上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2016 年第 5 卷第 5 期

伊萨克·托德亨特

（**Isaac Todhunter, 1820～1884**）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物是 19 世纪英国十大数学家之一伊萨克·托德亨特（Isaac Todhunter, 1820～1884）。

伊萨克·托德亨特于 1820 年 11 月 23 日出生于英国的苏塞克斯郡拉伊镇。6 岁那年，父亲去世，家境贫困。坚强的母亲带着四个孩子迁往黑斯廷斯镇，并在那里创办了一所女子学校。托德亨特最初在黑斯廷斯的一所学校就读，成绩很差，被视为资质愚钝。后转至伦敦人奥斯汀（J. B. Austin）所办的新校，进步神速。

中学毕业后，托德亨特去佩卡姆的一所学校任教，晚上则去伦敦大学听课，有幸受教于他所崇拜的偶像——大数学家德摩根（A. De Morgan, 1806～1871）。受德摩根的影响，托德亨特对科学史、伦理学和逻辑学产生了浓厚的兴趣。1839 年，他通过伦敦大学的入学考试，正式成为该校的学生。1842 年获学士学位，同时因成绩优异而荣获奖学金，进一步深造数学。他的数学老师中除了德摩根，还有数学家西尔维斯特（J. J. Sylvester, 1814～1897）。1844 年，他获硕士学位，并以第一名的成绩荣获一枚奖章。

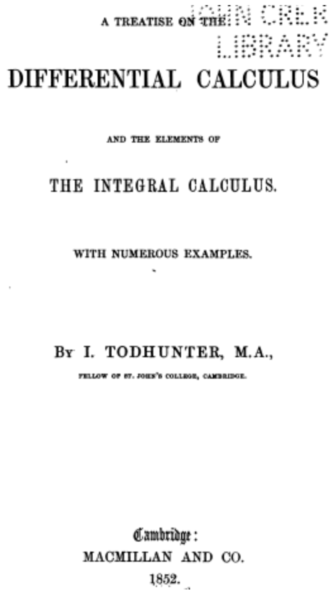
同年，在德摩根的建议下，托德亨特进剑桥大学圣约翰学院学习。他勤奋好学、心无旁骛，过着隐士般的生活。1848 年，他以数学学位考试甲等第一名的骄人成绩获学士学位，翌年被选为圣约翰学院的研究员，三年后年再获硕士学位。

自 1852 年开始的十余年间，他出版了大量的教科书，主要有：

1. 微分（*A Treatise on the Differential Calculus with Numerous Examples*, 1852）；
2. 分析静力学（*A Treatise on Analytical Statics*, 1853）；
3. 平面坐标几何（*A Treatise on Plane Coordinate Geometry*, 1855）；
4. 积分（*A Treatise on the Integral Calculus with Numerous Examples*, 1857）；
5. 代数（*A Treatise on Algebra for the Use of Colleges and Schools*, 1858）；
6. 空间解析几何例题集（*Examples of Analytic geometry in Three Dimensions*, 1858）；
7. 平面三角学（*Plane Trigonometry for the Use of Colleges and Schools*, 1859）；
8. 球面三角学（*Spherical Trigonometry for the Use of Colleges and Schools*, 1859）；
9. 圆锥曲线（*A Treatise on Conic Sections with Numerous Examples*）；
10. 方程论（*An Elementary Treatise on the Theory of Equations*, 1861）；
11. 欧几里得几何原本（*The Elements of Euclid for the Use of Schools and Colleges*,

1862）；

12. 代数学入门（*Algebra for Beginners with Numerous Examples*, 1863）。



A TREATISE ON THE

DIFFERENTIAL CALCULUS

AND THE ELEMENTS OF

THE INTEGRAL CALCULUS.

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY I. TODHUNTER, M.A.,

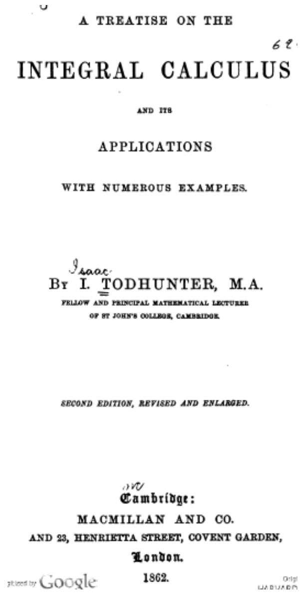
FELLOW OF ST. JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE.

Cambridge:

MACMILLAN AND CO.

1852.

《微分》扉页



A TREATISE ON THE

INTEGRAL CALCULUS

AND ITS

APPLICATIONS

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY I. TODHUNTER, M.A.

FELLOW AND PRINCIPAL MATHEMATICAL LECTURER OF ST JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE.

SECOND EDITION, REVISED AND ENLARGED.

Cambridge:

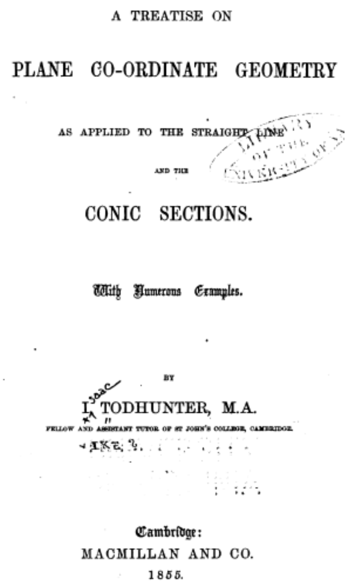
MACMILLAN AND CO.

AND 23, HENRIETTA STREET, COVENT GARDEN,

London.

1862.

《积分》扉页



A TREATISE ON

PLANE CO-ORDINATE GEOMETRY

AS APPLIED TO THE STRAIGHT LINE

AND THE

CONIC SECTIONS.

With Numerous Examples.

BY

I. TODHUNTER, M.A.

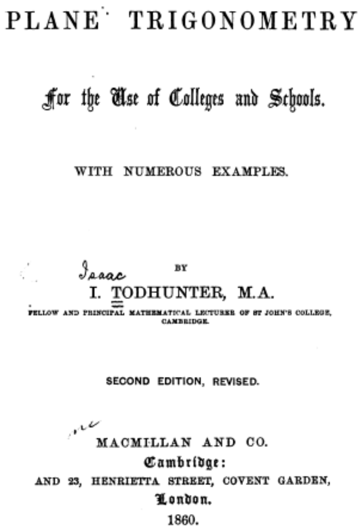
FELLOW AND ASSISTANT TUTOR OF ST JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE.

Cambridge:

MACMILLAN AND CO.

1855.

《平面坐标几何》扉页



PLANE TRIGONOMETRY

For the Use of Colleges and Schools.

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. TODHUNTER, M.A.

FELLOW AND PRINCIPAL MATHEMATICAL LECTURER OF ST JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE.

SECOND EDITION, REVISED.

MACMILLAN AND CO.

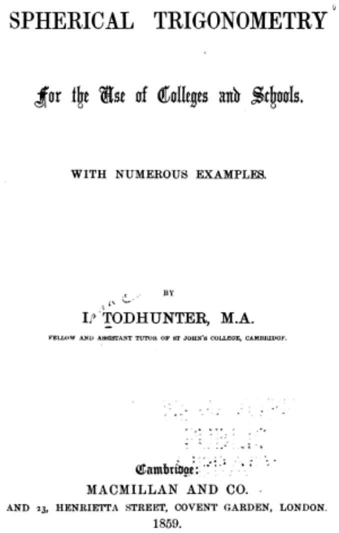
Cambridge:

AND 23, HENRIETTA STREET, COVENT GARDEN,

London.

1860.

《平面三角学》扉页



SPHERICAL TRIGONOMETRY

For the Use of Colleges and Schools.

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. TODHUNTER, M.A.

FELLOW AND ASSISTANT TUTOR OF ST JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE.

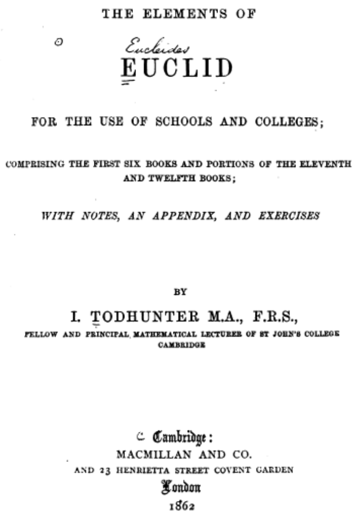
Cambridge:

MACMILLAN AND CO.

AND 23, HENRIETTA STREET, COVENT GARDEN, LONDON.

1859.

《球面三角学》扉页



THE ELEMENTS OF

EUCLID

FOR THE USE OF SCHOOLS AND COLLEGES;

COMPRISING THE FIRST SIX BOOKS AND PORTIONS OF THE ELEVENTH AND TWELFTH BOOKS;

WITH NOTES, AN APPENDIX, AND EXERCISES

BY

I. TODHUNTER M.A., F.R.S.,

FELLOW AND PRINCIPAL MATHEMATICAL LECTURER OF ST JOHN'S COLLEGE CAMBRIDGE

Cambridge:

MACMILLAN AND CO.

AND 23 HENRIETTA STREET COVENT GARDEN

London

1862

《几何原本》扉页

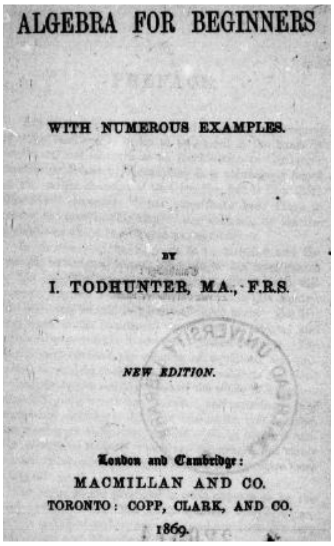
1864 年，托德亨特与一名皇家海军上尉的女儿结婚。为此，托德亨特辞去了圣约翰学院研究员的职务。他在给未婚妻的信中写道：“你将不会忘记，我确信，我过去一直是一名研究者，将来也永远是，但是书籍丝毫不会与你构成哪怕是遥远的竞争。”蜜月旅行中，托德亨特竟随身携带哈密尔顿（W. R. Hamilton, 1805～1865）的《四元数》！

离开圣约翰学院后，托德亨特继续出版系列教材，其中有：

13. 三角学入门（*Trigonometry for Beginners with Numerous Examples*, 1866）；

14. 力学入门（*Mechanics for Beginners with Numerous Examples*, 1867）；

15. 测量入门（*Mensuration for Beginners with Numerous Examples*, 1869）；


ALGEBRA FOR BEGINNERS

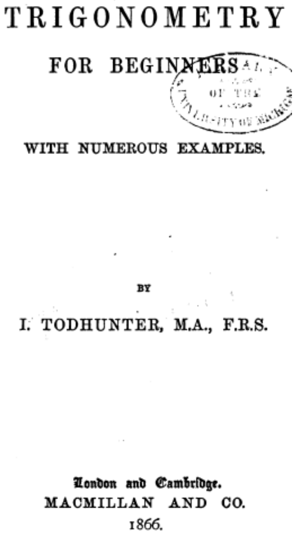
WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. TODHUNTER, M.A., F.R.S.

NEW EDITION.

London and Cambridge:
MACMILLAN AND CO.
TORONTO: COPP, CLARK, AND CO.
1869.


TRIGONOMETRY

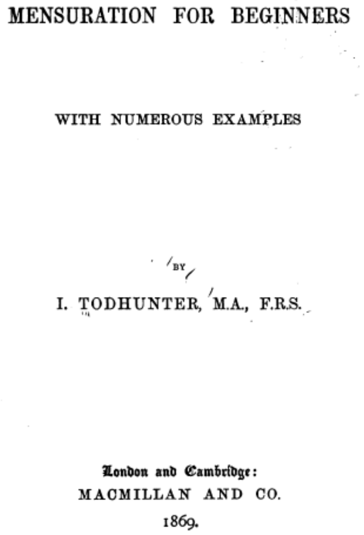
FOR BEGINNERS

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. TODHUNTER, M.A., F.R.S.

London and Cambridge.
MACMILLAN AND CO.
1866.


MENSURATION FOR BEGINNERS

WITH NUMEROUS EXAMPLES

BY

I. TODHUNTER, M.A., F.R.S.

London and Cambridge:
MACMILLAN AND CO.
1869.

《代数学入门》扉页　　《三角学入门》扉页　　《测量入门》扉页

16. 拉普拉斯函数、拉梅函数与贝塞尔函数（*A Elementary Treatise on Laplace's Functions, Lame's Functions and Bessel's Functions*, 1875）；

17. 自然哲学入门（*Natural Philosophy for Beginners*, 1877）。

他的主要数学研究领域是变分法，代表作是：

18. 变分法研究（*Researches in the Calculus of Variations*, 1871）。

1871 年，托德亨特因此书而荣获亚当斯（Adams）奖。

托德亨特一生中最重要的工作是科学史，先后出版了

19. 19世纪变分法的历史（*A History of the Progress of the Calculus of Variations during the 19th Century*, 1861）；

20. 概率的数学理论发展史（*A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, 1865）；

21. 地球引力与形状的数学理论发展史（*A History of Mathematical Theory of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace*, 2 卷，1873）；

22. 惠威尔著述记略（*William Whewell: an Account of his Writings with Selections from his Literary and Scientific Correspondence*, 2 卷，1876），

23. 弹性理论和材料强度学史（*A History of the Theory of Elasticity and of Strength of Materials from Galilei to the Present Time*，未完稿，由皮尔逊续成，2 卷，1886/1893）。

托德亨特的学生、数学家罗斯（E. J. Routh, 1831～1907）对曾作过如下评论：

“读托德亨特的科学史著作，就感觉仿佛有一束明亮的灯光照亮了一门学科。他把每一

位先哲所遭遇的困难呈现在我们面前，让我们了解这门学科是如何演进的，每一次的发现如何为这门学科添砖加瓦，一步步达到我们今天的知识水平。”

1873 年，托德亨特出版了数学教育专著：

24. 学习之冲突与其他教育论文（*The Conflict of Studies and other Essays on Subjects Connected with Education*）。

该书讨论了 19 世纪后期剑桥大学本科生数学教育问题，共收集了他的 6 篇论文，分别是：学习的冲突、竞争性考试、数学的个人学习、学术创新、初等几何和数学学位考试。

托德亨特是皇家学会会员、皇家天文学会会员、伦敦数学学会会员。

1880 年夏天，托德亨特感染眼疾，身体每况愈下。1883 年 9 月，他的右臂瘫痪，病情恶化，1884 年 3 月 1 日溘然长逝。

托德亨特是一个宁静致远、性格温和、兴趣广泛、风趣幽默、与人为善、从不在背后说人长短的数学家。他与三教九流都很熟。他是当之无愧的语言大师，懂拉丁语、希腊语、法语、德语、西班牙语、意大利语、俄语、希伯来语和梵语。他精通哲学。他还是一个成功的私人教师，培养了泰特（P. G. Tait, 1831～1901）、罗斯在内的著名数学家。他的博学、勤奋以及对数学的热爱，令学生难忘，是学生的楷模。他的一位名叫史蒂芬（Stephen）的学生这样描述自己的老师：

“他活在纯粹的数学氛围之中：他的那些摆放得整整齐齐、包以棕色纸张的书，无不是数学书。他三句不离数学。甚至他的严格按学生需求而设计的座椅以及地毯上的图案，似乎也都散发着数学的气息。我怎么都猜不出，他积累各种信息、知道所有事件，究竟是怎样的一个神秘过程。很可能，他是通过皮肤上的毛孔来吸收这些信息的吧！更难以想象的是，他究竟是怎样写出那么多出色的数学教科书的。很可能，在他的密室，他是在一个学生离开和另一个学生到达之间的空隙里写作的。”

无论是在伦敦大学还是在剑桥大学，学生时代的托德亨特一直都是学霸。然而，对于考试，托德亨特却有着理性的认识：“我们并不能通过考试来创造学问和天才；我们无法确定能否发现他们；我们所能探知的仅仅是通过考试的能力而已。”与我们今天常说的“学霸”不同，托德亨特不是为分数、不是为了功利、而是因为内心的喜爱去学数学，所以才有日后的非凡成就。

目　录

Content

教材研究

美英早期数学教科书中的极限概念及其启示*

任芬芳 1, 2 汪晓勤 3

（1.华东师范大学数学系，上海，200241；2.浙江师范大学行知学院，浙江金华，321004；

3. 华东师范大学教师教育学院, 上海, 200062）

1 引言

17 世纪，牛顿、莱布尼茨创立了微积分，但牛顿发表的微积分论文由于不严密而受到质疑。直到 18 世纪柯西创立极限理论，才为微积分打下坚实的基础，完善了微积分。没有极限，微积分岌岌可危。若对极限没有深刻的认识，也就不可能透彻地了解微积分的本质，因此，极限理论的学习是微积分学习的重要环节，而极限概念（尤其是它的分析定义）的教学则是微积分教学的难点之一。

极限概念教学的最大困难不仅在于它的丰富性和复杂性，还在于单纯从数学定义中产生认知方面的困难程度，从而产生认知障碍。认知障碍可分成如下三种类型：因学生个人发展产生的遗传和心理障碍、因教学和教师的特点产生的教学障碍、因数学概念本身的性质产生的认识论障碍。[1] 极限概念占据了微积分的核心位置且贯穿于整个微积分，连续、导数、微分及积分等定义都建立在极限概念的基础之上，极限概念特有的认识论障碍将会带来一系列的问题。

著名数学家和数学史家克莱因（M. Kline, 1908～1992）曾指出：“每一位中学和大学数学教师都应该知道数学史；有许多理由，但最重要的一条理由或许是：数学史是教学的指南。”[2] 研究概念的历史、确定其发展缓慢和产生困难的时期有助于指明认识论障碍的存在。[1] 对产生于 18 世纪的极限概念来说，19、20 世纪曾经使用的数学教科书能很好地体现其发生、发展的规律。为了能够更好地进行极限理论的教学，围绕极限概念这个主题，以极限的描述性定义为主要研究对象，笔者对美国、英国 20 世纪中叶前出版的数学教科书进行了考察，

*上海市教育科学研究项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 的部分研究成果；浙江省 2014 年高等学校访问学者专业发展项目“HPM 视角下的微积分教学研究”（项目编号：FX2014008）。

试图回答以下问题：93 种教科书有哪些极限定义？怎样演变？其特征能否体现人们对极限概念理解的历史相似性？

2 研究对象

我们总共选取了 20 世纪中叶之前出版的 93 种美、英数学教科书。其中 25 种为代数教科书，68 种为几何教科书。若以十年为一段，图 1 给出了各教科书的时间分布情况。

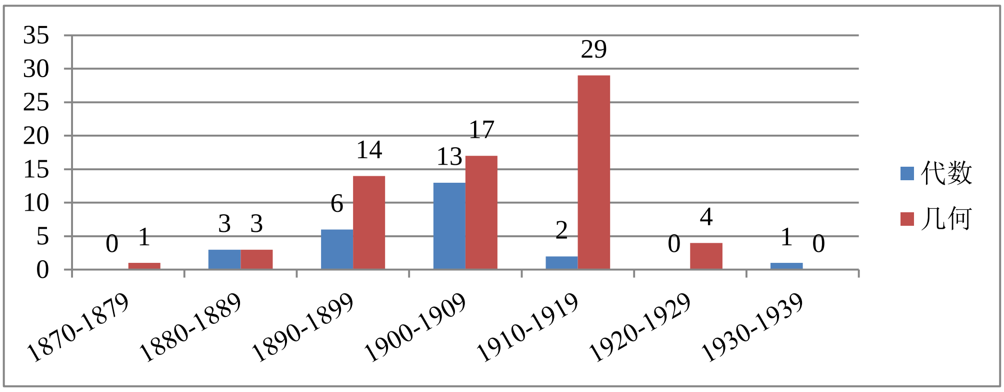


图 1 93 种教科书的时间分布

在 93 种教科书中，极限概念散见于各种不同知识点的章节中，并没有很明确的归属。

就 25 种代数教科书而言，所在章节大致可以分为“零与无穷”、“级数与极限”、“变量与极限”、“函数与极限”、“极限”及“线性方程”六类，详见表 1。

表 1 极限概念在 25 种代数教科书中的章节分布

所在章节	零与无穷	级数与极限	变量与极限	函数与极限	极限	线性方程
教科书数量	4	3	11	1	5	1

很明显，“变量与极限”这一章节所占比例最高，为 44%；在所在章节的标题中出现“极限”的教科书共计 20 种，占 80%，但极限内容单独成章的教科书仅有 5 种。

而就 68 种几何教科书而言，所在章节大致可以分为“圆与圆的测量”、“比与比例”、“极限理论”、“量”、“多面体、圆柱、锥体”及“附录”六类，详见表 2。

表 2 极限概念在 68 种几何教科书中的章节分布

所在章节	圆与圆的测量	比与比例	极限理论	量	多面体、圆柱、锥体	附录
教科书数量	47	7	4	3	1	6

显然“圆与圆的测量”所占比例最高，为 69%，远高于第二位的“比与比例”；而极限内容单独成章的教科书仅有 4 种，占 5.9%。

93 种教科书中极限单独成章的并不多，共 24 种，仅占 25.8%。

统观 93 种教科书中的极限概念，其呈现方式分为五种：直接给出定义，先给引例再给定义，先给定义再给例子，引例、定义、例子三者皆有，只有描述没有定义。

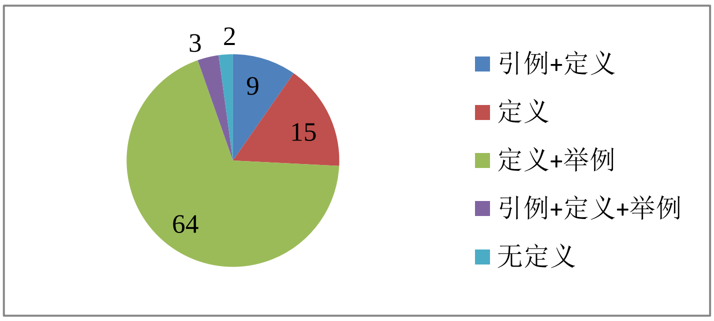


图 2　极限概念在 93 种教科书中呈现方式分布

如图 2 所示，先给定义再给例子的方式所占比例最高，为 68.8%；仅给出定义的教科书所占比例也不少，占 16%。

3 极限定义的类型

3.1 分类

统计发现，93 种教科书给出的极限定义主要可分成三类：第一类是动态的描述，“变量越来越接近或趋近常量”，本文称为“动态定义”；第二类则是静态的描述，“变量与常量的差”，本文称为“静态定义”；第三类则把两者结合起来使用，在一个定义中既有“趋近”也有“差”，本文称为“动静结合定义”。此外，其中两种教科书并未给出明确的定义，只是用引导性的描述语言阐述“极限概念”。

表 3 列举了 93 种教科书中所出现的三类定义的典型形式，其中动态定义 5 个、静态定义 5 个、动静结合定义 7 个。

表 3　93 种教科书中出现的极限定义的典型形式

类型	定义
动态定义	一个量按照一定的规律接近某个确定的量，如果第一个量可以无限接近但不能达到第二个量，那么第二个量(不变的量)称为第一个量（变量）的极限。 变量的极限是一个可以无限接近但取不到的常量。 如果一个变量增加或减少时可以无限接近某个确定的常数，那么该常数称为变量的极限。

	当一个变量变化时，它的值可能趋近某个常数。如果这个变量能无限接近，但不能完全等于这个常数，该常数被称为该变量的极限。 当 x 接近定值 a，且 $x-a$ 任意小时，$f(x)$ 无限接近定值 l，那么 l 称为当 x 趋近 a 时 $f(x)$ 的极限。
静态定义	当变量的值用一系列确定的区间测量并持续进行时，与给定常数的差小于任意给定的量，无论多小，但不能完全等于这个常数，这个常数称为变量的极限，称变量无限接近它的极限。 变量的极限是一个常量，它们的差可以小于任意给定的量(无论多么小)，但不为零。 变量越来越接近给定的常数时取得一系列值，只需足够的步数就能使变量和常数之间的差小于任意给定的数，无论多小，常数称为变量的极限，称变量无限接近它的极限。 变量 x 按一个给定的无穷序列改变，如果差 $a-x$ 保持小于每个给定的正数，那么 x 被称为接近极限 a 。 假定常数 a 和变量 x 在 x 变化时满足 $\lvert a-x\rvert$ 保持小于任意给定数 $d\left(d>0\right)$，那么称 x 趋近极限 a 。
动静结合定义	当一个变量无限接近某个定量时，它们的差可以小于任意给定的量，该常数称为变量的极限。 变量的极限是一个可以无限接近但取不到的常量，它们的差可以小于任意给定的量。 变量越来越接近一个常数并取连续的值，以至于变量与常数的差可以小于任意给定的数，这个常数称为变量的极限。 变量与一个给定常数的差可以尽可能小但不等于零，变量称为趋近作为极限的常数，该常数称为变量的极限。 变量接近一个常数，它们的差可以保持小于任意预先给定的定值，无论多小，则该常数称为变量的极限。 变量 x 越来越接近一个常数 a ，x 与 a 的差保持小于任意给定的量，那么 a 称为 x 的极限。 如果变量 x 的值越来越接近某个常数 a，那么它们差的绝对值将保持小于任意给定的正数，那么常数 a 称为变量 x 的极限。

下面给出“没有明确定义”的“极限概念”：

（1）提问什么是变量、常量。

（2）给出例①：点 x 在线段 AB 上移动，第一秒到达 AB 中点，第二秒到达剩下一半的中点，第三秒到达剩下四分之一的中点，……。随后提出三个问题：产生了哪两个不同的距离；距离 Ax 接近哪个距离，何时达到；距离 Bx 接近哪个距离，何时达到。例②：将分数 $\frac{1}{3}$ 改写成一位小数、两位小数、三位小数、……。随后提问：每次改写对小数的值有什么影响，接近多少；每次改写对 $\frac{1}{3}$ 与小数的差有什么影响，接近多少。

（3）提问什么是变量的极限、上极限、下极限。

（4）变量可以与它的极限接近到什么程度。

（5）继续举例：①一个长方形的短边连续变化，问哪些边是变量，极限是多少；角是变量吗，极限是多少；面积受到什么影响，极限是多少？为什么逐渐减小的边不能变成零？②圆内接正多边形（如正方形或等边三角形），二等分每段弧，并连接成弦，得到两倍边数的内接正多边形，类似地得到四倍、八倍、……边数的圆内接正多边形，问变量的最终形式与极限。

（6）提及有时变量不能无限接近极限，如上述圆内接多边形的例子倒过来。

上述提问并没有给出答案，也没有给出具体定义，只是引导学生慢慢了解什么是“变量的极限”。但毫无疑问，这个过程蕴含了极限定义。

3.2 分布

三类定义的总数基本持平，个别教科书出现两类定义，其中动态定义 27 个，静态定义 34 个，动静结合定义 36 个。图 3 是三类定义的具体时间分布，以十年为分布单位。

如图 3 所示，93 种教科书的极限概念开始于动态定义，结束于静态定义。前后各 20 年

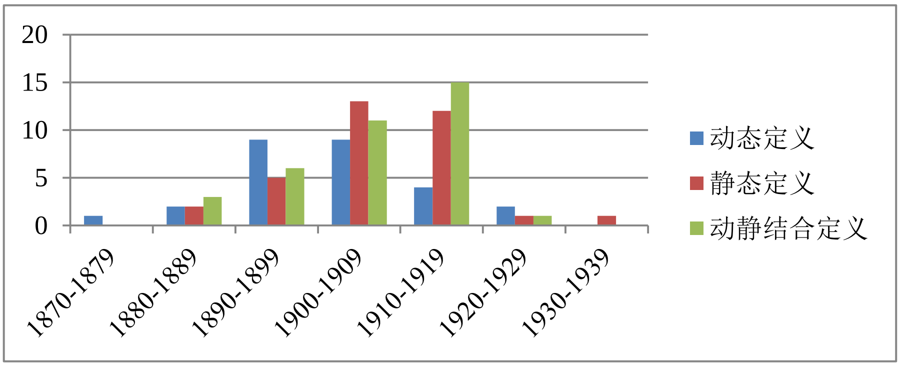


图 3 三类定义的时间分布

的教科书数量较少，重点考察中间 30 年，即 1890-1919。有一个很明显的现象：1890-1899 这十年动态定义多于其它两种定义，1900-1909 这十年三种定义差不多，而 1910-1919 这十年动态定义少于其它两种定义。

显然，三类定义既有纯文字的“描述性定义”，也有字母、符号表示的“形式化定义”。图 4 呈现的是这些教科书中极限定义的演变过程，图 5 是这些定义的数量分布。

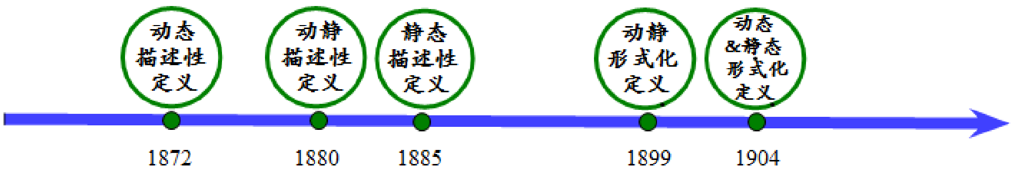


图 4 极限定义的演变

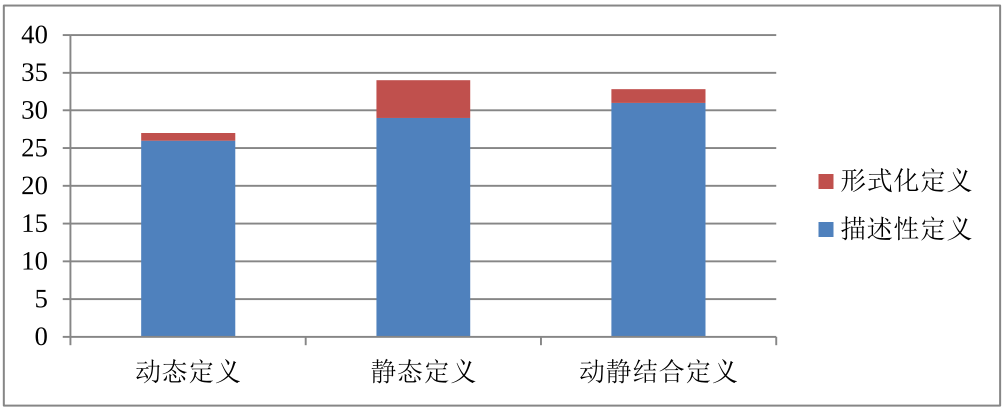


图 5 极限定义的数量分布

第一个动态定义出现在 1872 年，出自塔班（E. T. Tappan, 1824～1888）的《平面与立体几何》[6]，是描述性定义。1904 年出现形式化定义，即：当 x 接近定值 a，且 $x-a$ 任意小时，$f(x)$ 无限接近定值 l，那么 l 称为当 x 趋近 a 时 $f(x)$ 的极限。该定义出自查尔斯·史密斯（C. Smith,1844～1916）的《初等代数》[20]，是全部动态定义中惟一一个形式化定义。

第一个静态定义出现在 1885 年，出自温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835～1906）的《平面与立体几何基础》[9]，是描述性定义。1904 年出现形式化定义，即：变量 x 按一个给定的无穷序列改变，如果差 $a-x$ 保持小于每个给定的正数，那么 x 被称为接近极限 a，出自范（H. B. Fine, 1858～1928）的《范氏大代数》[19]。1909 年出现了含有“差的绝对值”的形式化定义，即：假定常数 a 和变量 x 在 x 变化时满足 $|a-x|$ 保持小于任意给定数 $d\left(d>0\right)$，那么称 x 趋近极限 a，出自里茨（H. L. Rietz, 1875～1943）与克雷索恩（A. R. Crathorne, 1873～1946）的《大代数》[22]。静态定义中共有五个形式化定义，其中两个使用“$a-x$”，三个

使用“$|a-x|$”或等价形式。这些形式化定义均出现在代数教科书中，但没有必然规律。

而第一个动静结合定义出现在 1880 年，出自布拉德伯里（W. F. Bradbury, 1829～1914）的《初等几何》[7]，也是描述性定义，比第一个静态定义早五年。1899 年出现形式化定义，即变量 x 越来越接近一个常数 a，x 与 a 的差保持小于任意给定的量，那么 a 称为 x 的极限，出自比曼（W. W. Beman, 1850～1922）的《新平面与立体几何》[15]。动静结合定义中共有 5 个形式化定义，其中 2 个出现在代数教科书中，3 个出现在几何教科书中；且与前面两类不同，首次出现形式化定义是在几何教科书中。

综上，描述性定义贯穿整个考察年代，而形式化定义虽有出现，却寥寥无几。

3.3 释例

由于极限概念难以理解，绝大多数教科书都给出了具体的例子对极限定义加以阐释，根据这些例子的特征将其分成四类。

3.3.1“一尺之棰”型

即：动点 x 沿着线段 AB 从点 A 往点 B 运动，首先到达 AB 的中点 C，再到达 CB 的中点 D，然后到达 DB 的中点 E，……。在这个运动过程中，动点 x 所经过的距离 Ax 趋近于线段的长度 AB，即线段长度 AB 就是距离 Ax 的极限。

这类例子出现在绝大多数教科书中，与中国古代《庄子·天下篇》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”有异曲同工之妙，不论哪一类定义都可以使用。上述形式常用于阐释动态定义或动静结合定义。

而教科书中出现的这类例子还有两种形式：

（1）给出一个数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，该数列的和$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$趋近于 2，则数列和的极限为 2；这种形式常用于阐释静态定义。

（2）将一个长方形二等分，其中之一再二等分，再取其一二等分，……。依次类推，小长方形的面积依次是原长方形面积的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…，可以小于任意所给定的常数。这种形式出现较少，用于阐释几何教科书中动态定义。

3.3.2“无限小数”型

即：可化为无限小数的分数或无理数取近似值。如将$\frac{1}{3}$依次取近似值得到数列$0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \cdots$。该数列各项的值趋近$\frac{1}{3}$，那么$\frac{1}{3}$就是该数列的极限；并指出$\frac{1}{3}$与每项的差有什么变化，强调“变量与极限的差”有何特点。

这类例子主要用于阐释静态定义，强化“差”的内涵，又如$\frac{4}{9}$、$1\frac{1}{3}$与$\sqrt{2}$等。

3.3.3“圆的度量”型

首先指出圆内接（外切）正多边形（如正方形或等边三角形）将圆分成若干等弧，二等分每段弧，并连接弦，得到两倍边数的内接正多边形；重复这个过程，依次得到四倍、八倍……边数的内接（外切）正多边形。紧接着问产生了哪些变量，这些变量的极限是多少。如圆周长、圆面积、圆半径分别是圆内接（外切）多边形周长、面积、边心距的极限，等。

这类例子主要用于阐释在与圆相关的章节中出现的极限定义，以动静结合定义为主；既有正多边形“接近”圆的过程，也有相应两个量的“差”可以小于任意给定的量。

3.3.4“几何元素”型

主要有以下几种情况：

（1）长方形的短边连续变化，问边、角、面积的极限分别是多少？并提出一个很关键的问题：“为什么逐渐减小的边不能变成零？”

（2）增大等腰三角形的两腰长，则两底角不断增大，趋近直角，但是不能取到直角，这个过程中两底角的极限是直角；

（3）增大直角三角形的其中一条直角边，则其对应的角不断增大，趋近直角，但是不能取到直角，这个过程中该锐角的极限当然也是直角。

这类例子主要用于阐释动态定义，涉及几何图形（圆除外）的元素，出现在几何教科书中，强调“动”的过程。

显然，四类例子与定义类型有一定的相关性。如“一尺之棰”型可静可动，不同的形式对应不同的定义类型。

此外，这四类例子均符合定义中的“变量与常量不能相等”这一点，或许是人们认为“变

量不能等于极限”的原因之一。

4 讨论

4.1 数学家给出的极限定义

数学家们曾经给出如下的极限定义：

1655 年，英国数学家沃里斯（J. Wallis, 1616～1703）在《无穷小算术》中提出了函数极限的算术概念：它是被函数逼近的数，使得这个数和函数之间的差能够小于任一指定的数，并且当过程无限地继续下去，差最终将消失。[26]

1735 年，英国数学家罗宾斯（B. Robins, 1707～1751）在《论伊萨克·牛顿爵士的流数法以及最初比与最终比方法的本质与可靠性》一书中这样定义极限：当一个变量能以任意接近程度逼近一最终的量（虽然永不能绝对等于它），我们定义这个最终的量为极限。[27]

1821 年，法国数学家柯西（A. L. Cauchy, 1789～1857）在《分析教程》中写道：当一个变量逐次所取的值无限趋近一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就有多小，这个定值就叫做所有其它值的极限。[28]

约 1860 年，德国数学家魏尔斯特拉斯（K. W. T. Weierstrass, 1815～1897）认为上述定义不够明确而给出了现在所使用的定义：如果给定任何一个正数ε，都存在一个正数δ，使得对于区间$|x-x_0|<\delta$内的所有x都有$|f(x)-L|<\varepsilon$，则说$f(x)$在$x=x_0$处有极限L。[28]

可以发现，这四个的极限定义包括了动态、静态及动静结合定义；先有描述性定义，再有形式化定义；从有记载的极限定义演变为静态形式化定义跨越了两百多年，如图 6 所示。

图 6 数学家的极限定义

罗宾斯给出的定义强调了变量与其极限不能相等，有 38.7%的教科书的定义也体现了这一点；创立了极限理论的柯西所给出的极限定义是动态描述性定义；97 个定义中只有 11 个形式化定义，但与维尔斯特拉斯的定义相比还是有所欠缺的。

很明显，93 种教科书中的极限定义的演变体现了极限理解的历史相似性。

4.2 极限概念的认识论障碍

极限概念在历史上有四大认识论障碍[1]：（1）数形未能结合；（2）无穷大和无穷小的概念；（3）极限概念的定义形式；（4）极限能否取到？下面结合教科书中的极限概念对这四大认识论障碍进行分析。

（1）早期教科书所用的阐释定义的例子基本上是“路归路，桥归桥”，几何教科书用几何例子，代数教科书用代数例子。即使代数教科书的定义用几何例子来阐释，也没有将其转换成代数形式，基本没有实现“数形结合”。

究其缘由，或是因为把相应的几何例子代数化并不容易，且用描述性语言来说明定义更容易让学习者接受。

（2）动态定义一般用“越来越接近”或“趋近”这类词来表示变化过程，只有两个定义例外，一个用“足够的步数”、而另一个定义用“无穷多个连续的值”。而静态定义一般用“无论多小”或“小于任意给定的量”来表示变量与其极限的差。说明早期教科书避免出现“无穷大”和“无穷小”的概念。

（3）从极限定义形式的演变来看，总共三类 97 个定义中，描述性定义占有绝对优势，且贯穿始终。形式化定义首次出现在 1899 年，在考察的这些定义中出现较早，但其后处于弱势，随机出现，总共只有 11 个。68 种几何教科书总共只有 3 个形式化定义，而代数教科书 1903 年才出现形式化定义，但稍晚的代数教科书基本上都采用了形式化定义。

（4）93 种教科书中最早出现的极限定义强调“变量不能达到常量”，即变量不能等于极限，共有 36 种教科书提及，占 38.7%。这点随着时间的推移慢慢弱化、定义中不再要求，但阐释定义仍然是“不能相等”的例子，容易产生误解。

因此，93 种教科书中呈现的极限定义特征及其释例体现了人们对极限概念认识的历史相似性。

5 结论与启示

综上所述，早期教科书中的极限定义可以分成动态定义、静态定义、动静结合定义三类。这三类定义在数量上相差不大。这些定义以描述性定义为主，贯穿始终；形式化定义为辅，零星点缀。整体来看，93 种教科书中呈现的极限定义特征体现了人们对极限概念理解的历史相似性。

基于以上分析得到如下启示。

（1）对教科书编写的启示

M•克莱因认为：微积分入门不应涉及ε-δ语言，这种严格的语言属于高等微积分。[29] 在他编写的《微积分》中很好地体现了这一点。对于高中生来说，思维还处于初等数学思维的水平。93 种教科书中有部分是大学的教科书，给出的也是描述性定义，并未给出极限的形式化定义，因此教科书编写时给出的极限概念可以相对弱化“形式”，抽象程度也可以相应降低，如“ε-δ”或“ε-N”定义可以不放入教科书或放入阅读材料。

（2）对教学要求的启示

从极限思想的萌芽到极限理论的建立经历了数千年，那么多伟大的数学家对极限尚不能很快融会贯通，对学生当然也不能操之过急。93 种教科书中出现的极限定义不完善的地方，如“变量与极限的差小于任意给定的常数”、“变量不能等于它的极限”、没有涉及“某一变化过程”等，其实也是学生学习极限概念时容易出现的错误。了解了这些教科书中的极限定义以后，也就知道学生出现的这些错误是很正常的。在了解学生认知发展规律的前提下，在教学中对这些地方需要特别关注。

（3）对教学设计的启示

教科书的定义呈现方式中有示例（包括引例和举例）的占 84%，而极限定义的理解又是一个难点，所以不论教科书中采用何种形式，在教学设计时可以采用“引例+定义+举例”的形式。引例可以帮助学生对极限有一个初步的了解，形成概念雏形；随后给出极限定义，帮助学生对极限有一个统筹的观点，并与自己形成的概念雏形加以比较；而后举例说明，帮助学生理解极限定义、并修正自己的概念雏形，最终将极限定义内化。

英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806～1871）强调数学教学中的历史次序，认为教师在教代数时，不应该一下子把新符号都解释给学生，而应该让学生按历史顺序去学习符号。[3] 虽然早期教科书中的极限概念还不是很完善，但笔者以为正是这种不完善，才更符合人们的认知过程，据此可以确定学生对极限概念理解的认识论障碍。从极限思想的初步萌芽，到柯西初步创立极限理论，再到数学教科书的出版，历经数千年的时间，仍然没有ε、δ的影子，那么要让学生们短短数十分钟掌握“ε-δ”语言并不是一件容易的事情。美英早期数学教科书是一面镜子，从中折射出人们理解极限概念的困难，据此我们完全可以预测、并深刻理解今日课堂上学生的学习困难。

参考文献

[1] David Tall. *Advanced Mathematical Thinking* [M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2] 汪晓勤, 欧阳跃. HPM 的历史渊源[J]. 数学教育学报, 2003, (8): 24-27.

[3] 蒲淑萍，汪晓勤. 学生对字母的理解：历史相似性研究[J]. 数学教育学报，2012, (6): 38-42.

[4] 汪晓勤. 19 世纪末 20 世纪初美国几何教科书中的勾股定理[J]. 中学数学月刊, 2014, (6): 48-52.

[5] 李玲，汪晓勤. 美国早期代数教科书中的数列知识[J]. 中学数学月刊, 2014, (7): 53-56.

[6] Tappan E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co., 1872.

[7] Bradbury W. F. *An Elementary Geometry* [M]. Boston: Thompson, Brown, &.Co., 1880.

[8] Wells W. *University Algebra* [M]. Boston: Published by Robert S. Davis & Co., 1882.

[9] Wentworth G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn, Heath, & Co., 1885.

[10] Newcomb S. *Algebra for Schools and Colleges* [M]. New York: Henry Holt & Company, 1887.

[11] Wells W. *A Short Course in Higher Algebra* [M]. Boston: Leach, Shewell, & Sanborn, 1889.

[12] Macnie J. *Elements of Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1895.

[13] Gillet J. A. *Elementary Algebra* [M]. New York: H. Holt & Company, 1896.

[14] Dodd A. A. & Chace B. T. *Plane and Solid Geometry* [M]. Kansas: Press of Hudson-Kimberiyy Publishing Co., 1898.

[15] Reman W. W. *New Plane and Solid Geometry* [M]. Boston, U.S.A.: Ginn & Company, Publishers, 1899.

[16] Boyd J. H. *College Algebra* [M]. Chicago: Scott, Foresman & Company, 1901.

[17] Milne W. J. *Advanced Algebra for Colleges and Schools* [M]. New York: American Book Company, 1902.

[18] Colaw J. M. & Ellwood J. K. *School Algebra* [M]. Richmond: B. F. Johnson Publishing Co., 1903.

[19] Fine H. B. *A College Algebra* [M]. Boston: Ginn & Company, 1904.

[20] Smith C. *Elementary Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company; London: Macmillan & Co., 1904.

[21] Schmall C. I. & Shack S. M. *Elements of Plane Geometry* [M]. New York: D. Van Nostrand Company, 1904.

[22] Rietz H. L. & Crathorne A. R. *College Algebra* [M]. New York: Henry Holt & Company, 1909.

[23] Hart C. A. & Feldman D. D. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1912.

[24] Wilczynski E. J. & Slaught. H. E. *College Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1916.

[25] Wilson N. R. *College Algebra* [M]. New York: Oxford University Press, 1930.

[26] M・克莱因. 古今数学思想(第一册) (张理京等译). 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[27] M・克莱因. 古今数学思想(第二册) (石生明等译). 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[28] M・克莱因. 古今数学思想(第三册) (邓东皋等译). 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[29] Alexanderson G. L. & Kline M. An Interview with Morris Kline: Part 1 [J]. *The Two-year College Mathematics Journal*, 1979, 10 (3): 172-178.

实证研究

高一学生关于平面概念的意象*

沈中宇[1] 沈金兴[2]

（1.华东师范大学数学系，上海, 200241; 2.浙江省桐乡市凤鸣高级中学，桐乡, 314500）

1 引言

“平面”是高中数学立体几何中学生正式接触到的第一个抽象概念。人教版《数学 2》（必修）从生活情境引入平面，并利用生活中的实例引出平面的性质，这样的设计突出了平面的生活气息，但从生活中的平面抽象到数学中的平面，学生在对平面的进一步认识上存在障碍[1]。在教学中，受希尔伯特几何公理体系的影响，平面概念是作为不加定义的原始概念出现的。于是，教师通常忽视此概念的教学以及学生的原有认识[2]。

实际上，数学教育家早就认识到，人的头脑并不是一个单纯的逻辑实体，其内部复杂运行方式与单纯的数学逻辑不同，因此，我们必须区分正式定义的数学概念和它们在我们认知过程中所持有的形式。基于此原因，20 世纪 80 年代初，D. Tall 和 S. Vinner 区分了概念定义和概念意象，概念意象是与某个概念相关的整个认知结构[3]。概念意象包括关于这个概念的心理图像（概念的视觉表征和符号等）和与这个概念相关的性质。概念意象建立在个体的所有经历之上，随时间而变化，了解学生的概念意象对我们非常重要，因为它不仅可以让我们更好地了解学生，同时对我们的教学也有促进作用[4]。

为了深入了解学生对平面概念所持的原有观念，克服学生学习平面的障碍，更好地进行教学，我们需要回答一下问题：未学过“平面”的学生对此概念持有什么样的意象？由此我们可以得到什么教学启示？

2 研究方法

2.1 样本的选取

问卷调查的对象来自于一所普通高中的高一学生共 260 名。他们刚从初中升入高中不到一个月，对高中数学知识还知之不多，基本上停留在初中所学的数学内容，故学生的头脑中

*上海市教育科学研究重大项目 “中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 系列论文之一。

还没有三维空间的立体感，只有二维的平面几何印象，很适合于了解学生关于立体几何中的基本概念“平面”的原始意象。

在这 260 名学生中再抽取 5 人进一步访谈，按照性别划分，则男生 3 人，女生 2 人。按照学习成绩划分则优秀 2 人，良好 2 人，中等 1 人。

2.2 研究工具

问卷调查的测试题为：当你看到“平面”这两个字时，你会想到什么？把你想到的写在下面的横线上（已经画好 6 条横线），有多少写多少，不够的可自行添加横线。

访谈的问题为“你写的这个内容是怎么想到？”，主要目的就是进一步了解学生内心的真实想法。

2.3 问卷调查与访谈的实施

问卷测试安排在自修课上进行，且全部有效回收。访谈安排在测试之后的一周进行，此时已统计好了所有学生的回答，并已分类。所以根据回答类型，分别选择了不同程度的学生。先让他们回忆当时的回答，再进行询问，对访谈进行全程录音并进行转录，以供继续研究。

3 测试结果

3.1 问卷调查的结果

学生共给出了 1110 条回答，人均 4.27 条，其中最少的写出 0 条，最多的则写出了 8 条。这些回答可以分为以下 7 类：生活类、旧有知识类（简称旧知类）、图形类、物理属性类（简称物属类）、几何属性类（简称几属类）、关系类和想象类。

其中生活类是与生活中学生所遇到的平面原型相关的回答，旧知类是指与学生之前学过的数学知识相关的回答，图形类为与平面图形相关的回答，物属类是与生活中平面原型所具有的一些物理特征相关的回答，几属类是与平面的几何属性相关的回答，关系类是和平面与点、线、面和空间之间关系相关的回答，想象类是与平面概念距离较远的一些回答，图 1 给出各类意象出现频率的分布情况。

每位学生所持意象的丰富程度不同，最少的没有给出，最多的则给出了 6 类，平均每人写出 2.83 类，图 2 给出了各类别数的分布情况。

接下来对每类的具体情况进行描述。

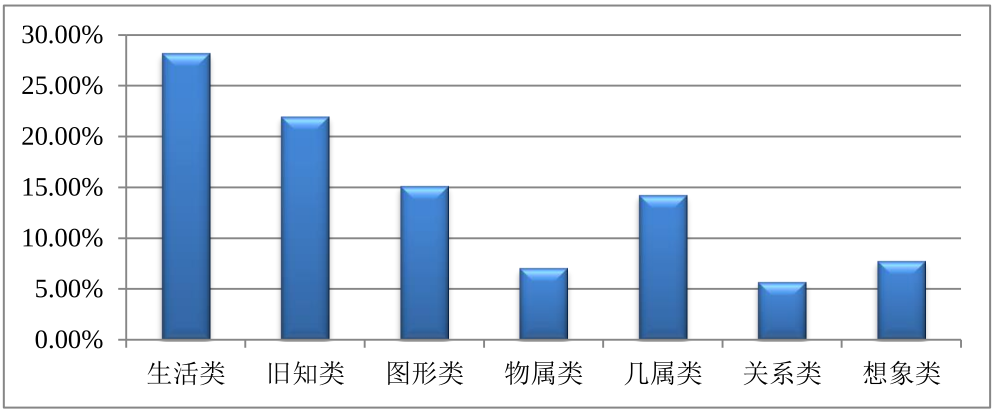


图 1 不同回答类型的频率分布

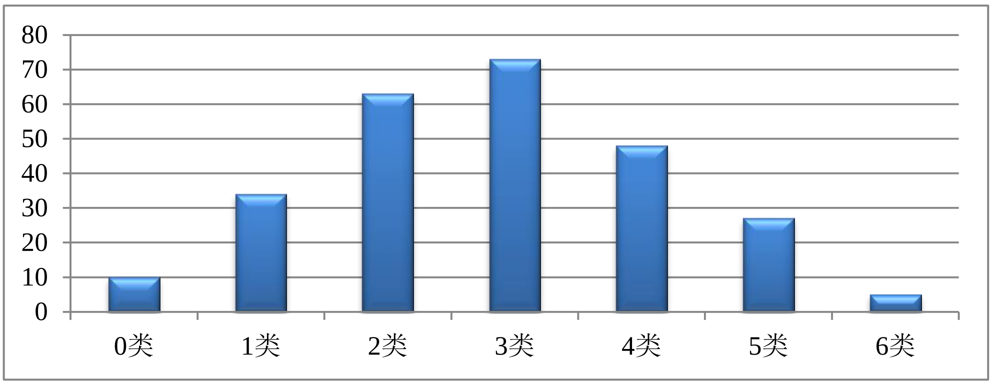


图 2 各种类别的分布情况

3.1.1 生活类

生活类所占的频数是最多的，有 313 条（占 28.20%）。此类为生活中学生所遇到的平面原型，主要包含以下几种情况。

日常生活中常见的带有平面特征的物体（频数为 216）：“桌面”、“地板”、“墙壁”、“地面”、“纸面”、“玻璃”、“黑板”、“平板电脑”等。

带有平面特征的自然景观（频数为 73）：“海平面”、“河面”、“湖面”等。

比较特殊的例子（频数为 24）：“银河系”、“动画”、“物体的某个面”、“物体与地面的接触面”、“图案”等。

3.1.2 旧知类

旧知类是所占频数第二多的类别，有 244 条（占 21.98%）。此类为学生之前学过的与平面相关的数学知识，可以分为平面几何的知识和代数的知识两大部分。

平面几何知识（频数为 153），其中占的比较多的回答是与平面相关的“点”、“线”以及平

面几何中关于点和线的相关命题（频数为 66）。如“平面上两条直线与第三条直线平行，则这两条直线平面”、“过一点只有一条直线与另一条直线平行”等。其余还包括由平面的“平”字联想到的“平角”、“平行线”、“平面图”等，其中一个面为平面的立体几何图形如“立方体”、“多面体”等。其余还有“立体几何”、“三维空间”、“几何作图”等。

代数知识（频数为 91），其中所占较多的回答是“平面直角坐标系”，其次是由此联想到的“抛物线图象”、“函数图象”、“数轴”、“坐标轴”等。

3.1.3 图形类

图形类所占的频数也比较多，有 168 条（占 15.14%），此类中有直接回答为“平面图形”（频数为 81），也有写特殊的平面图形（频数为 86）如“圆”、“三角形”、“长方形”等，还有直接画出平面图形（频数为 1）的，如直接画个长方形在横线上。

3.1.4 物属类

物属类有 78 条（占 7.03%），在此类中，学生写出生活中平面原型所具有的一些物理特征。可以将其分为关于“平”的特征、关于“大小”的特征、关于“厚薄”的特征，每类的具体表现如下。

关于“平”的特征（频数为 57）：“不能弯曲”、“没有弧度”、“平的”、“水平的面”、“光滑的面”、“没有起伏”、“扁平”等。

关于“大小”的特征（频数为 7）：“很广”、“很大”、“无边际”、“任意方向”等。

关于“厚薄”的特征（频数为 14）：“极薄”、“侧面看是一条线”等。

3.1.5 几属类

几何属性类有 158 条（占 14.23%），此类中，学生对平面的几何属性进行了一定的抽象刻画。可以将这些刻画分为 4 类，第一类是关于平面宏观几何性质的刻画，第二类是平面微观几何性质的刻画，第三类是对平面抽象性质的刻画、第四类是一些对平面性质的错误刻画。

关于平面宏观几何性质（28 条），这类性质包括平面的运动以及平面的上位概念，具体表现有：“旋转”、“平移”、“位置”、“一个面”、“表面”等。

关于平面微观几何性质（10 条），这类性质包括对平面构成的刻画，具体表现有：“由点组成”、“以点概面”、“点、线构成”等。

关于对平面抽象性质的刻画（110 条），包括了对平面无限延展性和无厚度两个特性上的认

识，具体表现有：“二维”、“没有厚度”、 “非立体”、“没有长度”、“可延伸”等。

关于对平面性质的错误刻画（10 条），主要是没有对平面无限延展性这一特性的正确认识，具体表现有：“只有长和宽的面”、“封闭图形”、“限定范围”、“面积”、“不含点线”等。

3.1.6 关系类

关系类有 63 条（占 5.68%），主要是对平面与点、线、面和空间之间关系的描述与刻画。主要可以分为 2 类，第一类是对点、线、面之间的空间状态的描述，第二类是平面与点、线、面之间性质的描述。

对点、线、面之间的空间状态的描述（41 条）包括：“平面与空间”、“同一空间”、“多个平面组成的空间”、“正方体的各面”、“平面与平面平行”、“平面与平面垂直”、“垂直于平面”、“直线与平面”、“平面与平面相交”等。

对平面与点、线、面之间性质的描述（22 条）包括：“在同一平面上”、“不在同一平面上”、“确定一个平面”、“平行的线在同一平面上”、“同一平面上的直线相交或平行”、“直线所在的平面”等。

3.1.7 想象类

想象类有 86 条（占 7.75%），主要是对平面一些上层思考，或者与平面概念距离遥远通过想象得到的一些图像。主要可以分为 3 类，第一类是对平面的上层思考，第二类是与平面基本无关的图像，第三类是与平面的物理属性联想到的性质。

关于平面的上层思考（21 条），具体表现有：“只是一个概念”、“什么是平面”、“平面从何而来”、“没有真正意义的平面”、“抽象”、“数学”。

与平面字面相关（56 条），具体表现有：“平面游戏”、“平面模特”、“平面设计”、“分布”、“想象”、“空白”、“单调”、“乏味”、“数学题”、“三体”、“面条”等。

对平面物理属性的联想（9 条），具体表现有：“镜面反射”、“视线的范围”、“平抛的物体运动轨迹是抛物线”等。

3.2 访谈的结果

通过访谈，进一步了解到了学生心中的真实想法。对学生心中的“平面”意象原型归纳，主要来自于以下五类。第 I 类意象原型来自文字直观，如学生说：“因为有‘平面’这两个

字，所以让我想到了平面直角坐标系、平面图形”等。第 II 类意象原型来自生活中类平面的物体，如桌面、墙面、黑板面，地面等，学生说：“这些都是我的生活中随时可见到的象平面的物体”。可见学生的实物意象也不是空穴来风，而是与学生密切相关的生活原型，因此学生整天生活着的空间：教室里的各种类平面物体就成了学生写得最多的。第 III 类意象原型来自兴趣爱好，如有一男生写了“魔方的一面”，问他怎么想到的，该生回答：“我喜欢玩魔方，就自然想到了”；再如一女生，她写了“平面模特、平面设计”，问她时说：“前面两个字‘平面’是由题中‘平面’两字想到的，后面的‘模特、设计’是因为平时自己喜欢看服装设计类的杂志，爱好这方面而想到的”。第 IV 类意象原型来自数学中的抽象，如“没有立体的画面”、“正方形”、“正文体的一个面”、“由线成面”等，当问到是何原因想到这些时，学生回答：“以前数学中学到的一些象平面的东西”。第 V 类意象原型来自其他学科中的抽象，如“镜面反射”、“平坦的光滑面”等，学生说“平面无厚度，无凹凸，让人想到物理中的光滑面”。

访谈中表现出来的学生对平面意象的原型，完全依赖于学生各自体验到的客观物体或学过的学科知识经验，它的表征形式也与个人经历息息相关，包括学生的兴趣特长和爱好，同时也验证了辨证唯物主义中的哲学观点：“物质决定意识，意识是客观事物的主观反映”。所有这些也为平面教学带来某些启示。

4 结果分析

4.1 学生对平面认识的初步分析

从以上结果可以发现，生活类、旧知类和图形类是学生持有最多的前三个意象，占到总条数的 65.32%，因此可以看出学生对于平面概念的意象主要有两个来源，一方面来自于生活实践，对应的是生活类。另一方面来源于之前所学的数学知识，对应的是旧知类和图形类。其中生活类中出现最多的还是学生日常生活中接触到的物体，旧知类中出现较多的是平面几何中的知识。图形类则说明了学生对于平面的心理图形基本上是一些具体的图形。通过访谈部分学生，得知学生填写最多的是这三个意象是由于受到了“平面”这两个字以及日常生活的启发，而物属类、几属类、关系类则主要来源于学生的抽象思维。

物理属性类中出现最多的是学生对于平面中“平”的特征的描述，说明这一特征在学生心目中主要体现在生活中出现的各种与“平”相关的语言中，如平坦、没有起伏等。

几何属性也是学生中出现较多的一种回答，其中学生对于平面属性认识比较清楚的是它没有厚薄的特性，“二维”这个词出现的比较频繁，说明学生对于平面没有厚度这一特性认

识的比较准备，而对于另一个无限延展的属性，认识到的学生则相对较少，甚至出现了平面具有大小、封闭图形等错误的认识，这可能受到了学生之前将平面对应为具体图形的影响。

对于关系类的描述相对较少，其中比较多的体现在学生将平面与空间进行对比，将平面作为立体图形的一个面上，这也与学生之前学过的一些简单几何体有关。

想象类的描述则出乎意料的相对较多，说明高中生也具有一定的想象能力，对于没有学过平面概念的学生，他们的答案并不一定是常规的，其中值得注意的是，有一部分同学对于平面概念具有一些元认知的属性，能思考平面到底是什么，平面从何而来等具有哲学意义上的问题。

4.2 学生对平面概念的历史相似性

平面的概念在历史上经过了漫长的发展，早在公元前 5 世纪，古希腊哲学家巴门尼德（Parmenides）对平面概念就已作过刻画[5]，在这之后，欧几里得（Euclid, 前 3 世纪）、古希腊数学家海伦（Heron, 约公元 1 世纪）、英国数学家辛松（R. Simson, 1687～1768）、法国数学家傅里叶（B. J. Fourier, 1768～1830）、德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646～1710）、德国数学家希尔伯特（D. Hilbert, 1862～1943）等都对平面概念作过刻画。

巴门尼德将平面定义为“一个二维对象、直的表面”，欧几里得将平面定义为“与其上直线一样平放着的面”，海伦将平面定义为“平面是具有以下性质的面，它向四周无限延伸，平面上的直线都与之相合，且若一条直线上有两点与之相合，则整条直线在任意位置与之相合。”，辛松的定义与海伦的类似，傅里叶对平面的定义为“平面由经过直线上一点且与直线垂直的所有直线构成”，莱布尼兹将平面看成“平面是与两点等距离的点的集合”，希尔伯特将平面作为不加定义的量。

已有研究表明，非数学专业的毕业生，如社会学家、小学老师等工作人员对平面的理解具有历史相似性[6]，如下表所示，根据本次测试来看，发现了未学过平面概念的学生对平面的概念意象与历史上这些数学家想法也非常相似，具有显著的历史相似性。

表 1 学生对“平面”概念的历史相似性

学生对“平面”的概念意象	历史上数学家的想法
二维（几属类）、表面（几属类）、平的（物属类）	一个二维对象、直的表面（巴门尼德）
直线所在的平面（关系类）	与其上直线一样平放着的面（欧几里得）
可延伸（几属类）	平面是具有以下性质的面，它向四周无限延伸

	（海伦、辛松）
由点组成（几属类）	平面是与两点等距离的点的集合（莱布尼兹）
点线构成（几属类）	平面由经过直线上一点且与直线垂直的所有直线构成（傅里叶）
没有真正意义上的平面（想象类）	不加定义的量（希尔伯特）

4.3 学生对平面概念的认知发展水平

从学生的平面概念意象可见，抽象程度和处理相关线索的能力有鲜明的层次性，因此，可以利用 SOLO 分类法[7]将学生对平面概念的认知划分为五个水平：前结构水平、单一结构水平、多元结构水平、关联结构水平和拓展的抽象水平，前结构水平指学习者被情景中的无关方面所迷惑和误导，为以前所学的无关知识所困扰，对应的是想象类中很多无关的想象以及旧知类中以前所学的无关知识。单一结构水平指的是学生关注主题或问题，但只使用一个相关的线索，对应的是生活类、物属类和图形类，学生提取的线索分别为生活情境、物理属性和图形表征。多元结构水平指的是学生使用多个线索，却不能觉察到这些线索之间的联系，对应的是几属类，在此类中学生觉察到了一些相关的特征，如二维、点线构成等，但还较为零散，缺乏有机整合的能力。关联水平指的是学生能将线索编入总体框架中，对应的是关系类，此类中，学生已经可以系统的思考点、线、面与平面之间的位置关系，具有一定的整体结构。拓展的抽象水平代表一种更高水平的学习能力，代表学生有更强的钻研精神和创造意识，对应想象类中的关于平面的上层思考，这一类中学生认识到平面是一个概念、平面在现实生活中并不存在，概括考虑了新的和更抽象的特征。据此，可以将学生对平面的七类概念意象根据不同的抽象水平对应如下。

表 2 学生对“平面”概念的认知水平与概念意象的对应

平面概念的认知水平	学生的概念意象
前结构水平	与平面基本无关的图像（想象类）、对平面物理属性的联想（想象类）、旧知类
单一结构水平	生活类、物属类、图形类
多元结构水平	几属类
关联结构水平	关系类
拓展的抽象水平	关于平面的上层思考（想象类）

实际上这五个层次的划分和平面概念的历史发展也是类似的，人类认识平面也是从生活

中的具体实物以及具体图形出发，巴门尼德、欧几里得等将平面概念的“没有厚度”、“无限延展性”等核心性质突出出来，达到了较高的认知水平，经过历史的发展，最后由希尔伯特建立几何公理体系，从而将平面作为不加定义的量，用公理即各概念之间关系进行刻画，平面概念的抽象程度得到了的进一步提升。

将上述五个认知水平由低到高依次对应于水平 0、水平 1、水平 2、水平 3 和水平 4，并记为 L0，L1，L2，L3，L4。表 3 给出了各水平的分布情况。

表 3 学生关于平面的认知水平

认知水平	L0	L1	L2	L3	L4
频　数	309	559	158	63	21
频　率	27.84%	50.36%	14.23%	5.68%	1.89%

用 $n_i(i=0,1,2,3,4)$ 表示各水平的频数，相应的权重 $d_i(i=0,1,2,3,4)$ 依次为 0，1，2，3，4，则运用公式

$$\bar{d}=\frac{\sum_i n_i d_i}{n}\left(\sum_i n_i=n, i=0,1,2,3,4\right)$$

计算得到学生的平均认知水平为 $\bar{d}=1.03$，基本处于单一结构水平，这表明，高一学生对于平面的认知水平处于中等偏下，也说明学生经过 9 年的数学知识，已具备了一定的思维水平，但其立体几何认知水平存在很大的上升空间。

5 结论与启示

以上我们可以看到，在学生学习平面概念之前，高中生关于平面的概念意象可分为生活、旧知、图形、物属类、几属类、关系和想象 7 类，每位学生平均持有的意象为 2.83 类，学生基本能写出 3 类及以上的意象。学生的概念意象基本来源于生活与之前的教学，从某种意义上看，可以发现其中的历史相似性比较突出，而且基本可以将这些意象按照 SOLO 分类法分为几个认知水平，这与历史上平面概念的发展阶段也是类似的，并且高一学生对平面概念的认知水平中等偏下，因此我们可以得到的教学启示有以下几个方面。

首先，在学习平面概念之前，学生在生活以及之前的学习中接触了很多平面的原型，所以平面概念的教学可以建立在生活以及旧有知识的基础上进行，但也需要注意的是生活中形成的一些观念对平面概念的进一步学习具有阻碍作用，其中尤其要注意的是学生容易将生活中平面原型具有面积、固定范围这一特点迁移到学习中，阻碍平面无限延展性的学习。在引

入生活实例的时候可以让学生提取其中的关键属性如“平”、“很薄”、“很广”，为之后进一步的抽象做准备，也可以让学生从学过的一些简单立体图形中体会平面的概念。

其次，由于学生对平面概念的意象具有丰富的历史相似性，所以可以考虑融入数学史的角度进行教学，将学生的理解与历史上数学家的思想相对应，可以让学生感受到概念的由来，知道一个概念不是凭空掉下来在教科书中出现的，而是经过几千年的演化而来，同时也增强了学生的数学自信，他们的想法与历史上数学家的想法一致。

最后，荷兰的著名数学教育家弗赖登塔尔说过：“与其让学生学习公理体系，不如让学生学习公理化……一句话，与其让学生学习数学，不如让学生学习数学化”[8]。从学生关于平面概念的意象中我们可以看到学生不同层次的认知水平，这也是对平面概念进行数学化的过程，从中也可以感受到了与平面概念历史发展惊人的相似，故可在已有的数学认知基础上安排教学，这就给我们的教学设计提供了参考，可以对平面概念的历史发展阶段进行重构，融入到我们的教学过程中，注重学生的自主探究和数学化的过程，从而真正实现学生对平面概念的深入理解，同时也获得宝贵的数学活动经验与能力。

参考文献

[1] 蒋亮. 对“平面”概念教学的若干思考[J]. 中学数学教学参考, 2016(1-2):14-16.

[2] 徐章韬. 基于数学史的平面概念的教学案例设计[J]. 数学通讯, 2009, 2. 13-15.

[3] Tall D,Vinner S.Concept image and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1981, 12: 151-169.

[4] Vinner, S. Concept definition, concept image and the notion of function [J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1983, 14(3): 293-305.

[5] Zormbala, K., Tzanakis, C. The concept of the plane in geometry: elements of the historical evolution inherent in modern views [J]. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 2004, 3(1-2): 37-61.

[6] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid’s Elements* [M]. Cambridge: The University Press, 1968: 171-176.

[7] 蔡永红. SOLO 分类理论及其在教学中的应用[J]. 教师教育研究, 2006(1): 34-40.

[8] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 1995: 9.

HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展

——以“角的初步认识”为例

岳增成

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引 言

自 1972 年成立以来，因其在学生身上逐渐体现出来的知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效等教育价值，HPM（History and Pedagogy of Mathematics）受到了越来越多的人的关注，也为越来越多的国家所认可，因此，数学史作为教育理念、作为课程素材已出现在中小学课程标准和各年级教科书当中。然而，数学史在一线教学中还存在“知不易、行更难”的窘境，因此，其教育理念不能通过对期望课程、期望实施课程的设计，经由实施课程，在学生身上体现出来。这些问题的出现，与课程的主要实施者——教师的数学史素养偏低密切相关，[1]很多研究者已经意识到了这一点，并着手于 HPM 与数学教师专业发展关系的研究，比如李国强、蒲淑萍、吴骏、王科等运用行动研究、实验研究、设计研究等方法对 HPM 与中学数学教师的专业发展进行了系统研究，证实了 HPM 对中学数学教师专业成长的促进所用，[2-4]汪晓勤、吴骏、洪万生、苏意雯等通过个案研究，得到了相同的结论。[5-8] 可见，HPM 能够促进中学数学教师的专业发展。但 HPM 与小学数学教师的专业发展关系如何？特别地，HPM 案例开发对小学数学教师产生怎样的影响？后者是前者的基础，同时也就是本研究要解决的问题。

2 研究方法

本研究的对象（以下简称 L）是一名小学数学教师，2013 年毕业于上海某工程类大学工科专业，工作 3 年有余，目前正在攻读在职教育硕士。读书期间，没有修读过与数学史有关的任何课程，只是听过几次有关数学史的讲座，对于讲座内容已没有印象。

“角的初步认识”是沪教版二年级第二学期的内容。在案例开发过程中共收集到了 9 个不同的教学设计，根据其出现的前后顺序将其分为了三类：基础设计（下文简称 BD），即没有将数学史融入的常规设计，数量为 1；试教前教学设计（下文简称 TTD），即从尝试将数学史融入教学设计开始到第一次试教前出现的教学设计，数量为 3；正式上课教学设

计（下文简称 FTD），即从试教开始到正式上课前，修改完善供正式上课时使用的设计，数量为 5。录制了 3 次试教、1 次展示课总计 4 节课的视频，同时对第一次试教后的研讨进行了录音，对正式上课后的研讨进行了录像，在授课结束后结合整节课的设计、教学对 L 进行了长达 1 个小时的访谈，并且保留了课例开发过程中的 QQ、微信等交流信息作为辅助材料。

2.1 教学设计分析框架

教学设计是把学习与教学原理转化成对于教学材料、活动、信息资源和评价的规划这一系统的、反思性的过程，[9]因此对同一教师同一主题下不同版本教学设计的分析将有助于厘清教师教材把握、活动设计、资源使用、评价观念等的变化。鉴于此，本研究将对 L 不同版本教学设计的主要内容进行梳理：结合“角的初步认识”这一主题的教学内容，将从教学目标、课堂内容、数学史的运用三个方面进行分析，其中课堂内容的分析将按照教学环节进行，数学史的运用方式除了附加式、复制式、顺应式、重构式[10]一种分类方法外，还根据学生能否感受到数学史的存在将其分为隐性运用、显现呈现两种方式。在此基础上，主要结合对 L 的访谈，梳理出每一部分设计发生变化的原因。

2.2 教师转变分析模型

本研究将考察 L 在开课前后的变化，这在一定程度上反映出了 L 的专业发展。数学教师的专业发展包括知识、信念、能力等方面。其中，教师的知识可以用美国数学教育家鲍尔提出的 MKT 理论来刻画。所谓 MKT 指的是“完成数学教学工作所需要的数学知识”[11]，其组成成分如图 1 所示。

3 教学设计分析

3.1 教学目标

在 FTD 中，L 从三维目标的角度设置了如下教学目标设定为：（1）能够辨认直角、锐角和钝角；（2）知道角的大小只与它两边张开的程度有关，而与所画出的（部分）边的长短无关；（3）根据学生对角的理解中存在的历史相似性原理，从角的质、量、关系等视角理解角及其大小；（4）经历角的生成及大小比较的重构过程，形成积极的情感体验。但在 BD 中，

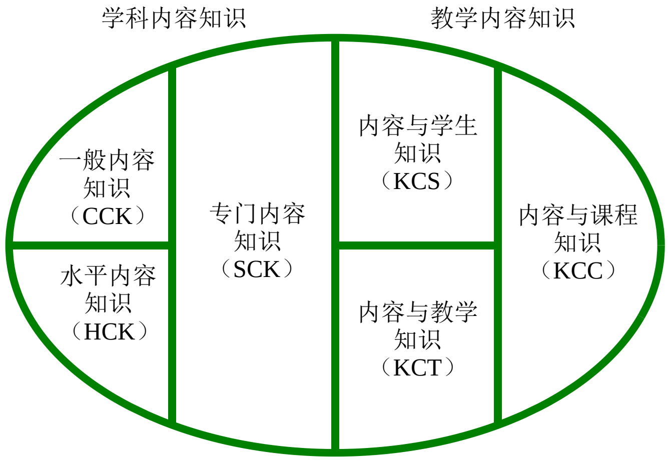


图 1 数学教师 MKT 的结构

只有（1）（2），在 TTD 中，除了（1）（2）外，还有一条与（3）相近，即根据学生对角的理解中存在的历史相似性，从角质的视角理解角的大小以及认识钝角、直角和锐角，但这条目标的设定存在一定的问题，因为角的大小是从量的角度来理解的，显然不是从质的角度出发。

从教学目标的设计来看，L 经历了从一维（知识与技能）、到二维（知识与技能、过程与方法）、再到三维的过程，可见 L 对教学目标的定位正在发生着转变，正如 L 所言：

教学目标的定位是结果导向的，如果真的是看中小朋友对知识的理解和思维的发展的话，那肯定是给他一些探究的机会好，但是如果我看中的是知识，马上就考试了，我要这个结果，这个成绩的话，我肯定就不给他们探究机会，直接告诉他们定理是什么。

但是我是很偏向小朋友有一个很高的思维水平，因为他的思维活动慢慢锻炼上去的话，那些结果肯定不是重要的事情，因为早晚他会知道结果的。

而且 L 能较好地将数学史的运用与目标定位进行了结合，比如目标（3）（4）中体现出了运用数学史的历史相似性原理与将数学史融入数学教学的重构方式，而意图则是引导学生像古人一样从质、量、关系三个方面认识角，获得积极地情感体验。

3.2 教学内容

表 2 给出了各教学环节的内容安排。

导入环节的设置以复习旧知、引出新知为目的，与 BD 相比，TTD、FTD 更强调学生已有的生活经验与主观感受，但与 TTD 相比，FTD 更有利于学生回忆起已有的角的定义，这也正如第一次试教后，Z 教师（L 所在学校的数学教研组长）提到的：

引入时，没有出现已经学过的角的定义，忽略了学生的认知起点。

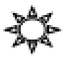
表 2 教学过程各环节的内容设计

	基础设计	试教前教学设计	正式上课教学设计
导入环节	从构成杨浦大桥的角中揭示课题，复习以学的角、直角	生活中的角，画一个角，并形容它（试图让学生从质、量、关系进行描述）	生活中的角，画一个角（学生已有角的定义），并形容它（试图让学生从质、量、关系进行描述）
角的大小比较	教师直接给出了三类角的大小关系	借用“鸟妈妈喂鸟宝宝，谁的嘴巴张开的大，先喂谁”，引出角的大小比较；学生给出喂鸟宝宝的顺序后，再利用直接法探究比较角大小的方法。	借用“鸟妈妈喂鸟宝宝，谁的嘴巴张开的大，先喂谁”，引出角的大小比较；学生给出喂鸟宝宝的顺序后，再利用直接法、间接法探究验证角的大小比较的方法。
钝角、锐角的定义	学生画角，并对所画的角进行分类；学生用活动角来表示锐角、直角、钝角，并闭上眼睛感受角，用手比划角	对鸟宝宝的嘴巴形成的角进行分类，引导学生给出锐角、钝角的定义，并让学生探究为什么叫锐角、钝角	对鸟宝宝的嘴巴形成的角进行分类，引导学生给出锐角、钝角的定义，并让学生探究为什么叫锐角、钝角

在角的大小比较环节，从无情境下直接给出三类角的大小顺序，到学生对鸟宝宝张开的嘴巴大小感性认识及对感性认识的直接比较的探究验证，到最后学生对鸟宝宝张开的嘴巴大小感性认识及对感性认识的直接、间接比较的探究验证可以看出，教学设计发生了较大的改变，其原因与数学史的融入有密切的关系，“如果没有数学史，我会引导学生直接与直角进行比较”，因为教材与教学参考用书中没有角的大小的直接比较，所以“平时的上课就是按照教参的建议，运用直角三角板间接的进行比较，而且我会突出强调利用直角三角板这件事”：这说明了数学史为 L 的教学带来了启示，特别是探究活动的设计，同时暴露了 L 设计教学时，参考资源的局限性。

在锐角、钝角定义环节，由于 L，包括上面提到的 Z 教师不了解为什么叫锐角、钝角，“我不确认，为什么会这样说呢，因为对于它们为什么叫钝角，为什么叫锐角，我不是很在意，说实话我不懂，但是我想让他们记住为什么叫钝角，为什么叫锐角，我不想让他们搞混了”，因此在 BD 中 L 试图让学生操作活动角、闭上眼睛来想象角、用手比划角来达到理解角、厘清角的目的，而了解了相关数学史后，L 觉得小朋友能自己给出答案，因此改为学生自己探究，增加了学生解决问题与自我表达的机会。

表 3 教学过程各环节的内容设计

	基础设计	试教前教学设计	正式上课教学设计
课堂练习	1）找出滑梯中的角，并对这些角进行归类；2）在给出了 6 个图形中，先判断是不是角，再对角进行归类；3）三是找出美术简笔画题材中的角，并进行分类。	借用鸟窝所在的树上树杈形成的 5 个角，让学生对角进行分类。	呈现了 8 个角，其中一对用来作为角的大小性质探究中使用，一个与直角很相近的锐角，一个与直角很相近的钝角，用来巩固角的大小比较。
角的大小的性质	两把一样的三角尺，一把大的三角尺与一把小的三角尺	借用鸟妈妈、鸟宝宝嘴巴形成的角张开程度一样但边长不一样来探究角的大小的性质	利用练习中两个张开程度一样但边长不一样的角来探究角的大小的性质，并让学生回答自己提到的“黑板上的角那么大，我手上的角这么小，怎样去比较”的问题
动态角的定义	无	在一个由定点出发很多角角构成静态图中，让学生找出  在哪些角当中	先从一个锐角出发，让其一边绕顶点旋转形成直角、钝角，直至形成平角，让学生描述角的变化过程，并找出  在哪些角当中。
小结	今天这节课你有什么收获？（没有预设学生的回答）	今天这节课你有什么收获？（没有预设学生的回答）	这节课你学到了什么？预设了学生的回答，并总结道“小朋友们你们知道吗？在这节课里小朋友们和古代一些伟大的数学家一样，能从多个角度认识了角，并用自己的语言描述一个角，甚至研究了锐角钝角名称的由来，真的是太了不起了。”

结合本节课的教学目标，TTD、FTD 中练习题的设置包括角的分类与大小比较，但 BD 中的 3 个练习仅是找出图形中存在的角，并进行分类；对于 TTD 到 FTD 设计上的改变，L 说：

刚开始的时候设计了五个角，这五个角的边长的长度，开口方向差不多都是一样的，学生很容易就分辨出来了，而且没有什么难度，然后角的大小与角的两边长短无关，与张开程度有关这部分，单独拿出了两个角来进行比较，但是讨论中有老师提出干脆就从这些角中拿出两个角进行比较，那就更有连接性，连贯性，然后就进行了调整，第一次还加了一个平角，很希望把平角也隐在里面，然后告诉小朋友平角不属于直角、钝角、锐角，然而试教中却发现学生很容易将平角混淆，小朋友毕竟是不认识平角的，他们看到后就认为这是一条直线，他们认为它不是一个角，而且就整堂课而言，解释平角会花很长时间，因此还是把它舍弃了，但是最后在动态图中出现了平角，让小学生在动态的过程中知道它有一个平的过程，它是一个角，其实那并不是一个重点，它只是形成一下。

在角的大小的性质环节，FTD 是 BD、TTD 的结合体，因为试教过程中，在比较角的大小环节，有的学生提出了“大鸟的嘴是大，但是大鸟和小鸟的嘴张成的角一样大”“我的三角板这么小，怎样去量那么的角”，所以将这些作为生成性资源融入到了最终的教学设计中。动态角对小学初中阶段的学生而言是一个难点，因此有必要提前渗透角的动态定义，让学生有一个粗浅的认识，因此在 TTD、FTD 中试图将动态角融入其中，但在试教的过程中发现，在静态图形中达到这一结果是不可能的，具体见 3.3，因此有了最终的设计。

在小结部分，BD、TTD 都没有预设学生的回答，而教师很自然地认为学生会从知识、技能的角度来回答问题，学生也确实是这样回答的，事实上，由于在教学中显性地融入了数学史，具体见 3.3，因此有必要从三维目标的另外两个角度来总结这节课的内容，当然学生不一定能自己总结出来，所以教师应提供适当的帮助。

3.3. 数学史的使用

对于角，不同历史时期的数学家会有不同的看法，但概括起来主要包括质、量和关系三种模式，而且学生对角的大小的理解也无外乎这三种模式，对4-7年级的学生的调查发现，受教学的影响，前两种模式占主导地位，但即使受教学的影响，学生的理解仍存在一定的历史相似性。[12]基于学生认识角过程中存在的历史相似性，在TTD和FTD中都运用了重构的方式，即借鉴或重构知识的发生、发展历史，其中TTD中没有显性地运用数学史，而在FTD中，L考虑到增强学生学习数学的信心，拉近学生与古人的距离，以及小学二年级学生的接受程度，显性地融入了三处数学史，一处在角的大小比较之后，教师总结到“你们知道吗？有很多的数学家在比较角的大小的时候也是用了刚才小朋友们你们想到的方法，不仅想到了和直角比大小来区分角的大小，也发现在比角的时候，要将两个角的顶点和一条边分别重合，看另一边，哪个角叉开得大，哪个角就大。”一处在探究了为什么叫锐角、钝角之后，教师总结到“你们说的非常好，想法和古代一些伟大的数学家一样，他们也是因为小于直角的角尖尖的，很锐利所以称它们为锐角，因为大于直角的角不锋利，所以称它们为钝角。看来大家

都有成为数学家的潜力啊。”还有一处在总结中，具体见表3。

4 L 教师的转变

4.1 知识

教好数学需要哪些类型的数学知识？Morris等人认为MKT概念的提出为这一问题提供了最好的答案。[13]因此，通过课后L教师MKT构成与之前所具备知识的对比，将有利于梳理出L知识的变化。

通过图1已经知道，MKT有6部分组成。其中CCK是指除教学外，在其他背景下也使用的数学知识和技能，它为大众所熟知，包括角的分类，角的大小比较等，它属于基础知识、基本技能范畴，因此L的CCK在案例开发过程中没有发生改变。KCT是指对如何教授的了解和对数学的了解相结合的知识，包括如何组织、安排教学活动来解决下述的KCS，这在3.2, 3.3中已进行了论述。

KCS是对学生的了解和对数学的了解相结合的知识，本节课的KCS主要是学生对角的认识与古代数学家对角的认识相似，即学生也可以像古代数学家那样，从质、量、关系三个方面认识角，主要包括学生可以从量的角度定义锐角、钝角，能够从质的方面猜测出锐角、钝角名称由来的猜测，尽管书本上没有角的直接比较，但学生能够利用直接、间接方法比较角的大小，学生在认识角的大小的性质与角的动态定义时存在一定的困难。在进行数学史融入的教学设计前，除了学生对角的定义的认识外，L不能很好地把握学生的认知基础，这与L自身SCK的欠缺有着密切地联系，在阅读了已有研究成果后，特别是文献[12]，L对历史相似性有了一定的了解，KCS有了质的提高，一方面她意识到了学生与古代数学家对某些知识的认识存在相似性，这为教学设计提供了依据，另一方面学生所犯的错误，历史上一些伟大的数学家也曾犯过，因此当学生犯错误时，她的包容心增强了，耐心增加了，她学会了从学生的角度思考问题：

I：也就是你这样设计是有依据的？

L：不是，就是小朋友有一个探究的结果，这些结果是有依据的。本来我总觉得他们的结果是奇思妙想、天马行空的，哎你们怎么这么想呢，我无法理解他们的想法，但事实上，他们的这些想法是有依据的，因为它有历史相似性的依据，这对我来说是最大的印象，对我影响最大。

I：也就是从设计的角度来讲，你从历史相似性出发，你对为什么这样设计有了一定的了解？

L：是的。第一，让我们觉得小朋友的探究结果是有依据的，就是数学史让教师有一种

承载力去承载小朋友的探究，而不是你的探究不对，你要往这里探究。当我对数学史的理解更多了，那我包容的就更大了，包容的就更多了，更能理解学生为什么有这样的想法，它为什么有这样一些思维，它为什么有这样的结果，都是有数学史的依据的；第二，是让学生的想法在历史中有一个相似点，第三个在课堂设计中是让看似没有联系的设计更加有逻辑性，看似很松散的设计，让他们找到一种关联， 与逻辑的产生联系在一起，这种逻辑不仅仅是说我要完成这个课例，从更长远看这个知识点的达成，比如说这个知识的形成，更长远指的是这个知识点的前和后，这个知识它是从哪里来的，这个知识到后来又形成一个怎么样的知识，就是到哪里去，这个是更长远的。

表4呈现了SCK、HCK、KCC的具体内涵及与本案例相关的内容、课例开发前后的变化及相关证据。从表中可以看出，通过课例开发，L与本案例相关的SCK、HCK、KCC已趋向完善，但是相较于HCK，尽管L不能从将射线与角的定义结合起来，L与其它内容相关SCK、KCC还是十分的欠缺，她无法回答出任何一个有关其它主题的SCK，对数学史知识的认识停留在“缺乏将HPM 思想运用于课堂的数学史知识，材料‘无米之炊’的层次”[14]。

表4 L课例前后SCK、HCK、KCC的变化

MKT成分	具体内涵及与本案例相关的内容	开课前L的情况	开课后L的情况	相关证据
SCK	教学所特有的数学知识和技能，包括角的质、量、关系三个方面，特别是锐角、钝角名称的由来（质），角的大小比较的直接方法（量），角的动态定义（关系）等	L和Z不知道锐角、钝角名称的由来，由于课本中没有角的大小比较的直接方法，L不知道可以用直接的方法比较角的大小，也不知道从关系的角度来认识角	L掌握了与“角”相关的SCK，但其他主题的SCK，L知之甚少	I（我）：你知道小数为什么不是很小的数，为什么三角形不叫三边形吗？ L：不知道 I：斐波那契是谁？ L：不知道 I：无理数是什么？ L：无限不循环小数
HCK	对整个数学课程中数学主题之间的联系的了解，与“角”相关的HCK包括特殊角的认识、三角形的分类、角的动态定义等	L的知识系统是碎片化的，不能将本节课要学习的内容与前后内容进行联系	比较深刻地认识了三角形的分类，角的动态定义，但是不能较好地认识特殊角	I:学生会不会对书上的定义名称很感兴趣，想知道为什么会是这个名字，比如钝角和锐角？ L：……之后我教三角形的时候，因为有一部分是四边形，不是有几条边几个角组成的图形叫几边形嘛，……其实我也很好奇他为什么不叫三边形，而叫三角形。对于钝角三角形、锐角三角形其实也是很好的，我也不知道它为什么叫钝角三角形、锐角三角形。课堂设计时，就是让他们自己去探索一下，给他们一个表格，让他们填一下三角形的三角可以是什么，……那钝角三角形，也就是一个钝角两个锐角，那怎么起名字呢？然后就乱了……我就告诉小朋友这很好，那我们来看他们的不同点……
KCC	对课程大纲、课程标准有关要求以及有关	不能从三维的角度设计教学目标，	能较好地从三维的角度设计教学	I:在开发案例的过程中，你遇到了哪些问题？ L:我会知道向 I 要什么东西，但我不知道这个

教学材料的了解，包括教学目标、重难点的设计，以及数学史材料、数学史授课经验等的来源等	特别是设计与数学史相关的目标时存在一定的问题,不能找到与教学内容相关的数学史料,没有数学史融入课堂教学的经验	目标，与数学史相关的教学目标定位较为准确，但仍然找不到与教学内容相关的数学史料，有了数学史融入数学教学的经验	东西有什么用 L:那就是说首先你没有数学史这方面的材料了？ L:是的，没有 I:第二也就是给你材料了，你不会看？ L:是的不会看，看了我不懂，我懂了不知道用

4.2 信念

数学教师的信念是指教师在教育教学中所形成的对相关教育现象，特别是对数学以及自己的教学能力和所教学生的主体性认识，它影响着教师的教育实践和学生的身心发展，它包括数学信念、数学教学信念和数学学习信念。[15]

数学史融入“角的初步认识”的教学后，L 的数学信念、数学教学信念、数学学习信念以及数学史信念发生改变。就数学信念、教学信念而言，L 之前持有绝对主义的观点：

数学是一门非常理性且具有逻辑性的学科，因此在教学中也要具有理性和逻辑性，最好不要让数学教学产生任何的情感，而要以严谨、科学的态度对待数学。

但在课例结束后，她有了新的看法，

我觉得这节课给了我们很多启示，要带着一种感受在课堂上，这种感受不是说我不需要严谨、逻辑，而是从我的主观看，我对这个角是怎么理解，怎么感受的

就数学学习而言，她更了解学生这一学习主体。正如上文所言，她在认识到历史相似性的存在后，意识到学生犯错误是一件正常的事情，因此更加包容学生，更能从学生的角度思考问题，设计教学活动。

就数学史信念而言，L 不再视数学史为可有可无的课堂点缀，

（数学史）是有趣的东西，（内容包括）数学家是怎样了解数学的，怎样发现数学的，怎样用到常识当中的，如果上课真的要用到数学史的话，那就是把它当作一个故事，一个有趣的故事，然后学生觉得这么有趣的一件事情，没有想到要让课程一定与数学史产生化学作用，上课一定要用数学史。我觉得它是一个可有可无的东西，有，可以让小朋友觉得有意思，没有，也不影响我上课

而将数学史看作小学数学教学不可或缺的组成部分，

在研究这个课的时候，慢慢觉得数学史一定要用在这个课堂当中，体现在整个课堂当中我在讲知识点时，不是单独讲一个知识点，而是讲这个知识点在整个历史当中，或是在以后有什么作用。这给了我最大的帮助，……如果让我讲的话，我可能从教材的这样一个角度去处理，但是和团队谈论后，我发现其实它有多种多样的定义，然后把这些定义在课

堂中体现出来的话，或者在课堂中一点一点渗透出来的话，其实给小朋友撒了很多网，给他们想象和理解这个点，有更多的方向，就是让我觉得要把眼界放得更高点

L 高度评价了数学史对探究活动设计的重要性，她认为一方面数学史为学生带来了大量的探究机会，另一方面因为历史相似性原理的存在，数学探究的有了设计的依据，而有设计依据的探究活动会更有深度。此外，L 意识到了 HPM 的案例开发并不是一件容易的事，

就是你未必有那个基础，如果你不是完整的了解那段（历史），你想把它用处来，其实你是没有那个能力的。逻辑思维不够，常识不够，你的理解力也不够，就没有办法用出来。

但她并不惧怕困难，

I：有机会，你还会继续上这样的课吗?

L：当然会了，但是我还是喜欢探究为主的课，因为我特别喜欢与小朋友的思维产生碰撞，因为他们的想法真的是千奇百怪，特别好玩

5 结论

通过对“角的初步认识”不同阶段教学设计的分析发现，L 教师的目标定位更为准确，能将数学史与教学目标进行有机结合；在内容设计的过程中，能根据历史相似性将历史上数学家对角认识的质、量、关系三个方面隐性地融入到教学活动当中，让学生感悟角相关知识发展的和谐，同时为了促进学生的德育发展，将数学史显性地融入到了不同的教学环节，特别地，从量的角度设置了角的大小比较及角的大小的性质两个探究活动，让学生一方面沉浸在解决问题的过程中，另一方面体验到了问题解决带来的喜悦。

通过案例开发，L 对数学的看法由绝对主义观转变为了动态观，对数学史的看法也发生了正向的转变，数学史不再是可有可无的点缀，它是数学教学不可或缺的重要组成部分，特别是通过将数学史融入探究活动，不仅增加课堂的深度，更促进了学生对内容的理解。但从知识转变的角度看，尽管对“角的初步认识”这节课的相关知识有了较为深刻的认识，比如 KCT，L 通过多次教学设计的改进，无论是在活动设计方面，还是在数学史的使用方面都发生了明显的改善，但是仍存在着一些问题，特别是在 SCK 与 KCC 方面，这表明 HPM 案例开发能对教师信念、与案例相关的知识转变产生一系列的正向影响，但对于需要长期积累的 SCK 与 KCC 的影响不是太大。

这就启示我们可以通过两种路径的有机结合来利用 HPM 促进小学数学教师的专业发展：一是将 HPM 案例开发常态化，通过案例开发的任务驱动、在 HPM 学术共同体的帮助下促进教师 MKT 知识的累积、信念的转变、能力的提升；二是教师自身一方面需要通过大量阅读来增加数学史知识储备，对数学知识做到知其然也只其所以然，另一方面提升自身教

育取向数学史的研究能力，积累数学史与教学内容契合的经验，在不断尝试、探索中实现知识积累、信念转变、能力提升的目的。

参考文献

[1] 李国强.高中数学教师数学史素养及其提升实验研究[D]. 重庆：西南大学博士论文, 2010.

[2] 蒲淑萍. HPM 与数学教师专业发展：以一个数学教育工作室为例[D]. 上海：华东师范大学博士论文, 2013.

[3] 吴骏. 基于数学史的统计概念教学研究——以平均数、中位数和众数为例[D]. 上海：华东师范大学博士论文, 2013.

[4] 王科. HPM 视角下数学归纳法的设计研究[D]. 上海：华东师范大学博士论文, 2014.

[5] 汪晓勤. HPM 与初中数学教师的专业发展——一个上海的案例[J]. 数学教育学报，2013, 22 (1): 18-22.

[6] 吴骏. 初中数学教师 HPM 教学的个案研究[J]. 数学教育学报, 2016, 25 (1): 67-71.

[7] 洪万生. PCK vs. HPM：以两位高中数学教师为例[D]. 香港教育学院, 2005.

[8] 苏意雯. 数学教师以 HPM 促进专业发展之个案研究[R]. 数理教师专业发展学术研讨会, 彰化：国立彰化师范大学, 2004.

[9] Smith, P.L, Ragan, T. J. 教学设计 (庞维国等译) [M]. 上海：华东师范大学出版社, 2008.

[10] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012 (2): 1-5.

[11] Ball, D. L. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1990, 21 (2): 132-144.

[12] 皇甫华. 4-7 年级学生对角的理解[D]. 上海，华东师范大学, 2009.

[13] Morris, A. K. & Hiebert, J.. Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn?[J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2009, 40 (5): 491-529.

[14] 蒲淑萍，汪晓勤. 弗赖登塔尔的 HPM 思想及其教学启示[J]. 数学教育学报, 2011, 20 (6): 20-24.

[15] 冯振举，王慧扬子. 职前数学教师教学设计信念转变的个案研究[J]. 数学教育学报，2016, 25 (2): 59-65.

平面直角坐标系：从一维到二维的过渡*

岳 秋　张德荣

（上海市武宁中学，上海 200040）

在沪教版初中数学教材中，该内容出现于七年级第二学期第十五章第一节。在此之前，学生已经学习了数轴的知识。根据“数轴上的点与实数是一一对应的关系”，教材让学生猜想平面上的点与实数之间的关系。这种设计的优势是可以让学生快速掌握如何写出平面内点的坐标，但未顾及学生在从一维到二维转变过程中的认知困难，不能让学生深刻理解引入有序实数对的必要性，进而也不能让学生深刻理解为什么平面内的点和有序实数对是一一对应的关系。

有鉴于此，我们尝试从 HPM 的视角，将古代数学家创建直角坐标系的过程重现于课堂，引领学生经历笛卡儿发明平面直角坐标系的过程。拟定的教学目标如下：

（1）理解平面直角坐标系的有关概念，知道平面内的每一点都有唯一的有序实数对与它对应；

（2）会根据直角坐标系内点的位置写出它的坐标，体会数形结合的数学思想；

（3）重构平面直角坐标系的发生、发展历史，引发学生思维碰撞，培养学生的探索精神，并感受探索的乐趣，感悟数学文化之魅。

1 坐标系的历史概述

坐标系的历史可以归结为三个阶段。第一阶段是单轴的建立。费马（P. de Fermat, 1601～1665）和笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）通过坐标系，建立二元代数方程与几何曲线之间的关系。费马的侧重点是研究方程的曲线；则笛卡儿的侧重点是研究曲线的方程，两者分别是解析几何的两个基本方面。费马和笛卡儿只用了横轴，而未使用纵轴，纵坐标是斜的，横坐标和纵坐标都局限于正数范围[1][2]。

第二阶段是负坐标的引入。1655 年，17 世纪英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616～1703）对坐标系作了进一步的探索，有意识地引进负的横、纵坐标，这使得解析几何所考虑的曲线

*上海市教育科学研究项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 系列教学案例之一。

范围扩展到了整个平面[1]。

第三阶段是平面直角坐标系的建立。这是经过几何学家在长期使用中不断演变，不断使之更方便、合理，并且在此基础上定义了“坐标”、“横坐标”、“纵坐标”等相关术语[2]。

坐标系的创建，在代数和几何之间架起了一座桥梁。它使得几何问题可以用代数的方法来描述，代数问题可以借助几何图形来解决，由此形成了数形结合的思想方法。

2 教学设计与实施

2.1 设计问题情境，引发认知冲突

由于学生已经学习了数轴，所以我们就从数轴入手，运用笛卡儿发明坐标系的历史故事来设计教学情境，并把需要解决的数学问题融入到故事中。

师：笛卡儿是 17 世纪法国著名哲学家和数学家，他对现代数学的发展做出了重要的贡献。1619 年，笛卡儿所在军队的军营驻扎在多瑙河旁。11 月的一天，他因病躺在了床上，无所事事的他又想起了那个折磨他很久的问题——如何将平面上的点和我们的数联系在一起。天花板上，一只小小的苍蝇慢慢地爬动。笛卡儿想：如果我把苍蝇看成一个点，那么我怎么用数来表示下列苍蝇的位置呢?

问 1:如果这只苍蝇向右爬了 5cm,我们怎么用数来表示它的位置？如果向右爬 3cm 呢?

问 2:如果这只苍蝇向左爬了 5cm,我们怎么用数来表示它的位置？如果向左爬 3cm 呢?

问 3:如果这只苍蝇向上爬了 5cm,我们怎么用数来表示它的位置？如果向下爬 3cm 呢?

问 4：如果这只苍蝇先向右爬 3cm，再向上爬 5cm，那么我们怎样表示它的位置?

2.2 经历问题探索，架设数形桥梁

问题 1 和 2 是在一维的层面上，学生很容易用数轴的知识来回答这两个问题。然而问题 3 是一个过渡性的问题，设计意图是让学生意识到平面是二维的。问题 4 是真正引起学生认知冲突的问题，此问题也是本节课的难点，解决了此问题，学生就能真正理解为什么要用“实数对”来表示平面内的点。

关于问题 3，生 1 回答：“我觉得还是 +5，因为把数轴竖起来画的话，把向上看作正方向，可以分别用 +5 和 –3 来表示。”关于问题 4，我们安排了学生进行小组讨论。以下是小组讨论之后的教学片段。

片段 1

生：用 8 来表示，因为向右爬 3cm，用 3 来表示，向上爬 5cm 用 5 来表示，所以加在一起，用 8 来表示。

师：那么如果苍蝇先向右爬 4cm，再向上爬 4cm，那你怎么表示?

生：还是 8。

师：不同的位置，但是你却用一样的数来表示，同学们觉得这样可行吗?

生：不可行。

片段 2

生：用 3 来表示，因为是先向右爬了 3cm，然后向上爬了 5cm，然而向上爬的 5cm 是与数轴垂直的关系，是垂直于 3 的，所以用 3 表示。

师：那如果苍蝇先向右爬 3cm，再向上爬 6cm 呢?

生：还是用 3 来表示。

师：那么明明位置不同，你却用同一个数来表示，和刚才那位同学一样，大家再开动脑筋想一想。

片段 3

生：给前面同学加一点，用“5 垂直于 3“来表示；

师：非常好！这位同学用两个数来表示，那么老师再问一个问题，如果按照你的思路，那么如果这只苍蝇先向左爬 3cm，再向上爬 5cm，那么你怎么表示?

生：5 垂直于−3。

师：这位同学很棒，用两个数来表示点的位置，那么能不能再简练一点呢?

生：用垂直符号“5⊥3“。

师：这位同学们的方法已经非常接近数学家的方法了，数学家也是用两个数来表示平面内一点，那么我们一会就看看书本上是如何表示的。下面的同学还没有其他方法?

片段 4

生：我是在纸上向右画了 3cm，再向上画 5cm，然后连接苍蝇的起点，量出夹角为 57°，那么可以表示为北偏东 33°。

师：那么我任意在这条线段上取一点，你怎样表示?

生：还是北偏东 33°。

生：我们可以量出长度，用北偏东 33°，距离用 6.7cm 表示；

师：非常棒！这位同学也是用两个数来表示的，一个是度数 33，还有一个是距离 6.7cm。这两种表示方法，大家都是认可的，可见表示平面内的一个点必须要用几个数来表示？

生：两个数。

2.3 了解相关历史，激发学习兴趣

在上述探究过程中，教师只给出了横轴。教师指出：过平面上任意一点，作横轴的垂线，易于从数轴上读出横坐标，但纵坐标需要通过测量才能知道，因而，仅仅用一条轴的情况下，确定点的坐标比较麻烦。那么，如何才能更方便、快捷地得出点的纵坐标呢？结合前面的探究，引导学生添加另一根坐标轴——纵轴。

之后，讲授“平面直角坐标系”的定义，介绍坐标原点、坐标轴、x 轴、y 轴等概念。由于学生在上一环节，经过充分的讨论，以及学生也讨论出了作两条互相垂直的数轴来表示，所以学生对这些概念都比较好理解。

在直角坐标系内给出一个点 P，过点 P 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，x 轴上的垂足读数为 a，y 轴上的垂足读数为 b，那么点 P 的坐标就记为 $P\left(a,b\right)$。其中 a 是横坐标，b 是纵坐标。

师：请同学们比较一下笛卡儿在平面内用坐标表示一个点和刚才同学们讨论得出的第三种答案有什么异同?

生：顺序不同，我们是先说的竖直方向的长度，再说水平方向的长度；而书上是先说的水平方向的长度，再说竖直方向的长度。

师：非常棒，看来我们学生也有当数学家的潜质！数学家能发明出来的东西你们也能想出来，顺序的问题只是后来教材规定的。其实我们现在所学习的平面直角坐标系也是经过了漫长的发展。

接下来，教师简单介绍平面直角坐标系从没有负半轴的斜坐标系，到斜坐标系，再到平面直角坐标系的发展。同时也向同学们介绍了笛卡儿这位伟大的数学家，是他最早提出坐标系的概念，最先提出用代数方法解决几何问题。

选择在此环节介绍直角坐标系的历史和数学家笛卡儿，主要让学生了解直角坐标系的发展不是一蹴而就的，也是经过漫长的过程，不断随着人们的需求而完善起来的；同时也让学生感觉他们离数学家并不遥远，他们的想法或许和数学家很相似，只要勤于思考，人人都可以在数学上有所作为。

2.4 掌握基本方法，达成教学目标

至此，学生已经自主解决了如何用数来表示平面内的点的问题。但还需要让学生学会如何根据直角坐标系内的点写出点的坐标，以及让学生体会“实数对”的有序性，并了解坐标轴上的点以及原点的坐标特征。例 1 的设计意图就是让学生掌握根据点写出点的坐标的基本方法，在此基础上让学生体会“实数对”的有序性；例 2 让学生通过观察，自主总结出坐标轴上的点和原点的坐标特征。

例 1：写出图 1 所示直角坐标平面内各点的坐标。

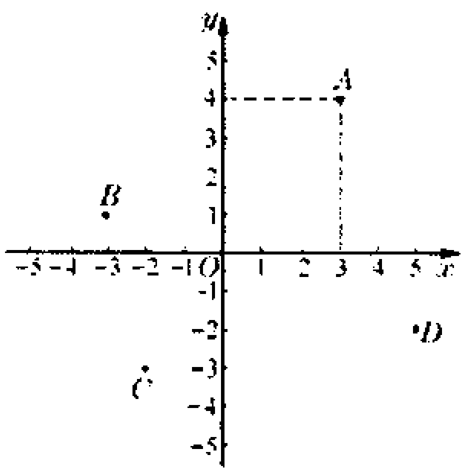


图 1

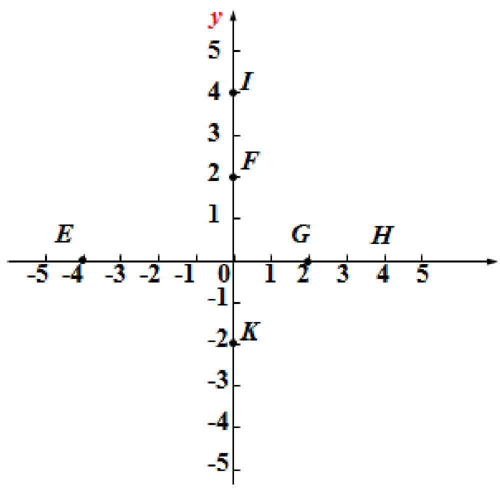


图 2

过点 A 作 x 轴的垂线，垂足在 x 轴上对应的实数是 3；再过点 A 作 y 轴的垂线，垂足在 y 轴上对应的实数是 4，所以点 A 的坐标是 $(3,4)$；然后让学生自己写出点 B、C、D 的坐标。本例之后，依次让学生思考：

（1）点 $P_1(2,4)$ 和 $P_2(4,2)$ 在直角坐标平面内是否表示同一点？

（2）点 $P_1(a,b)$ 和 $P_2(b,a)$ 在直角坐标平面内是否表示同一点？

（3）a 和 b 满足什么条件时，$P_1(a,b)$ 和 $P_2(b,a)$ 表示同一个点？

通过上述三个从特殊到一般的问题，让学生深刻理解实数对的有序性。

例 2：写出图 2 所示直角坐标平面内各点的坐标。

本例中的点都在坐标轴上，但是方法一样，过点 E 作 x 轴的垂线，垂足为 E，点 E 在 x 轴上对应的实数是–4；再过点 E 作 y 轴的垂线，垂足为 O，点 O 在 y 轴上对应的实数是 0，因此点 E 的横坐标是–4，纵坐标是 0，所以点 E 的坐标是（–4，0）。其他点的坐标让学生自行完成。最后，教师引导学生总结坐标轴上点的坐标特征：x 轴上点的纵坐标为 0；y 轴上

点的横坐标为 0；原点坐标为（0，0）。

3 学生反馈

3.1 对数学史的态度

对学生的问卷中，有 4 个问题是关于学生对数学史融入课堂教学的感受进行调查，针对问题“这节课老师用融入数学史的方式来讲授平面直角坐标系概念，你是否喜欢”有 91.7%的学生给出肯定回答。针对问题“你希望教科书里介绍关于平面直角坐标系的由来和发展概况吗”76.1%的学生表示“非常希望”，23.9%的学生表示“希望”；针对问题“如果教科书里能出现这些史料，你希望是以哪种形式出现”，选择“章节后的阅读材料”、“脚注”、“正文”、“导言部分”的学生分别为 100%、85.7%、76%、71%，只有 23%的学生选择“根据书本上的链接查阅相关资料”。针对问题“你最希望数学史在数学课堂教学中出现的形式是什么”，57.1%的学生选择“老师讲故事”，42.9%的学生选择“播放相关的微视频”。

由此可见，学生对所学知识的由来和发展是很感兴趣的，多数学生希望以故事或者微视频的方式呈现有关数学史内容。

3.2 对平面直角坐标系的认识

针对问题“你认为构成平面直角坐标系最重要的因素是什么”，48.2%的学生回答“坐标原点、x 轴和 y 轴”，36%的学生回答“x 轴和 y 轴”。这表明，学生对平面直角坐标系有了较好的认识。

3.3 学生学习情感

本节课与传统课堂不同，以学生为主体，学生在探究中体会到了数学的快乐，学生在课堂小结环节的发言以及他们对问题“这节课你印象最深刻的是什么？为什么？”的回答，总结学生的回答如下：

生 1：本节课我认识了一位数学家——笛卡儿；

生 2：需要用两个数来表示平面的点，一个数是不够的；

生 3：我们小组与笛卡儿的方法是最相似的，我们很有成就感；

生 4：了解了直角坐标系是如何发展而来的；

生 5：知道了直角坐标系的历史，知道了用有序实数对来表示平面内的点。

综合学生在课堂上的表现和问卷中的回答，学生对数学史融入课堂还是非常期待的，学生们愿意体验这种合作式的学习方法。在课堂中他们也的确能积极地参与到问题情境之中，经历了合作探究的过程，并体会到了探究的乐趣。这样，学生的解决问题的能力得以提高，同时也激发了学生学习数学的兴趣。

4 教学感悟

4.1 知识之谐

本节课中，我们以数轴为学生的认知起点，让他们在笛卡儿的故事情境中经历了坐标概念的自然产生过程，从而在课堂上再现了坐标系的历史。引入部分所提出的四个问题，前两个用数轴知识来回答，是对数轴知识的复习。问题 3 和 4 引发了学生的认知冲突。正是由于有这样的认知冲突，才致使学生积极思考，想出了出乎意料的四种方法。前两种方法虽不可行，但恰恰反映出了学生真实的思维。在探究过程中，学生陷入了“不同的位置用同样的数来表示”的困境。这一困境促使学生突破已有的思维障碍，走出一维的世界，同时用水平和竖直两个维度来表示苍蝇的位置，即用两个数来表示点的位置。另一方面，部分学生已经有了极坐标思想的萌芽，但他们一开始只是用了角度的大小来表示位置，从而陷入了“不同的位置用同样的角度来表示”的困境。经过教师的引导，学生最终找到了同时用角度和长度来表示点的位置的方法，实现了从一维到二维的跨越。此外，让学生感受到只有横轴的局限性，从而自然引出纵轴。

以史为鉴，方能在课堂上更好地揭示知识的自然发生过程。

4.2 探究之乐

问题 4 的讨论时间长达约 8 分钟之久。只要将该问题讨论清楚，本节课的难点就将迎刃而解，学生就能深刻理解引入“实数对”这一概念的必要性。

在讨论中，学生在遭遇困境后能想出用“5⊥3”来表示点的位置，这是出人意料的。在后续的访谈中，提出该方法的学生为自己的方法感到十分自豪，他表示：“我就是受前面同学的启发，他是 5 加 3，而我想着他们不是和的关系，是垂直的，所以就用‘垂直’表示了。”学生在探究中产生极坐标思想，同样令人惊奇，而当教师指明这一方法时，学生的欣喜之情油然而生。学生在探究中不仅获得了数学活动的经验，而且体会到了成功的快乐。

数学史为教师设计探究活动提供了参照，从而为学生提供了恰当的探究机会。

4.3 文化之魅

引入环节的笛卡儿的故事让学生明白：数学与现实生活息息相关，数学发现的灵感也往往源于生活。而在概念形成环节，我们向学生介绍了平面直角坐标系的简要历史。在笛卡儿和费马之前，代数和几何是彼此分离的，两者的发展缓慢而狭隘，但是两位数学巨人让两大学科实现联姻，为数学的发展做出了巨大贡献。18 世纪法国著名数学家拉格朗日（J. L. Lagrange, 1739～1813）曾说："只要代数同几何分道扬镳，他们的进展就缓慢，他们的应用就狭窄。但是，当这两门学科结成伴侣时，他们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善。"[3]但同时也指出，当年笛卡儿和费马只用了一条坐标轴。数学史的介绍让学生认识数学的演进性，不再用静止的眼光去看待数学；同时也更深刻地体会到今天的直角坐标系的价值。

数学史让学生获得历史感，改善他们的数学观，让课堂充满数学文化的芬芳。

4.4 德育之效

引入环节的故事无疑激发了学生的兴趣和好奇心，同时，也让学生感悟数学背后的人文精神；在探究过程中，当教师指明，学生的方法与历史上数学家的方法一致的时候，学生的自信心得到了提升。更重要的是，学生在直角坐标系这一概念的形成过程中，充分感受到思想交流、碰撞的重要性。

数学史融入数学教学，是实施数学学科德育的有效途径。

参考文献

[1] 汪晓勤. 解析几何的诞生（二）：费马与解析几何[J]. 中学数学教学参考(高中). 2008, (1/2): 122-123.

[2] 汪晓勤. 解析几何的诞生（三）：笛卡儿与解析几何[J]. 中学数学教学参考(高中), 2008, (5): 61-62.

[3] 汪晓勤. 解析几何的诞生（四）：教学设计[J]. 中学数学教学参考(高中). 2008, (6): 57-59.

HPM 视角下一元一次方程解法的教学*

瞿聪[1]　齐丹丹[2]　洪燕君[2]

（1.上海市友爱实验中学，上海 200241; 2.华东师大数学系，上海 200241）

1 引言

“一元一次方程”的内容是六年级学生实现从算术思维到代数思维转变的重要知识载体。与算术运算不同，在方程求解过程中，出现了新的数学对象——未知数，而运算过程也将未知数纳入了四则运算，并出现了新的运算过程——移项。将未知数视为一个“数”并纳入四则运算，在历史上是一个难点，经历了漫长的时间。有鉴于此，我们从 HPM 视角来设计“一元一次方程解法”的教学，希望能够借助古人的智慧，帮助学生克服对未知数及其运算的认知障碍。

荷兰著名数学家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905～1990）主张“我们不应该完全遵循发明者的历史足迹，而是经过改良过、同时有更好引导的历史过程”[1]，故我们将数学史以重构的方式融入到“一元一次方程解法”的课堂教学中，并在例题和习题部分呈现古题，进一步让学生感受古人解方程的方法。

为此，我们拟定了如下教学目标：

（1）熟练运用等式的基本性质对方程进行变形；

（2）掌握求解一元一次方程的步骤：移项、化简、系数化 1。

（3）激发学生的学习兴趣，让学生亲近数学，感受数学背后的人文精神。

2 历史材料及运用

在莱因德纸草书（公元前 1650 年）中，含有形如 $Ax + Bx = C$ 的一元一次方程问题。如第 24 题：“一个量，加上它的 $\frac{1}{7}$ 等于 19，求这个量。”[2]祭司用“假设法”来解这个方程：先假设一个答案 $x_1 = 7$，则得结果 $x_1 + \frac{x_1}{7} = 8$，再用 8 乘以 $\frac{19}{8}$，结果才是题设的 19。因此，正确答案为 $\frac{19}{8}x_1 = \frac{19}{8}\times 7 = 16\frac{5}{8}$。

我国汉代《九章算术》中提出了正负数的运算法则：“损之曰益”、“益之曰损”，相当于

---

*上海市教育科学研究项目“中小学数学课程的有效设计”之子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目号：D1508) 的教学案例之一。

今天的“移项”法则，该法则不仅适用于数字移项，也适用于未知数的移项。

9 世纪，阿拉伯数学家花拉子米（al-Khowarizmi）在《代数学》中给出了解方程的简单可行的基本方法。主要方法有二：一是“还原”，即将负项移至方程另一端后变成正项；二是“对消”，即将方程两端相同的项消去或合并同类项，再加上算术运算即可求得结果。全书不用符号，故没有方程的形式，但有明显的方程的思想。[2]

花拉子米的“还原”与“对消”两大步骤，还被后人编成歌诀，以便记忆。12 世纪的一本波斯代数书中记载[4]：

方程做整理，负项当先移。符号须改变，还原无偏离。

两边看仔细，同类合而一。对消有智巧，古法人称奇。

16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）首次用字母来表示一类数或任意数，从而使得代数学告别旧时代，进入了崭新的符号代数阶段。韦达用符号语言表达出了一千五百年前中算家用文字语言表达的思想。

符号代数阶段，关于一元一次方程的解法，以欧拉（L. Euler, 1707～1783）在《代数基础》中的讨论最为典型。例如，对于方程 $ax+b=cx+d$（$a\neq c$），欧拉的解法是：方程两边同减 cx，再同减 b，然后在所得方程两边同除以 $a-c$，得 $x=\dfrac{d-b}{a-c}$。借助代数符号，欧拉轻而易举地表达出古代中算家的“损益”法和“互算”法以及古代阿拉伯数学家的“还原”法与“对消”法。

在本研究中，我们对一元一次方程求解的历史进行重构。在方程的呈现上，按照从 $x+a=b$ 到 $x-a=b$、到 $ax=b$、再到 $ax+b=cx+d$ 的顺序展开；在方程的解法上，按照从算术方法到代数方法的顺序展开。关于移项的原理，我们复制式介绍了《几何原本》中的等量公理。最后，通过微视频，附加式介绍古埃及的假设法、《九章算术》中的“损益术”、花拉子米的“还原与对消”法和韦达、笛卡儿对符号代数的贡献。

3 教学设计与实施

3.1 复习巩固

在复习环节，教师通过以下问题，帮助学生复习学过的方程的元、次等概念并引导学生归纳出一元一次方程的定义：

问题 1：判断下列方程异同？

（1）$x-2y=56$；（2）$x-9=15$；（3）$x^2-1=0$。

生：它们都含有未知数。它们都是等式。

师：含有未知数的等式叫做什么?

生：含有未知数的等式叫做方程。

生：每个式子的未知数个数以及它的次数不同。

师：我们把只含有一个未知数且未知数的次数是一次的方程叫做一元一次方程。

3.2 探索新知

3.2.1 移项的概念

讲述一元一次方程的定义之后，教师给出两个一元一次方程：$x + 16 = 29$，$x - 9 = 15$。

师：同学们看看这两道道题怎么解?

生 1：第一题是 13。

生 2：第二题是 24。

师： 你们怎么做的?

生 3：小学的加法法则“加数+加数=和，则，加数=和—加数”、减法法则“被减数-减数=差，则，被减数=减数+差”。

师：大家反过来想想，“加数=和—加数”与“加数+加数=和”有什么关系，或者“被减数=减数+差”与“被减数-减数=差”有什么关系？老师提示一下，这是我们以前学过的性质哦。

生 4（迟疑片刻）：这是等式的性质。

师：很好，我们之前学习过等式的基本性质：等式两边同时加上（或减去）同一个数或同一个含有字母的式子，所得结果仍是等式。

随后，教师从《几何原本》中介绍了等式性质的出处：

公理 1：等量加等量，其和仍相等。

公理 2：等量减等量，其差仍相等。

V 卷命题 7：“相等的量比同一个量，其比相同；同一个量比相等的量，其比相同。”[5]

接下来，教师请学生来描述上述两个方程的求解过程，并引导学生比较首尾两个等式，发现：唯一发生改变的是 9 和 16 的位置和符号，并给出关于数字的移项规则，即数字从等号一边移到另一边需改变符号。

为了讲清楚移项不仅仅是“常数项”的移项，还可以移动“未知数”。教师给出了如下例题：$6x = 4x + 6$，要求学生解答。

生：嗯……应该将$4x$移到方程左端吧，可是不太确定。

师：与等式性质有关吗?

生：有，刚才说的，等式两边同时加上（或减去）同一个含有字母的式子，所得结果仍是等式。

师：对，注意可以是含有字母的式子，所以我们可以移项，还是利用了等式的基本性质。所以，我们现在可以完整给出移项的概念了：把方程两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，就相当于把方程中的某些项改变符号后，从方程的一边移到另一边，这样的变形叫做移项。

3.2.2 系数化 1

对上述方程：$2x=6$。教师直接引导学生利用等式基本性质求解："等式两边同时乘以同一个数（或除以同一个不为 0 的数），所得结果仍是等式。"利用这条等式性质，同学们求出结果：$x=3$。此时教师指出这个步骤的名称：系数化 1。

3.3 牛刀小试

对于形如 $ax+b=cx+d$ 的方程，教师给出了《九章算术》中的盈不足问题："今有共买羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三。问人数、羊价各几何？" [6]。学生在第一节"列方程"的教学中只列出了方程：$5x+45=7x+3$，这节课从求解的角度继续学习。

学生在求解过程中，对于常数的移动会变号比较清楚，但移动未知数的项常常会忘记变号，导致求解错误。为此，老师又给出了两道题让学生强化练习：

（1）$5x-45=-7x+3$；

（2）牧童分杏各争竞，不知人数不知杏。三人八个少十枚，两人五枚两个多。[7]（出自《算法统宗》）

最后，老师和学生们一起总结了求解一元一次方程的步骤为：①移项；②化简；③未知数系数化 1。

3.4 微视频

课堂小结之后，教师播放了课前精心制作的微视频——"一元一次方程的解法"。微视频介绍了莱因德纸草书上所记载的假设法、《九章算术》中的"损益术"、花拉子米的"还原与对消"及歌诀、韦达的字母符号的引入、笛卡儿对字母符号的改进等，让学生对一元一次方程求解的历史有一个整体的了解。

4 学生反馈

课后，对全班 33 名学生做了问卷调查。关于“你希望教科书里介绍古人解方程的具体方法吗？为什么？”这一问题，33 人中 32 人持肯定态度，他们关于古代方法的主要观点有：

- 有助于培养对数学的兴趣；
- 更加了解方程及其历史；
- 对方程的理解会更快、更完整；
- 有助于了解古人的智慧；
- 可以从古人那里找到公式；
- 可以学习其他知识。

问卷调查显示：绝大多数学生愿意了解与课本内容相关的数学史知识，课后访谈则表明，六年级学生对数学史有着浓厚的兴趣。

5 结 语

本节课中，数学史的作用体现在以下几个方面：

（1）体现知识之谐。从方程的类型上看，整节课按照从简单方程到一般方程的顺序展开；从方程解法上看，从学生的认知起点——加法和减法的逆运算出发，引出移项的方法，使得知识的发生、发展变得自然而然。

（2）展示方法之美。古埃及人的假设法、《九章算术》的“损益术”、花拉子米“还原与对消”等古代方法，拓宽了学生的思维，也让学生感受到符号代数的优越性。

（3）感受文化之魅。通过数学史上古题的引入和探究，让学生感受一元一次方程解法的历史演进性，使学生真正走进古人心中，体会多元文化的魅力。正如英国数学史家 Fauvel 所说：“多种历史方法的展示能够体现不同时空数学家对同一课题的探求过程、多种不同文化的启发育化作用，可以激励学生探索规律，发现定理，体验数学发现的成就与快乐。”[8]

（4）彰显德育之效。有学生在访谈中说自己早就发现了“移项”，很高兴自己和古代数学家想得一样，“我觉得数学不太难”，“我希望以后的数学课也这样上”。数学史增强了学生的自信心。

参考文献

[1] 徐章韬，汪晓勤，梅全雄. 发生教学法：从历史到课堂[J]. 教育教育学报，2010，19 (1): 10-12.

[2] 梁宗巨. 世界数学通史（上册）[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2001.

[3] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社, 2004.

[4] Rosen, F. *The Algebra of Mohammed ben Musa*[M]. London: The Oriental Translation Fund, 1831.

[5] 欧几里得. 几何原本(兰纪正,朱恩宽译)[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003.

[6] 郭书春. 九章算术新校（下册）[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.

[7] 程大位. 算法统宗. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇（数学卷）（第 2 册）[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1994.

[8] 方国青, 王芳. HPM 视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究[J]. 数学教学. 2013, (4): 29-32.

学术活动

丹桂飘香的季节，华东师范大学数学史与数学教育（HPM）研究团队与上海的中小学老师一起开发了如下案例：

◆2016 年 9 月 20 日，在上海市内江路第二小学进行四年级“大数的认识”的 HPM 课例展示，授课教师是冯晶老师。冯老师首先提出三个问题，层层递进，激活学生对大数原有的认知；随后用阿基米德的故事引导学生深入认识大数；通过小组探究，学习如何读大数并了解数级的概念；小结部分，学生表示有一种超越古人的成就感。

同日，在上海理工大学附属小学进行三年级“两位数乘一位数”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是刘轩如老师。刘老师首先以疯狂动物城里兔子朱迪的三个计划进行情境引入，学生自主探究感受竖式等算法的多样性；随后刘老师演示了“格子算法”，并请学生通过合作、探究，比较了格子算法与竖式的异同，发现两者形式虽不同，算理却相同；学生们对“现在为何不用格子算法”各抒己见，讨论相当热烈。

下午，在上海市延河中学进行七年级的“字母表示数”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是孙洲老师。孙老师首先以莱因得纸草书引入，复习“字母可以表示未知数”；然后用丢番图《算术》中的问题让学生自主探究，展示学生算法中体现的代数发展三个阶段，并表示某些算法与古代数学家的做法一致，慢慢过渡到“字母可以表示任意数”；接着通过规律性探索题加深学生对“字母可以表示任意数”的理解，并由此拓展字母的作用。

（陈莎莎　供稿）

◆2016 年 9 月 27 日，在上海市格致中学进行高二年级“直线方程”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是杨懿荔老师。杨老师通过引例并引导学生验证直线与方程的关系后给出了直线方程的定义；接着重现了直线方程形式的历史发展：斜截式→点斜式→两点式→截距式；然后引导学生运用向量知识推导直线方程，得到直线的点方向式方程和点法向式方程；最后启发学生思考直线方程各种形式的共性，从而得出直线方程的一般形式。

（李霞，沈中宇　供稿）

◆2016 年 10 月 11 日，在上海市呼玛中学进行初三年级复习课“欧几里得蝴蝶在初三复习课中的应用”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是吴迅捷老师。吴老师根据一道习题及其变式为背景，引导学生得到利用相似三角形及同高三角形求解三角形面积的方法，并引出欧几里得蝴蝶这一特殊图形；随后通过微视频介绍了古希腊著名数学家欧几里得及其

《几何原本》；接着展示了欧几里得证明勾股定理的方法，让学生讨论其证明原理，即：“同底等高的三角形面积相等”。

（齐丹丹　供稿）

◆2016 年 10 月 18 日，在上海市晋元高级中学附属学校进行 8 年级“一元二次方程的应用”的 HPM 课例展示及研讨活动，授课教师是薛平老师。薛老师设置了 5 个层层递进的二次三项式引出平方差法和配方法，并介绍了与阿拉伯数学家花拉子米及英国数学家查理•斯密的著作《小代数》相关的数学史；接着薛老师组织学生合作探究，对$ax^2+bx+c(a\neq 0)$进行因式分解，并通过观察发现了公式法。

（王鑫　供稿）