# 19 世纪中叶以前的函数解析式定义*

汪晓勤

（华东师范大学数学系　200241）

早在 20 世纪 60 年代，我国数学史家杜石然先生撰文介绍函数概念历经六次扩张的过程[1]；70 年代，前苏联数学史优什凯维奇（A. P. Youschkevitch）对 19 世纪以前函数概念的演进过程做了更为深入的研究[2]. 现行人教版高中数学教材在“函数及其表示”一节之后，附加了一篇阅读材料——“函数概念的历史”，简要介绍函数概念的历史以及传入中国的情形. 然而，函数概念的演进过程并不是线性的或演绎式的，一个新定义的诞生并非意味着旧定义的废弃. 在已有相关研究文献中，我们很少能看到这一事实. 出于高中数学教材修订工作的需要，笔者对 1855 年以前的 45 种西方数学文献进行考察和分析，试图回答以下问题：欧拉的两种函数定义有着怎样的影响？不同函数定义并存的情况下，“解析式”定义占据何种地位？函数定义的演进过程有何规律？中文“函数”之名何以产生？

## 1　关于函数概念的早期历史

关于函数概念的早期历史，18－19 世纪的少数数学家先后有过扼要介绍. 法国数学家达朗贝尔（J. R. D’Alembert，1717～1783）在狄德罗（D. Diderot，1713～1784）主编的《大百科全书》（1757）第 7 卷中定义函数如下：

“古代几何学家，更确切地说是古代分析学家，将任一量 $x$ 的不同次幂称为 $x$ 的函数；但我们今天将由任意多项组成的代数量称为 $x$（或一般地说，任一个量）的函数，其中，$x$ 以任意方式与一些常量组合在一起，或不组合在一起. 如 $x^2+x^3$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+x^3}{b^2+x^4}}$，$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ 等等，都是 x 的函数. ”[3]

类似地，拉格朗日（J. L. Lagrange，1736～1813）在《解析函数论》（1797）开篇中也说：

“‘函数’这个词被早期分析学家们用来一般性地表示同一个量的幂. 后来，人们将该词的涵义拓广为‘由一个量以任意方式构成的量’. 莱布尼茨和伯努利兄弟最早采用了这一般的涵义，今天，人们普遍采用了这一涵义. ”[4]

在 1806 年出版的《函数微积分教程》中，拉格朗日重复上面的说法，并提及欧拉的新定义：

“早期分析学家们使用‘函数’一词，只是表示同一个量的不同次幂. 后来，其涵义拓广为由一个量以任意方式构成的量；而现在则一般用来表示一个量的值按照给定法则依赖于一个或多个其他给定的量. ”[5]

无独有偶，法国数学家拉克洛瓦（S. F. Lacroix，1765～1843）在《微积分专论》（1797）的引言中也写道：

“古代分析学家一般将一个量的所有次幂称为这个量的函数. 后来，人们拓广了这个词的涵义，将其应用到各种不同代数运算的结果上去，将以任意方式包含一个或几个量的和、积、商、幂、方根的代数式称为这个或这些量的函数. 最终，分析学的进步所带来的新思想导致以下定义的诞生：若一个量的值依赖于另一个或几个量，则前一个量称为后一个或几个量的函数，无论我们知不知道后一个或几个量是通过什么运算得到前一个量的. 例如，一个五次方程的根，虽然现阶段代数学上我们并不知道其表达式，但仍然是方程诸系数的函数，因为它的值依赖于这些系数的值. ”[6]

* 人民教育出版社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一.

19 世纪法国数学家库诺(A. A. Cournot, 1801～1877)在其《函数论与微积分》中更为详细地回溯了函数概念的历史[7]. 库诺告诉我们:早期分析学家将相同因子的乘积称为"幂"、高次数(dignitas)或"函数";前两个名词的涵义保持不变,但由于数学的发展,"函数"一词的涵义被大大拓广了;约翰·伯努利最早将"$x$ 的函数"从 $x^n$ 拓广到用代数符号来表达的与 $x$ 相关的所有的量 $y$;例如,$y=a+(b-x)^n$,$y=\frac{x^3-mx+n}{\sqrt{1+x^4}}$,$y=\frac{1}{x}\log(1+x)$ 等等与 $x^n$ 一样都是 $x$ 的函数. 库诺还分析了函数概念与解析几何思想的密切联系.

从达朗贝尔、拉格朗日、拉克洛瓦和库诺的叙述中,我们可以清晰地勾勒出函数的早期演变过程:一开始,$x$ 的函数仅指 $x$ 的幂;接着,其涵义被拓广为含 $x$ 的代数式;之后,又从代数式拓广到含 $x$ 的任意解析式;最后,从任意解析式拓广为依赖于 $x$ 或由 $x$ 所确定的任意变量. 同时,一元函数又被拓广到了多元函数.

## 2 从伯努利到欧拉

德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646 ～ 1716)在写于 1673 年的手稿《反切线或函数方法》中,创用"functio"(英文 function)一词来表示具有特殊作用的某个几何量,如一个图形中的线段. 1694 年,莱布尼茨在《博学者杂志》上发表"微分新法"一文[8],文中进一步用"functio"来表示与曲线相关的几何量 —— 横坐标、纵坐标、切线长、次切线长等. 正是这些几何量与相应点的横坐标之间的关系导致"函数"演变成了"幂",并进而演变为解析式.

1694 年,瑞士数学家约翰·伯努利(J. Bernoulli, 1667 ～ 1748)在给莱布尼茨的信中,提到"由不定的量和常量所构成的某个量"[9],但并未明确使用"functio"一词;而在 1698 年写给莱布尼茨的信中,明确将等周图形的面积看作"以坐标 $PZ$ 来表示的函数"[10]. 到了 1718 年,约翰·伯努利首次明确提出函数的新定义:"一个变量的函数是由该变量和一些常数以任何方式组成的量."[11] 伯努利的定义可能仅仅局限于代数式.

在约翰·伯努利定义的基础上,欧拉(L. Euler, 1707 ～ 1783)在《无穷分析引论》(1748)中首次用"解析式"来定义函数:

"一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式. 因此,如果在每一个解析式中,除了 $z$ 以外,其他所有的量均为常量,则该解析式就是 $z$ 的一个函数. 例如,$a+3z$,$az-4z^2$,$az+b\sqrt{a^2-z^2}$,$c^z$ 等等,都是 $z$ 的函数."[12]

欧拉此时已经明确突破了代数式的局限,一方面区分了代数函数(包括有理函数和无理函数)和超越函数,另一方面还区分了显函数和隐函数.

到了 1755 年,欧拉在《微分基础》更新了函数的定义:

"如果某些量依赖于另一些量,当后面这些量变化时,前面这些变量也随之变化,则前面的量称为后面的量的函数. 该定义适用范围很广,包含了一个量由其他量确定的所有方式. 因此,若 $x$ 表示变量,其他所有以任意方式依赖于 $x$ 或由 $x$ 确定的量均称为 $x$ 的函数. 例如,$x^2$,或 $x$ 的其他任意次幂,或由这些幂以任意方式组成的量,甚至是超越量,一般地,随 $x$ 的增减而变化的任意量,都是 $x$ 的函数."[13]

欧拉的"解析式"定义和"依赖关系"定义对后世产生了深远的影响,直到 19 世纪中叶,它们一直是函数定义的蓝本.

## 3 百科全书中的函数定义

1779 年出版的英国《钱伯斯百科全书》中沿用了欧拉的函数定义:"Function 这一术语在代数上用来表示由一个变量和一些数或常量以任意方式组成的代数式."这很可能是作为数学术语的"Function"一词在英文世界里的首次出现.

1805 年出版的美国《里斯百科全书》给出的函数定义是:"任何量 $x$ 的函数是任一由 $x$ 和其他具有不变值的量混合而成的代数计算表达式,如 $\frac{1}{1+x}$,$1+x^2$,$(1+x)^{\frac{1}{2}}$,$(1+bx)^m\log x$ 等等,都是 $x$ 的函数."[14]

1810 年出版的第四版《大英百科全书》新增了"函数"辞条:"函数是分析中所用的一个术语,指的是一个字母或量与其他量或数任意复合而成的代数式,这个代数式被称为该字母或量的函数. 例如:$a-4x$,$ax+3x^2$,$2x-a\sqrt{a^2-x^2}$,$x^c$,$c^x$ 都是量 $x$ 的函数."[15] 该辞条的作者应该是苏格兰数学家华里司(W. Wallace, 1768 ～ 1843),因为

1797 年出版的第三版中并不含数学上的“函数”辞条，而第四版的长篇数学辞条“代数”、“圆锥曲线”、“流数”、“几何”、“对数”、“测量”、“级数”、“三角”均为华里司所撰写. 在“流数”篇中，华里司给出函数的解析式定义如下：

“包含一个变量以及其他常量的任一计算表达式叫做该变量的一个函数. 设 $x$ 为变量，其他量为常量，则 $ax^n$，$\frac{a+bx^m}{cx^n+dx^p}$，$a^x$，$\log x$，$\cos x$，$\sin x$ 等等都是 $x$ 的函数. 在任一诸如 $y=ax+bx+bx^2+cx^3$ 这样的方程中，量 $y$ 被称为 $x$ 的一个函数. 若变量 $x$ 和 $y$ 未能分离开来，而是按方程 $ax^2y+bxy^2+y^3=0$ 所示的方式彼此相关联，不考虑常量，因 $y$ 的值依赖于 $x$ 的值，反之 $x$ 的值依赖于 $y$ 的值，则亦称量 $y$ 为 $x$ 的函数，反之，$x$ 为 $y$ 的函数. ”[16]

在给《大英百科全书》撰稿之后，华里司又为《爱丁堡百科全书》撰写了“算术”、“代数”、“几何”、“圆锥曲线”、“机会”、“函数”、“流数”、“虚数”、“对数”、“轨迹”等数学辞条. 在“函数”篇中，华里司给出了欧拉的解析式定义：“函数是由一个或几个量以任意方式所构成的计算表达式，它的值依赖于这些量. 例如，若 $x$ 表示变量，$a$、$b$、$c$、$d$ 表示常量，则 $\frac{ax^3+b}{cx+d}$ 即为 $x$ 的一个函数. ‘函数’一词最早由约翰 · 伯努利引进分析之中. ”[17] 而在“流数”篇中，华里司又给出了欧拉的“依赖关系”定义：

“一个量以任一方式依赖于另一个量，随所依赖的量的变化而变化，则这个量称为另一个量的函数. 若 $y=ax^2+bx+c$，或 $y=\sqrt{a^2+bx}$，或 $y=a^x$，则称 $y$ 为 $x$ 的函数. …… 即使一个量并非直接用另一个量表示，甚至表示的方式未知，但只要一个量依赖于另一个量，则前一个量就可以看成后一个量的函数. 例如，在方程 $x^3+y^3=3axy$ 中，$y$ 可看成 $x$ 的一个函数；反之，$x$ 也可看成 $y$ 的函数，因为通过解三次方程，其中一个可以用另一个来表示. 此外，一个五次方程的根可看作其系数的函数，因为它们完全依赖于这些系数，尽管每一个根的表示方式是未知的. ”[18]

英国数学家胡顿(C. Hutton，1737 ～ 1823)在其《数学与哲学辞典》(1814)中完全照搬了第四版《大英百科全书》中的解析式定义. [19]

英国数学家德摩根(A. de Morgan，1806 ～ 1871)在为《便士百科全书》所撰写的“函数”辞条中，给出欧拉的解析式定义：“一个量的函数指的是任一代数式，或用代数或非代数表达的另一个量，它的值依赖于第一个量. 例如，圆周长是半径的函数，$(a^2-x^2)(b^2+y^2)$ 是 $a$，$b$，$x$ 和 $y$ 函数. ”[20]

直到 1838 年，法国数学家蒙特费里埃(A. — S. de Montferrier，1792 ～ 1863)主编的《纯粹与应用数学科学辞典》仍然采用欧拉的解析式定义：“一般地，我们将由一个或几个变量与常量以任意方式组成的代数式称为这个或这些变量的函数. 若 $x$，$y$ 等表示变量，$a$，$b$，$c$ 等表示常量，则 $ax$，$ax^2+b$，$\sqrt{ax+b+c^2}$，$(ax+b)^2+cx$，$\frac{a}{b}x^m+cx^n$ 等等均为 $x$ 的函数，$ax+y$，$\sqrt{x^2+y^2}$，$\sqrt{ax-y^2}+by$ 等等均为 $x$ 和 $y$ 的函数. ”[21]

可见，在我们所考察的 1757 — 1838 年间的欧美百科全书(包括狄德罗的《大百科全书》)或数学辞典中，函数的解析式定义占有绝对统治地位. 需要指出的是，虽然欧拉已经定义了代数函数和超越函数，但各百科全书的多数作者并没有相应地区分“代数式”和“超越式”，而是将“代数式”与一般“解析式”混为一谈. 在他们看来，$a^x$ 也是个代数式. 只有德摩根对两者进行了严格区分. 在出版于 1837 年的《代数学》中，德摩根将我们今天所称的代数函数称为“普通代数函数”，其他函数(虽然也是代数函数)均为超越函数.

## 4 微积分著作中的函数定义

虽然伯努利于 1718 年、欧拉于 1748 年分别给出了函数的定义，但早期的微积分著作，如居桑(J. A. J. Cousin，1739 ～ 1800)的《微积分》(1796)，并没有给出明确的函数定义. 法国数学家拉克洛瓦(S. F. Lacroix，1765 ～ 1843)和拉格朗日(J. L. Lagrange，1736 ～ 1813)是最早在微积分著作中明确给出函数定义的数学家，而他们之后的作者普遍把函数作为微积分中最基本的概念了. 表 1 给出了 1797 — 1852 年间出版的 30 种微积分著作中的函数定义.

表 1　欧美部分微积分著作(1797－1855)中的函数定义

| 作者 | 书名 | 函数定义 | 年份 |
| --- | --- | --- | --- |
| 拉克洛瓦 | 《微积分专论》 | 若一个量的值依赖于另一个或几个量,则前一个量称为后一个或几个量的函数,无论我们知不知道后一个或几个量是通过什么运算得到前一个量的.[6] | 1797 |
| 拉格朗日 | 《解析函数论》 | 所谓一个或几个量的函数,是指任意一个计算表达式,这些量以任意方式出现于表达式中,与其他一些具有给定不变值的量或组合或不组合,而函数的量可以取所有可能的值.[4] | 1797 |
| 拉格朗日 | 《函数微积分教程》 | 同上.[5] | 1806 |
| 波素 | 《微积分专论》 | 一个或多个变量以任意方式与常量所构成的解析式一般称为变量的函数.[22] | 1799 |
| 加尼埃 | 《微分讲义》 | 包含变量和常量的任意形式的解析式称为变量的函数.[23] | 1811 |
| 布沙拉 | 《微积分初论》 | 若一个变量等于由另一个变量所构成的某个解析式,则称第一个变量为第二个变量的函数.[24] | 1820 |
| 柯西 | 《分析教程》 | 当变量之间以这样的方式相关联,即给定其中一个变量的值,就可以确定所有其他变量的值,人们通常想像各个量是用其中一个来表示的,此时,这个量称为自变量;而用自变量来表示的其他量就称为该变量的函数.[25] | 1821 |
| 拉德纳 | 《微积分基础》 | 两个变量相关联,若任给其中一个变量一个特殊值,就能确定另一个变量的相应值,则称其中一个变量为另一变量的函数.[26] | 1825 |
| 鲁贝 | 《微积分专论》 | 变量和常量的组合称为函数.[27] | 1825 |
| 吕安 | 《微积分》 | 不论是否与常量组合,一个或多个变量以任意方式构成的解析式称为这个或这些变量的函数.[28] | 1828 |
| 鲍威尔 | 《微积分原理》 | 给定一个变量的代数式,若其中含有该变量的任意次幂,或该变量通过任意运算与常量组合在一起,代数式的值仅仅依赖于变量值的变化而变化,则该代数式称为变量的函数.[29] | 1829 |
| 辛德 | 《微分原理》 | 包含常量和变量的任何形式的解析式称为这些变量的函数.[30] | 1831 |
| 杨 | 《微积分基础》 | 任何一个由常量和变量组成的解析式称为变量的函数.[31] | 1833 |
| 霍尔 | 《微积分基础》 | 若一个量 $u$ 的值随另一个量 $x$ 的变化而变化,则称 $u$ 为 $x$ 的函数.[32] | 1834 |
| 德摩根 | 《微积分》 | 以任一方式包含 $x$ 的代数式称为 $x$ 的函数,如 $x^2$,$x^2+a^2$,$\frac{a+x}{a-x}$,$\log(x+y)$,$\sin 2x$ 等等.[33] | 1836 |
| 德摩根 | 《代数学》 | 以任一方式包含 $x$ 的表达式叫 $x$ 的函数,如 $a+x$,$a+bx^2$ 等等.[34] | 1837 |
| 戴维斯 | 《微积分基础》 | 两个变量相关联,若其中一个变量的值发生任何变化时,另一个变量的值必将发生相应的变化,则称它们为彼此的函数.[35] | 1838 |
| 丘吉 | 《微积分基础》 | 一个变量与另一个变量相关联,若后一变量的值发生任何变化时,前一个变量的值必将发生相应的变化,则称前一变量为后一变量的函数.[36] | 1842 |
| 奥布里恩 | 《微分基础》 | 对变量 $x$ 实施某种或某一组运算所得到的结果,称为 $x$ 的函数.……$f(x)$ 不一定是随 $x$ 变化而变化的量,因为有时对 $x$ 施以一组运算,对于 $x$ 的所有值,会得到同一个结果.[37] | 1842 |

续表

| 作者 | 书名 | 函数定义 | 年份 |
|---|---|---|---|
| 华尔顿 | 《微分专论》 | 任意两个量相关联，若其中一个量的值发生任何变化时，另一个量的值必将发生相应的变化，则称一个量是另一个量的函数.[38] | 1846 |
| 里奇 | 《微积分原理》 | 若一个量的值依赖于另一个变量的特殊值，则这个量称为另一个量的函数. 所谓 $x$ 的函数，是指 $x$ 与常量所组成的任一代数式.[39] | 1847 |
| 杜哈梅尔 | 《分析教程》 | 若一些量的值由另外一些量的值所确定，则前面的量称为后面的量的函数.[40] | 1847 |
| 汤姆逊 | 《微积分引论》 | 若一个量的值依赖于另一个变量的值，则前者称为 后者的函数.[41] | 1848 |
| 罗密士 | 《解析几何与微积分基础》 | 若一个变量等于含有另一个变量的代数式，则称第一个变量为第二个变量的函数. 例如，在直线方程 $y=ax+b$ 中，$y$ 是 $x$ 的函数；在圆的方程 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 和椭圆方程 $y=\frac{B}{A}\sqrt{2Ax-x^2}$ 中也是如此.[42] | 1851 |
| 托德亨特 | 《微积分专论》 | 两个变量相关联，若改变其中一个变量，另一个变量也随之发生变化，则称第二个变量为第一个变量的函数.[43] | 1852 |
| 赫明 | 《微积分基础》 | 任一变量的函数是这样一个量，它的值依赖于该变量的值，且随之而变化，任给该变量一个值，函数得到一个确定的相应值.[44] | 1852 |
| 乌尔豪斯 | 《微分基础》 | 函数是包含一个或几个变量的任一解析式.[45] | 1852 |
| 史密斯 | 《微积分基础》 | 两个变量相关联，若改变其中一个变量，另一个变量必将随之发生变化，则称第二个变量为第一个变量的函数.[46] | 1854 |
| 蒂默曼斯 | 《微积分专论》 | 一个变量与另一个变量相关联，若后一变量的值发生任何变化时，前一个变量的值必将发生相应的变化，则称前一变量为后一变量的函数.[47] | 1854 |
| 库特内 | 《微积分专论》 | 两个变量相互依赖，若已知其中一个变量的值，就能得到另一个变量的值，则称它们为彼此的函数.[48] | 1855 |

从表 1 可见，30 种微积分著作中，有 14 种采用了"解析式"定义，15 种采用了"依赖关系"定义，只有 1 种采用了"运算结果"定义."依赖关系"定义有四种不同的表述方式：一是"依赖说"，即一个量依赖于另一个或几个量；二是"应变说"，即一个量的值随另一个或几个量的变化而变化；三是"定值说"，即一个量的值由另一个或几个量的值所确定；四是"依赖"、"应变"和"定值"三说并举. 前两种表述均源于欧拉，第三种表述最早为柯西所提出.

奥布里恩的"运算结果"定义虽然很少见于微积分著作，但巴贝奇（C. Babbage，1791～1871）在 1815 年的一篇介绍微积分的论文中提到："函数一词引入分析学已有很长时间，具有很大的优越性，其目的是表示可实施于量上的每一种运算的结果."[49] 由于运算包括代数运算和超越运算，因此，运算结果定义实际上只不过是解析式定义的另一种表述形式而已.

## 5　函数定义演变过程分析

### 5.1　不同定义的频数统计

以上我们考察的总共 45 种文献中，三种定义分布如图 1 所示.

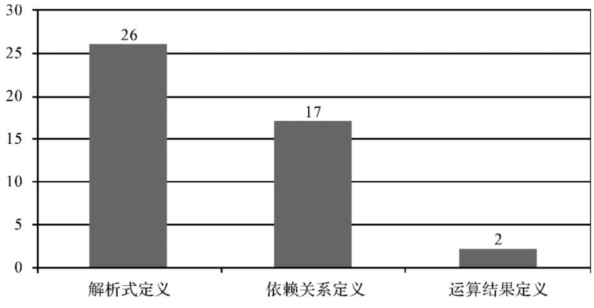


图 1　三种函数定义的频数

从图 1 可见，在我们所考察的 1855 年以前的文献中，函数定义基本上以欧拉的两个定义为蓝本，其中，解析式定义更加易于为人们所接受，因而占据统治地位.

若将1718—1855共138年时间分成四段，则函数定义的分布情况如图2所示.

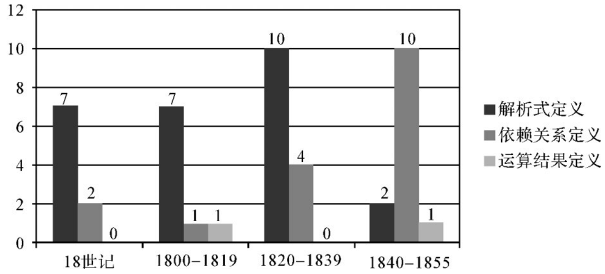


**图2　函数定义在不同时期的频数分布**

由图2可见，19世纪30年代以前，“解析式”定义独占鳌头；而40年代之后，“依赖关系”定义后来居上，“解析式”定义逐渐退出历史舞台.

### 5.2　关于“解析式”定义

早在1797年，拉克洛瓦已经明确提出，函数可以不通过解析式来表示，但受欧拉定义的影响，百科全书数学辞条以及微积分、代数学的作者们在近半个世纪的时间里依然固守着“解析式”定义. 虽然柯西于1821年给出的新定义突破了欧拉定义的局限，用“由自变量的值确定函数的值”来代替“函数值随自变量的变化而变化”，但他仍然说“用自变量表示的其他量称为自变量的函数”.

这种情况直到1840年代才发生改变. 1847年，斯托克斯(G. G. Stokes, 1819～1903)明确修正了欧拉的定义：“函数是这样一个量，它的值以任意方式依赖于构成它的一个或几个变量的值. 因此，函数不必通过任何代数符号的组合来表达，甚至在变量的很近的界限之间也是如此. ”[50]

但“解析式”定义并未完全销声匿迹. 虽然里奇于1847年给出“依赖关系”定义，但他依然持有解析式的意象；而罗密士则仍然坚持采用“解析式”定义.

### 5.3　关于“依赖关系”定义

“依赖关系”定义几乎未见于19世纪初期的数学文献，但较多地出现于1820—1855年间的微积分著作中. 图3给出了四种表述在不同时段的分布情况.

早在1822年，法国数学家傅立叶(J. Fourier, 1768～1830)在《热的解析理论》中给出如下定义：“函数$f(x)$代表一系列的值或纵坐标，它们中的每一个都是任意的. 对于无限多个给定的横坐标$x$的值，有同样多个纵坐标$f(x)$的值. …… 无需假设这些纵坐标满足同一个法则；它们可以任何方式彼此接续，每一个都好像是单个的量. ”[51] 这个定义完全摆脱了欧拉定义的束缚，已十分接近现代定义了. 但在之后的数十年时间里，该定义并未对“依赖关系”定义产生影响.

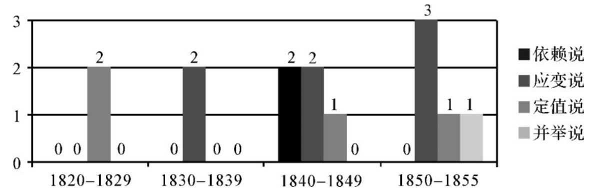


**图3　“依赖关系”定义四种表述的频数分布**

1837年，狄里克雷(L. Dirichlet, 1805～1859)给出如下定义：“设$a$、$b$是两个确定的值，$x$是可取$a$、$b$之间一切值的变量. 如果对于每一个$x$，有惟一有限的$y$值与它对应，使得当$x$从$a$到$b$连续变化时，$y$也逐渐变化，那么$y$就称为该区间上$x$的一个连续函数. 在整个区间上，$y$无需按照同一种规律依赖于$x$，也无需单单考虑能用数学运算来表示的关系. ”[11] 如果去掉“连续”的条件，该定义与今天的定义并无二致.

到了1851年，黎曼(B. Riemann, 1826～1866)给出新的定义：“假定$z$是一个变量，它可以逐次取所有可能的实数值. 若对它的每一个值，都有不定量$w$的惟一的值与之相对应，则称$w$为$z$的函数. ”[11] 这个定义和狄利克雷的定义被公认为函数的现代定义.

我们看到，这两个定义在相当长的时间内同样没有对旧定义产生冲击.

## 6　中文译名

德摩根《代数学》的权威性、罗密士《解析几何与微积分基础》(即《代微积拾级》)的通俗性使得英国传教士伟烈亚力(A. Wylie, 1815～1887)选择了二书进行翻译；而这两部著作恰好都采用了函数的“解析式”定义. 他和李善兰(1811～1882)将“变量”译为“变数”，“包含变数的表达式”自然就译为“函数”了，其中“函”、“含”同义.《代数学》卷七中的函数定义译文如下：“凡式中含天，为天之函数，如甲$\perp$天，甲$\perp$乙天$^{二}$诸式是也. ”[52]《代微积拾级》卷十中的函数定义译文如下：“凡此变数中函彼变数，则此为彼之函数. 如直线之式为地 $=$ 甲天$\perp$乙，则地为天之函数. 又平圆之式为地 $= \sqrt{\text{味}^{二}\top\text{天}^{二}}$，椭圆之式为地 $= \frac{\text{呷}}{\text{吃}}\sqrt{\text{二呷天}\top\text{天}^{二}}$，皆地为天之函数也. ”[53] 这便是

中文数学名词“函数”的由来.

我们可以设想,假如伟烈亚力当初选择了采用“依赖关系”定义的代数学和微积分著作,那么,我们今天在课堂上所提到的或许会是“依数”、“应数”、“关数”、“联数”等等其他名称了!“函数”一词是 19 世纪的不完善定义所导致的译名,在今天看来,它已不能反映 function 一词的真实涵义了.这里,我们再一次遇到了“旧瓶装新酒”现象.

## 7 结论

通过对 1855 年以前的有关数学文献的考察和分析,我们可以得到以下结论:

(1) 欧拉的“依赖关系”定义并未影响“解析式”定义的广泛传播.19 世纪中叶以前,英、法、美等国的百科全书、微积分著作中的函数定义均以欧拉的两个定义为蓝本,“解析式”定义在 1840 年以前占统治地位,而在 1840 年以后逐渐退出历史舞台.

(2)19 世纪中叶以前,柯西、傅里叶、狄利克雷和黎曼相继突破了欧拉定义的局限,但在相当长时间内,旧定义依然流行,现代定义从诞生到被普遍接受,经历曲折艰难的过程.

(3) 历史上,函数定义在微积分、代数学教材中表现出“滞后”现象.

(4) 中文“函数”名称源于函数的“解析式”定义,其诞生具有一定的历史偶然性.

### 参考文献


1 杜石然. 函数概念的历史发展[J]. 数学通报, 1961, 6: 36—40

2 Youschkevitch, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 1976, 16(1): 37—85

3 D' Alembert, J. R.. Fonction. In: D. Diderot (ed.). *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (Vol.7). Paris: Briasson, David, Le Breton et Durand. 1757. 50

4 Lagrange, L. L. *Théorie des fonctions analytiques*. Paris: De L' Imprimerie de la République, 1797. 1—2

5 Lagrange, J. L. *Lecon sur le Calcul des Fonctions*. Paris: Courcier, 1806. 4—6

6 Lacroix, S. F. *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* (T. 1), Paris: J. B. M. Duprat, 1797. 1—3

7 Cournot, A. A. *Traité Elémentaire de la Théorie des Fonctions et du Calcul Infinitésimal* (Tome 1). Paris: L. Hachette, 1841. 1—21

8 Leibniz, G. W. Nova calculi deifferentialis applicatio & usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione. *Acta Editorum*, 1694: 311—316

9 Leibniz, G. W. *Mathematische Schriften* (Vol. 2), Halle: Druck und Verlag, 1855: 150

10 Leibniz, G. W. *Mathematische Schriften* (Vol. 3), Halle: Druck und Verlag, 1856: 507

11 Rüthing, D. Some definitions of the concept of function from J. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*, 1984, 6(4): 72—77

12 Euler, L. *Introduction to Analysis of the Infinite* (translated by J. D. Blanton). New York: Springer—Verlag, 1988. 3

13 Euler, L. *Foundations of Differential Calculus* (Translated by J. D. Blanton). New York: Springer—Verlag, 2000. vi

14 Rees, A. *The Encyclopadia, or Universal Dictionary of Arts, Sciences and Literature* (Vol. 16), Philadelphia: Samuel F. Bradford & Murray, Fairman & Co., 1805

15 Wallace, W. Function. In: *Encyclopaedia Britannica* (the 6th edition, Vol. 9), Edinburgh: Archibald Constable & Company, 1823. 256

16 Wallace, W. Fluxions. In: *Encyclopaedia Britannica* (the 6th edition, Vol. 8), Edinburgh: Archibald Constable & Company, 1823. 697—778

17 Wallace, W. Functions. *Edinburgh Encyclopaedia* (the First American Edition, Vol. 9), Philadelphia: Joseph & Edward Parker, 1832. 498

18 Wallace, W. Functions. *Edinburgh Encyclopaedia* (the First American Edition, Vol. 9), Philadelphia: Joseph & Edward Parker, 1832. 117

19 Hutton, C. *A Mathematical & Philosophical Dictionary*. London: S. Hamilton, 1815. 560—561

20 De Morgan, A. Function. *The Penny Cyclopaedia of the Society for the Diffusion of Useful Knowledge* (Vol. 11). London: Charles Knight & Co., 1838. 15—16

21 Montferrier, A. —S. de. Dictionnaire des Sciences Mathematiques Pures et Appliquées (Tome 2). Paris: Bureau de la Bibliothèque Scientifique, 1838. 27

22 Bossut, C. *Traités de Calcul Différentiel et de Calcul intégral* (Tome 1). Paris: De L' Imprimerie de la République, 1799. 3—4

23 Garnier, J. —G. *Leçons de Calcul Différentiel*. Paris: F. Bechet. 1811. 1

24 Boucharlat, J. —L. *Élémens de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*. Paris: Courcier, 1820. 1

25 Cauchy, A. L. *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. Paris: Debure Frères, 1821. 19

26 Lardner, D. *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*. London: John Taylor, 1825. 2

27 Lubbe, S. F. *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Bacherier Pere et Fils, 1832, 1

28 Ryan, J. *The Differential and Integral Calculus*. New York: White, Gallaher & White, 1828. 2.

29 Powell, B. *A Short Treatise on the Principles of the Differential and Integral Calculus*. Oxford: The University Press, 1829. 4


(下转第 12 页)

的某个量．使用相同的推理求解方程．例如，重新排列的欧姆定律 $V=IR$，突出电阻 $R$ 的作用．

线索 10　选择三角函数，对周期现象建模；详细说明三角函数的振幅，频率和中线．

线索 11　建立指数模型 $ab^{ct}=d$，其解答为对数形式，其中 $a$，$c$，$d$ 分别是数，而底数 $b$ 可为 2，10，或自然对数的底 $e$，利用技术估计对数的值．

线索 12　建立表示两个量之间关系的模型，说明在上述量的情境中，图像与列表所示的关键特征，对两个量的关系，给予口头阐述．模型的关键特征包括：图形在坐标轴上的截距，函数在区间内的增减性，正负性，最大值，最小值，图像的对称性和函数的周期．

把以上线索按要求分成几类：

①给出建模线索，同时指出建模过程，如线索 4，9，10；

②给出建模线索，学生要根据实际情况构建具体的函数关系，如线索 1，5，；

③提出建模要求，学生要独立构建线索和关系，如线索 7，8，2，11；

④提出建模要求，不限定函数的类型，如线索 3，6，12．


参考文献

1　Massachusetts Curriculum Framework For Mathematics，USA，March，2011

2　http：www. corestandards. org/maths

3　中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（实验）[S]．北京：人民教育出版社，2003，4


（上接第 7 页）


30　Hind，J. *The Principles of the Differential Calculus*. Cambridge：J. Smith，1831. 15

31　Young，J. R. *The Elements of the Differential Calculus*. Philadelphia：Carey，Lea & Blanchard，1833. 1

32　Hall，G. T. *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*. Cambridge：：The Pitt Press，1834. 1

33　De Morgan，A. *The Differential and Integral Calculus*. London：Baldwin & Cradock，1836. 7

34　De Morgan，A. *Elements of Algebra*. London：Taylor & Walton，1837. 168

35　Davies，C. *Elements of Differential and Integral Calculus*. New York：Barnes & Co.，1838. 9

36　Church，A. E. *Elements of the Differential and Integral Calculus*. New York：Wiley & Putnam，1842. 1

37　O' Brien. *An Elementary Treatise on the Differential Calculus*. Cambridge：The University press，1842. 2－3

38　Walton，W. *A Treatise on the Differential Calculus*. Cambridge：Deightons，1846. 9

39　Ritchie，W. *Principles of the Differential and Integral Calculus*. London：Taylor and Walton，1847. 1

40　Duhamel，J. M. *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. Paris：Bachelier，1847. 4

41　Thomson，J. *An Introduction to the Differential and Integral Calculus*. London：Simms & Mintyre，1848. 7

42　Loomis，E. *Elements of Analytic Geometry and of Differential and Integral Calculus*. New York：Harper & Brothers，1851. 113

43　Todhunter，I. *A Treatise on the Differential Calculus and the Elements of the Integral Calculus*. Cambridge：Macmillan & Company，1852. 1

44　Hemming，G. W. *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*. Cambridge：Macmillan & Company，1852. 2

45　Woolhouse，W. S. B. *The Elements of the Differential Calculus*. London：John Weale，1852. 2

46　Smyth，W. *Elements of the Differential* and *Integral Calculus*. Portland：Sanborn & Carter，1854. 31

47　Timmermans，A. *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Gand：H. Hoste，1854. 1

48　Courtnay，E. H. *A Treatise on the Differential* and *Integral Calculus*. New York：A. S. Barnes & Co.，1855. 13

49　Babbage，C. An essay towards the calculus of functions. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*，1815. 389－423

50　Stokes，G. G.. *Mathematical & Physical Papers*（Vol. 1）. Cambridge：The University Press，1880. 239

51　Fourier，J. *The Analytical Theory of Heat*（Tr. by A. Freeman）. New York：Dover Publications，1955. 430

52　棣么甘．代数学（伟烈亚力口译、李善兰笔受）．上海：墨海书馆，咸丰九年（1859）

53　罗密士．代微积拾级（伟烈亚力口译，李善兰笔受）．上海：墨海书馆，咸丰九年（1859）