴趣。

基于上述特征,我们依次对初中阶段HPM课例引入的特点进行分析。

“字母表示数”是沪教版七年级数学第一学期的内容。教科书通过列举四个实例说明了用字母可以表示数。HPM课例中,教师则通过两个经典的历史问题,在学生“字母能表示未知数”的认知基础之上引入“字母能表示任意数”,体现了可学性、关联性。学生在情境问题中对于如何处理已知数无从下手,教师以此引发学生的认知冲突,引出新课探究,体现了有效性。但是,该



课例在趣味性的体现上还略显不足。

“同底数幂的运算”是沪教版七年级数学第一学期的内容。教科书在要求学生观察 $3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^6 = 3^{2+4}$ 的计算过程后指出：两个同底数幂 3^2 、 3^4 相乘的结果是底数 3 不变，指数 6 等于 2 与 4 相加，并由此引出同底数幂相乘的法则。HPM 课例由阿基米德数沙子的故事引入，学生感受到了用科学记数法表示大数的复杂和困难。教师由此开始讲解同底数幂相乘的有关内容，体现了关联性、有效性和趣味性的特点。

“平方差公式”是沪教版七年级数学第一学期的内容。教科书分别通过代数和几何两种方法引导学生推导平方差公式。HPM 课例则由根据历史改编的庄园主与佃户的故事引入，通过引导学生比较边长变化前后的土地面积引出平方差公式，有效激发了学生的学习动机，体现了可学性、关联性、有效性和趣味性的特点。

“可化为一元一次方程的分式方程”是沪教版七年级数学第一学期的内容。教科书以全国第五次铁路提速为背景作为问题引入，引导学生根据题意列出分式方程后，去掉方程中分式的分母转化为一元一次方程求解。HPM 课例则通过改编《计算之书》中的问题，引导学生分别列出整式方程和分式方程，并在观察和比较中引出分式方程的特点。相较教科书，在 HPM 课例中，教师以图文并茂的形式展现了斐波那契的生平，且为问题增加了斐波那契早年随父亲经商的故事背景，因而更具趣味性。

“实数的概念”是沪教版七年级数学第二学期的内容。教科书通过演示“将两个边长为 1 的小正方形沿一条对角线剪开后拼成面积为 2 的大正方形”这一过程来说明 $\sqrt{2}$ 的存在。从历史上看，毕达哥拉斯学派是在“万物皆数”的理念指导下研究正方形对角线与边长之比的。而在课堂上将两个小正方形拼成一个大正方形，对学生而言是缺乏动机的。相比较而言，A4 纸比较常见，教师通过 A4 纸的长、宽之比问题引导学生进行折纸活动，使正方形的构造变得更加自然。由此

可见，HPM 课例的引入过程体现了关联性、有效性和趣味性的特点。

“平行线的判定”是沪教版七年级数学第二学期的内容。教科书从实验几何的角度，引导学生进行平推三角尺的操作实践，得到“同位角相等，两直线平行”的判定方法，再要求学生操作实践得到平行线的基本性质。HPM 课例则基于历史相似性，引导学生经历从“用距离刻画平行”到“用角刻画平行”的探究过程，体现了可学性、关联性和趣味性的特点。

“平面直角坐标系”是沪教版数学七年级第二学期的内容。教科书由“对号入座”问题引入。在 HPM 课例中，教师巧妙地将问题串与数学故事相结合，引导学生一步步走出一维世界，认识二维平面，既充分考虑了学生的认知基础，又揭示了用“实数对”表示平面内点的必要性，整个引入过程具备可学性、关联性、有效性和趣味性的特点。

“三角形内角和”是沪教版七年级数学第二学期的内容。教科书通过演示从一块三角形纸板裁下三个角并拼在一起的实验，引导学生猜想三角形的三个内角和等于 180° 。在 HPM 课例中，教师首先介绍了泰勒斯铺设地砖时的发现，然后基于学生“周角等于 360° ”的认知基础，引导学生开展泰勒斯的拼图实验引入新知，体现了可学性、关联性、有效性和趣味性的特点。

“一元二次方程的配方法”是沪教版八年级数学第一学期的内容。教科书在要求学生观察 $x^2 + 8x$ 和 $(x+4)^2$ 的展开式后直接介绍了运用配方法求解方程 $x^2 + 8x = 0$ 。但是，方程 $x^2 + 8x = 0$ 也可以直接通过因式分解法求解，教科书的引入无法体现新知学习的必要性。HPM 课例则对历史进行了重构，在学生从代数和几何的角度理解“直接开平方法”的基础上，通过呈现花拉子米《代数学》中的一道因式分解法不易解决的方程问题，引导学生将几何意义上的“将长方形割补成正方形”与代数意义上的“配方”联系起来，体现了可学性、关联性、有效性和趣味性的特点。

“反比例函数”是沪教版八年级数学第一学



期的内容。教科书通过引导学生探究面积固定的长方形长与宽的相互关系引入反比例函数。HPM课例则根据杆秤的故事创设教学情境,通过实验演示使学生经历了从正反比例到正反比例函数的历史过程,具备可学性、关联性、有效性和趣味性的特点。

表4对初中阶段各课例中新知引入的基本特征进行了总结。大多数HPM课例新知引入具备可学性、关联性、有效性和趣味性的特点。与高中HPM课例新知引入的特点相比^{[15]38-44},初中阶段教师更注重激发学生的学习动机和兴趣,使学生获得积极的情感体验,因而在引入的趣味性上更胜一筹。

表4 初中阶段各HPM课例的新知引入特点

课题	新知引入类型	可学性	关联性	有效性	趣味性
字母表示数	问题引入	√	√	√	/
可化为一元一次方程的分式方程	问题引入	√	√	√	√
一元二次方程的配方法	问题引入	√	√	√	√
同底数幂的运算	故事引入	√	√	√	√
平方差公式	故事引入	√	√	√	√
平面直角坐标系	故事引入	√	√	√	√
反比例函数	故事引入	√	√	√	√
实数的概念	演示引入	/	√	√	√
平行线的判定	演示引入	√	√	/	√
三角形内角和	演示引入	√	√	√	√

四、结语

综上所述,在我们所考察的10个HPM课例中,新知引入的方式有问题引入、故事引入、演示引入三种类型。在现行的教科书中,数学知识往往是按照特定的逻辑体系来编排的,学生往往不知道为何要学习某个知识点;而一个知识点的历史却揭示了知识发生和发展的动因,这种动因往往又与问题解决息息相关。因此,历史上导致知识发生发展的数学问题就成了引入新知的理想材料。数学史融入初中数学教学的重要目标之一是让数学课堂更具人性化,当我们关注知识的源

流时,往往会涉及数学人物和事件。因此,考虑到初中生的年龄特点,数学故事自然受到教师的喜爱;而从人物故事中引出数学问题,则是引入新知比较理想的方式。在将数学史融入初中数学教学时,教师需要追溯所教知识的起源,而古人的“做数学”的方式往往与今天不同。实际上,返璞归真是“知识之谐”的要求。教师为了再现古人“做数学”的过程,会让学生通过动手操作和演示获得初步的发现,这便是演示引入的方法。

当然,部分HPM课例的引入未能兼顾四种特点,因而在引入方式的选择和运用、数学史料的选取和加工上还有待进一步完善和改进。但是,数学史为一线教师引入新知提供了丰富的素材,基于数学史的课堂引入能大大拓宽传统教学“以旧引新”的方式,使新知识自然而然地“流淌”出来,而非灌输和强加于学生,这印证了引言中相关学者的论断和观点。同时,HPM课例的新知引入环节设计也对今后教科书的修订和编写具有一定的参考价值。

参考文献:

- [1] 侯秋燕. 高中数学课堂导入策略的研究 [D]. 长春: 东北师范大学, 2009.
- [2] 李如密. 教学艺术论 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2011.
- [3] 涂荣豹, 宋晓平. 中国数学教学的若干特点 [J]. 课程·教材·教法, 2006 (2): 43-46.
- [4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育 [M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [5] 孙洲. HPM 视角下的“字母表示数”教学 [J]. 数学教学, 2017 (6): 28-30, 46.
- [6] 沈志兴, 洪燕君. 一元二次方程的配方法: 用历史体现联系 [J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2015 (10): 38-42.
- [7] 洪燕君, 顾海萍. 可化为一元一次方程的分式方程: 按五项原则融入数学史 [J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2015 (1): 42-46.
- [8] 齐春燕, 顾海萍. 同底数幂的运算: 以重构和顺应的方式融入数学史 [J]. 教育研究与评论 (中学教育教学), 2015 (3): 39-42.

(下转第20页)



到,数学家证明线面垂直的方法是错误的,让他了解到数学的另一面,相信自己能够正确对待学习中出现的错误,树立数学学习的自信心。

五、结语

在本节课中,教师引导学生运用对称法证明线面垂直判定定理,又通过微视频,向学生展示了勒让德的证明方法,利用数学史揭示了“方法之美”。追溯线面垂直判定定理的历史,让学生了解不同时空数学家的贡献,突显人文元素,展现了“文化之魅”。历史上的证明方法有助于培养学生的逻辑推理、直观想象素养,达成了“能力之助”。教师引导学生证明定理,穿越时空与数学家对话,让学生树立数学学习的自信心;再现数学家的错误,让学生正确认识数学研究作为一种文化活动的本质,改变他们对于数学课本知识一成不变的刻板印象。数学家不断探求定理的新证明,让学生感悟数学背后的人文精神。对中国古代数学的介绍,激发了学生的民族自豪感,数学史彰显了“德育之效”。

考虑到教学内容,为了能够完全达成教学任务,本节课的定理证明环节基本上按照预设展开,教师没有给予学生更多的探究机会和思考空间,从而未能完全实现数学史的“探究之乐”这一教育价值。探究活动的设置与教学任务之间的平衡,正是未来 HPM 视角下的数学教学需要解决的重要问题之一。

(上接第14页)

[9] 李玲,顾海萍. 平方差公式:以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2014(11):43-47.

[10] 岳秋,张德荣. 平面直角坐标系:利用历史故事,实现维度跨越[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2016(11):32-37.

[11] 王进敬,栗小妮. 反比例函数:实验重构数学史,故事凸显价值观[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(6):36-41.

参考文献:

[1] 郭佩华,陈光立. 关注概念生成,发展学生思维:“直线与平面垂直”的教学设计与反思[J]. 中学数学月刊,2014(6):29-31

[2] 郭虹宾. “直线与平面垂直的判定”的教学难点及教学设计[J]. 数学教学通讯,2013(11):9-11

[3] 龚楚翘. “直线与平面垂直的判定”课堂实录[J]. 中学数学教学参考,2016(22):9-12.

[4] 方志平. “直线与平面垂直的判定”教学设计[J]. 中小学数学(高中版),2014(10):31-34

[5] 蒋明建. 谈新课程中面面平行、线面垂直判定定理教学的困惑与思考[J]. 中小学数学(高中版),2013(3):14-16.

[6] 宫前长. “厘清”思路抓本质,“讲究”逻辑炼能力:新课程“线面垂直”一课的教学思考及感悟[J]. 中学数学,2016(5):13-17.

[7] 费丽靓,杨光伟. 线面垂直判定的实验教学[J]. 数学教学研究,2011(3):63-65.

[8] 蒋秀梅,黄海生. 感知探究重过程,明义辨析扬理性:“直线与平面垂直的判定”教学与反思[J]. 中小学数学(高中版),2018(3):34-38.

[9] 许金松. 探索发现创新[J]. 数学教学通讯,2001(6):18-19.

[10] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社,2017.

[11] 沈中宇,汪晓勤. 20世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊,2017(1):44-47.

[12] 宋万言,栗小妮. 实数的概念:折纸、拼图中发现,计算、比较中建构[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(8):41-47.

[13] 牟金保,孙洲. 平行线的判定:基于相似性,重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2017(5):34-40.

[14] 唐秋飞. 三角形内角和:在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2015(7):40-44.

[15] 陈晏蓉,汪晓勤. 基于数学史的新知引入课例分析[J]. 上海课程教学研究,2018(1):38-44.