



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2016 年第 5 卷第 6 期



尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基

(N. I. Lobachevsky, 1792~1856)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 彭刚 洪燕君

责任编辑：栗小妮 牟金保

助理编辑：沈中宇 李霞

编委（按姓氏字母序）：

陈莎莎 方 倩 洪燕君 黄友初 李 玲 李 霞 李婷 栗小妮 林佳乐 刘 攀 刘帅宏 牟金保
彭 刚 蒲淑萍 齐丹丹 齐春燕 任芬芳 沈金兴 沈中宇 田方琳 汪晓勤 王芳（义乌） 王 科
王鑫 吴 骏 徐章韬 杨懿荔 叶晓娟 岳增成 张小明 朱 琳 邹佳晨

刊首语

本期封面人物是俄国伟大的数学家、数学教育家、被誉为“几何学上的哥白尼”的尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基（N. I. Lobachevsky, 1792~1856）。

罗巴切夫斯基生于俄国下诺夫哥罗德(今高尔基城)，卒于俄国喀山。父亲是一位土地测量员，于 1797 年逝世。母亲是一位顽强而开明的妇女，竭尽全力维持家计，利用国家保障金送儿子到喀山中学寄读。从此以后，罗巴切夫斯基一直在喀山学习和工作。罗巴切夫斯基用 4 年时间读完了中学课程。期间，他得到数学老师卡尔塔舍夫斯基的特别指导，对数学缠身了浓厚的兴趣。1807 年 2 月 14 日，罗巴切夫斯基进喀山大学学习。大学期间，他掌握了多种外语，并系统地研读了著名数学家的原著，在数学方面表现出特殊的才能。年轻的罗巴切夫斯基富于幻想、倔强并有些自命不凡。这种性格使他经常违反学校纪律。学校的行政领导曾指责他的行为具有“无神论的特征”，“令人愤怒”。但他杰出的才能和优异的成绩一向为教授们所欣赏，在他们的庇护下，罗巴切夫斯基顺利完成了学业，于 1811 年获物理数学硕士学位，并留校工作。1814 年，他晋升为纯粹数学方向教授助理，1816 年又晋升为纯粹数学方向教授，1822 年成为终身教授。他主讲过《纯粹数学原理》、《高等数学》、《力学》、《物理学》、《天文学》等课程。1818 年，罗巴切夫斯基进入喀山大学校委会。1820 年至 1825 年，他两度担任物理数学系主任。1827，任喀山大学校长。他有着卓越的行政管理才能，曾把喀山大学从火灾和传染病流行等混乱不堪的状态中挽救出来。在他任上，学校的硬件设施大大得到改善；他亲自担任图书馆馆长(1825~1835)，丰富了馆藏。作为杰出的教育家，罗巴切夫斯基认真研究并撰写了许多教学法方面的著作，可惜的是，由于时代的原因，流传下来的所剩无几。他对学校的教学工作给予了极大的支持。在罗巴切夫斯基的领导下，喀山大学跃升为俄国一流的高等学府。1846 年，他辞去校长职务。

自从欧几里得《几何原本》问世以来，历代数学家都为其中的平行公设（第五公设）所困扰。许多学者都尝试用欧几里得的其他公设来证明平行公设，结果都以失败而告终。罗巴切夫斯基从 1816 年开始尝试平行公设的证明，无果而终。1823 年，他写成《几何学》一书。这是一部独具匠心的教科书，反映了罗巴切夫斯基关于几何学基础的深刻思想。书中，他把全部几何命题按是否依赖于平行公设的标准分为两部分。不靠平行公设即可得到证明的命题的总体，现在通常称为“绝对几何学”。在《几何学》的前 5 章里，罗巴切夫斯基阐述

了绝对几何学的命题，然后转向不用平行公设就无法证明的定理。罗巴切夫斯基确立了平行公设不依赖于欧几里得其他公设的信念。他提出了与欧几里得平行公设对立的平行公设，并由此经过严密的推导得到一系列命题，构成了逻辑上自洽、且与绝对几何学不相冲突，但又和欧氏几何不同的新几何体系，他将这种新的体系称为“虚几何学”，这是第一种非欧几何学，现在通称为罗巴切夫斯基几何学，这是罗巴切夫斯基最重要的数学贡献之一。1826年2月，在物理数学系的学术会议上，罗巴切夫斯基作了题为“附有平行线定理的一个严格证明的几何学原理简述”的报告，阐明了他所创立的“虚几何学”原理，这一天被后人公认为非欧几何学诞生的日子。这种新几何体系从创立到被世人普遍接受，经历了漫长而曲折的过程。1810年，罗巴切夫斯基在完成大学学业之后，继续深造学习。在这期间，罗巴切夫斯基担任教授助理，给缺课的学生补课，与学生一起完成实践练习，并为他们答疑解惑。为此，他有机会经常与教授交流。罗巴切夫斯基以其远见卓识超越了他的老师，尽管当时并没有人真正认可他的工作。

在《新几何原理及平行线定理的严格证明》的摘要中，罗巴切夫斯基详细阐述了自己的几何原理。随后，他证明了新几何学中的部分三角学公式，并解决了三角形内角和问题，还引发了一些新的发现。他把该成果编入《理想几何学》一书中并加以运用。逝世前，双目失明的罗巴切夫斯基口授学生，执笔完成最后一部科学著作《泛几何学》，书中收录了他的新几何学成果。不幸的是，他的理论并未得到世人公正的评价。他所得出的结果与几千年来人们习以为常的公理体系相矛盾，在常人看来是荒谬的。现在我们可以清楚地认识到，罗巴切夫斯基所说的面，实际上就是一个双叶双曲面，他的几何是一种弯曲的空间几何，弯曲程度越小就越接近欧氏几何。

罗巴切夫斯基的科学思想和方法，尤其是数学教育与数学创造方面的思想方法，值得教育工作者深思。他罗巴切夫斯基的青少年时代，法国唯物主义哲学传入俄国，对他的世界观产生了重要影响。他坚信，“真理来源于客观实践而不是主观认识，一切生活现象首先通过感觉被我们接受，而由感觉所得到的知识（感性认识）必须经过理性的抽象整理”。他正确地提出了数学与现实之间关系的问题，驳斥了康德的先验论的唯心主义见解。罗巴切夫斯基认为，最初的数学抽象，包括几何学的基本概念在内，反映了最普遍和最简单的现实关系及物质世界的特征。想把数学从单纯理智的体系中推导出来是完全徒劳，他在自己的数学活动中始终如一地贯彻了这种思想。他有一句名言：“任何一个数学分支，不论有多么抽象，有朝一日都能在现实世界的现象中找到应用”。

罗巴切夫斯基在数学上还有其他许多成就。他的代数教程被认为是阐述方法和准确定义数学原理的典范。他于 1834 年给出了函数的现代定义： x 的函数是这样的一个数，它对于每个 x 都有确定的值，并且随着 x 的变化而逐渐变化，函数值或者由解析式给出，或者由一个条件给出，这个条件提供了一种检验所有的数并选择其中之一的方法，或者虽然依赖关系存在但可以是未知的。他最先确立了函数的连续性和可微性之间的区别，在三角级数论和 Γ —函数论中也得到一些重要结果。他提出了正标级数收敛的特征，并发表了一系列级数理论的文章，特别是三角级数。同时，他还建立了函数展开成欧拉—傅立叶级数的条件，值得一提的是，这些条件要比著名的狄利克雷条件更具一般性。在 γ —函数理论上，他获得了许多有趣的结果，并给出新的 γ —函数定义。在定积分理论上，罗巴切夫斯基也得出重要的一般性结果。他还建立了高次代数方程的一种简捷的近似解法，今称“罗巴切夫斯基—格雷费方法”。他在分析和代数方面的主要论著有《代数学或有限运算》、《无穷级数的收敛性》和《某些定积分的值》等，又在概率论方面写过两篇出色的论文。

罗巴切夫斯基的数学成就连同他的创新精神和数学信念，是数学史上的一笔丰厚的财富。

目 录

刊首语	牟金保 I
-----------	-------

理论探讨

HPM 与小学数学教师专业发展：MKT 的视角	汪晓勤 1
-------------------------------	-------

萨顿的教育思想及其对 HPM 研究的启示	牟金保 9
----------------------------	-------

教学实践

数学史融入“列方程解相遇问题”复习课的教学	岳增成 18
-----------------------------	--------

初三几何复习课上的寻根之旅	李霞 26
---------------------	-------

学术活动

一次心灵之约，一场精神盛宴——桐乡 HPM 教学研讨会纪略	李婷，王鑫 35
-------------------------------------	----------

第四届 HPM 研讨会会议	刘帅宏，陈莎莎，王鑫，李婷 41
---------------------	------------------

CONTENT

FOREWORD	Mou Jinbao 1
----------------	--------------

THEORETICAL STUDY

HPM and the Professional Development of Mathematics Teachers in Primary Schools: from the Perspective of MKT	Wang Xiaoqin 1
Sarton's Educational Thought and Its Implications to the Research in HPM	Mou Jinbao 9

TEACHING PRACTICE

Teaching of Application of Linear Equations in Trip Problems from the Perspective of HPM.....	Yue Zengcheng 18
Tracing to the Source in a Review Lesson in Geometry in Grade Nine	
.....	Li Xia,Wu Xunjie 26

INFORMATION

A Soul Dating, A Spiritual Feast	Li Ting, Wang Xin 35
The Fourth Seminar on HPM	
.....	Lui Shuihong, Chen Shasha, Wang Xin, Li Ting 41

HPM 与小学数学教师专业发展：MKT 的视角

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院， 上海 200062）

1 引言

小学数学教师专业发展的目标包括知识、信念、能力等方面，其中，教师的知识可以用美国数学教育家鲍尔提出了 MKT 理论来刻画。所谓 MKT，是 Mathematical Knowledge for Teaching 的简称，指的是“完成数学教学工作所需要的数学知识”，其组成成分如图 1 所示 [1]。

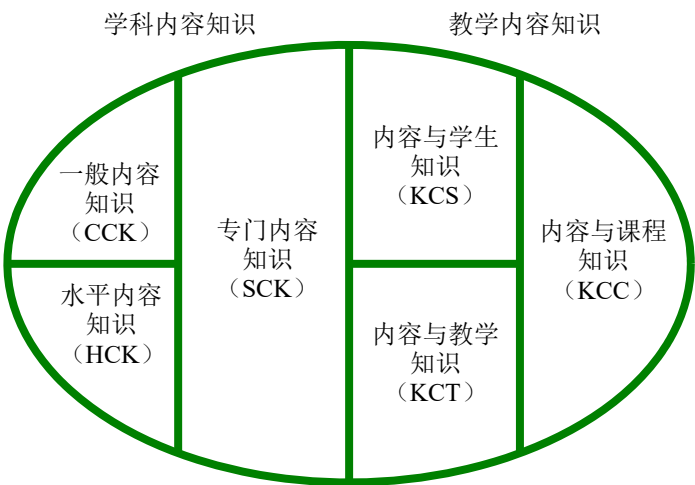


图 1 MKT 的结构

“一般内容知识”是指除教学外，在其他背景下也使用的数学知识和技能；“专门内容知识”是指教学所特有的数学知识和技能；“水平内容知识”是关于整个数学课程中数学主题之间联系的知识；“内容与学生知识”是指对学生的了解和对数学的了解相结合的知识；“内容与教授知识”（对应于范良火的“教学的内容知识”和“教学的方法知识” [2]）是指对如何教授的了解和对数学的了解相结合的知识；“内容与课程知识”（对应于范良火的“教学的课程知识”）是指关于课程大纲、课程标准、教科书、教学材料以及其他教学资源的知识。

近年来，数学史在小学数学教学中的意义日益受到人们的关注，数学史融入小学数学教学的实践探索也日益增加。我们在开发HPM教学案例（即“融入数学史的教学案例”）的过程中，确立了“大学研究人员和小学教师密切合作”的模式，使得小学数学教师在没有受过数学史教育或缺乏数学史材料的情况下，也能走进HPM的世界。本文拟回答以下问题：数学史与小学数学教师的MKT之间有何关系？

2 教学史与 MKT

虽然许多一般内容知识是教师在学生时代习得的，但在数学教学中，教师不断会遇到新的一般内容知识，而数学史往往提供了这样的知识，如计算两个正整数乘积的不同方法。图2所示是16世纪盛行于欧洲的“手指算”，而图3则给出了古埃及人计算 97×79 的方法。

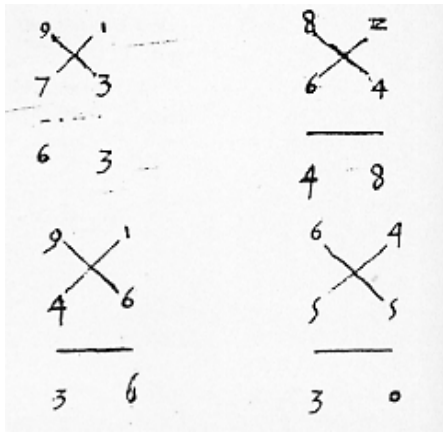


图2 16世纪的手指算

1	97	✓
2	194	✓
4	388	✓
8	766	✓
16	1552	
32	3104	
64	6208	✓
79	7663	

图3 古埃及的乘法

为了解决教学中所遇到的各类“为什么”问题，教师需要拥有丰富的专门内容知识。三角形面积公式和三角形内角和定理属于一般内容知识，但它们的推导或证明方法则属于专门内容知识。这类知识往往源于数学史。如，中国古代数学家用“出入相补”法证明三角形、梯形面积公式，古希腊哲学家泰勒斯通过拼图发现三角形内角和定理。圆周率的近似值为3.14，这属于一般内容知识，但得到该近似值的具体方法则属于专门内容知识，刘徽的割圆术就是其中之一。至于对诸如“为什么未知数用字母 x 来表示”、“小数是否很小的数”之类的问题，教师只能从数学史中寻找答案。

数学史往往揭示了数学课程中不同知识点之间的纵向联系，典型的例子是圆面积公式和三角形面积公式之间的联系（见下节）。

数学的历史是一面镜子，前人在数学概念理解过程中所遇到的困难和障碍，往往也是今天数学课堂上学生也会遇到的困难和障碍。从数学理解的意义上说，了解历史，也就了解了

学生。尽管在古代中国，数学家出于解方程组的需要而引入了负数，但在西方，18世纪还有人问：“世界上还有什么小于一无所？”直到19世纪，还有数学家认为负数是“荒谬的”。负数大小比较问题也完全没有我们想象的那样简单。历史上，笛卡儿、牛顿、欧拉、波尔查诺、阿贝尔等数学家都有不同于今天的理解，他们的观点都可以归结为“数轴上离原点越远的数越大”或“绝对值越大，数越大”^[3]。据此有 $-4 > -1$ 。关于负数及其序关系的认识论障碍提示我们：学生在学习负数概念时必会遭遇困惑或出现错误。数学史丰富、深化了内容与学生知识。

历史上，一个概念、公式、定理、法则甚至一个数学分支学科的产生都有其内在或外在的动因，也都有演进的过程。这种动因和过程为教师“怎么教”有关知识点提供了参照。例如，分数有分割分数和度量分数两类。究竟如何引入分数概念？分数的历史告诉我们，人类首先是在物品分割的情境中认识和运用分数的，因此，分割分数是理所当然的教学选择。

数学史是一座宝藏，其中含有取之不尽、用之不竭的教学素材和思想养料，因而是数学教师的重要教学资源。针对某一个特定的知识点，教师关于相关数学史素材的知识是内容与课程知识不可或缺的一部分。另一方面，数学史知识也有助于教师对小学数学知识体系的理解，例如，关于教科书中“小数和分数孰先孰后”的争论，需要参照数学史加以研究。

图4给出了数学史与MKT之间的关联。

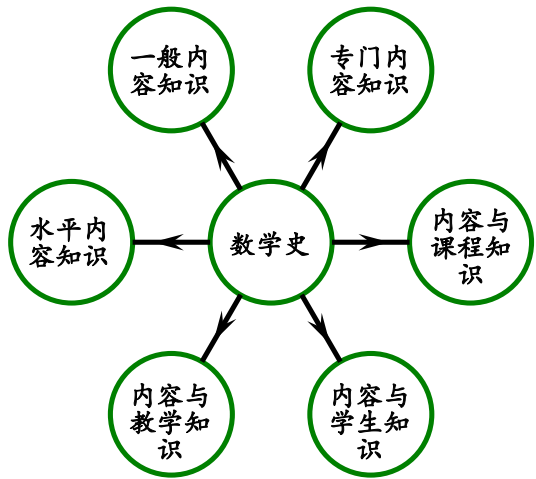


图 4 数学史与 MKT

3 HPM 教学案例分析

3.1 角的初步认识

在数学史上,“角”是一个具有多重属性、争议很多、很难刻画清楚的几何概念。古希腊哲学家泰勒斯曾将“相等的角”称为“相似的角”^[4]。后来,亚里士多德将“角”视为“弯曲的线构成的图形”,并且也将两个相等的角称为“相似的角”^[3]。可见,早期哲学家是从“形”的角度去看待“角”的,即赋予“角”以“质”的属性。

在《几何原本》中,欧几里得从两线之间位置关系的角度去刻画“角”:“角是平面上相遇、且不在同一直线上的两条线彼此之间的倾斜度”^[5]。另一方面,欧几里得分别将“直角”、“锐角”、“钝角”定义为:

- 若一直线与另一直线构成的两个相邻的角相等,则称这两个角为直角;
- 钝角是大于直角的角;
- 锐角是小于直角的角。

用“等于”、“大于”和“小于”来比较两个角,欧几里得又赋予“角”以“量”的属性。而徐光启在翻译《几何原本》时创用“直角”、“钝角”、“锐角”三个名称,又赋予角以“质”的属性。普罗克拉斯认为,必须同时从质、量和关系三个方面来定义角^[3],因为单独采用某一个方面,都未能完善地刻画该概念。

在二年级教学案例“角的初步认识”中,教师借鉴角概念的发展历史,按照从“质”到“量”再到“关系”的顺序展开教学(如图5)。首先,让学生列举生活中的角的实例,并描述什么是角。学生提到“尖尖的”、“像屋顶一样”、“像L一样”,等等,他们显然都是从“质”的角度来认识“角”的。接下来引入情境:“鸟妈妈对鸟宝宝们说,谁的嘴巴张得大,就把小虫喂给谁吃。”让学生判断,图中哪一只鸟宝宝能吃到小虫。在学生说出鸟宝宝嘴巴大小顺序之后,教师让他们说出角的大小比较方法,从而引导学生从“量”的角度来认识角。接着,让学生对不同大小的角进行分类,并探讨:为什么小于直角的角称为“锐角”,大于直角的角称为“钝角”?学生从“质”的角度,用“锐利”、“迟钝”、“扎人疼”、“扎人不疼”等来解释。在练习之后,教师通过将不同的角的顶点和一边重合,引导学生发现,角可以通过将一边旋转得到,从而让学生从“关系”(即两条边之间的位置关系)的角度来认识角。

HPM 视角下的“角的认识”的教学,让学生经历了角概念的产生和发展过程,在课堂上获得探究机会,感受成功的喜悦;当教师总结,学生比较角的大小的方法、关于锐角和钝

角的解释，都与历史上数学家的想法相似，这大大增强了学生的自信心，让他们感受到自己也是小数学家。

本案例中，角概念的历史为教学设计提供了参照，是教师在 HPM 教学设计与实施过程中所学到的内容与教学知识；同时，对于角的三重属性（质、量、关系）的认识，使教师关于角的一般内容知识得到了扩充与完善。数学教育研究表明，学生对于角的认识具有一定的历史相似性^[6]，古人在对角的认识方式以及认识过程中所遭遇的困难（角的多重属性、特殊角（零角和平角））会再现于今日的数学课堂中，因而角的历史对教师而言是一种内容与学生知识。在教师接触 HPM 之前，并未思考过“锐角”、“钝角”的辞源问题，角概念的历史为教师弥补了专门内容知识。此外，以角的历史为参照，教师开始审视课本上的内容，拓展了自己的内容与课程知识。

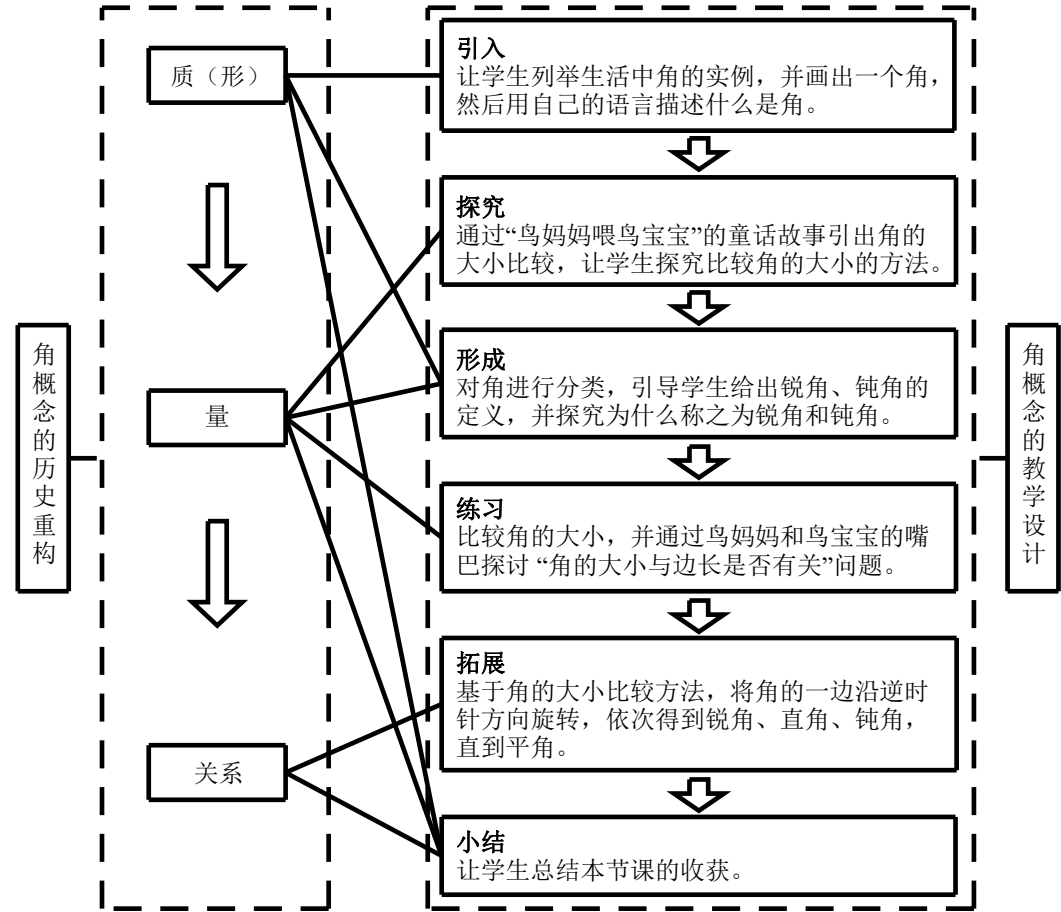


图5 “角的认识”教学设计

3.2 一位数与二位数的乘法

历史上，求两个正整数乘积的算法很多。1430 年左右，在意大利的一份数学手稿中，出现了一种名为“格子算”的乘法。图 6 是世界上第一部印刷出版的算术教科书《特雷维索算术》（1478 年）中的格子算。

在三年级教学案例“一位数乘二位数”中，教师通过实际情境，引入 32×5 ，让学生独立给出自己的算法；在学生给出各种各样的算法之后，教师引入图 7 所示的格子算，让学生加以解释，并与竖式算法进行比较。在课堂小结部分，教师让学生思考：为什么格子算现在不用了？

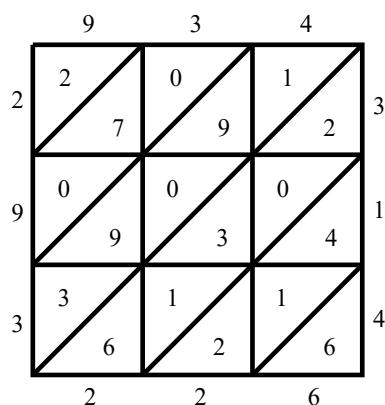


图 6 《特雷维索算术》中的格子算

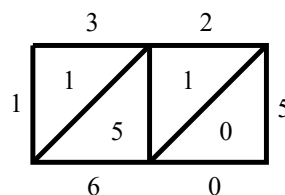


图 7 用格子算求 32×5

格子算的引入促进了学生对乘法算理的理解，也开阔了他们的视野，感悟到自己的解法只是很多解法中的一种。在古今方法的对比中，学生体会到现代竖式算法的优点，但也有许多学生更喜欢格子算。对于“为什么现在不用格子算”这一问题，有学生给出的解释是：“格子算传着传着就失传了”，不知不觉中，学生对于数学知识已经有了历史感，这种历史感让他们更加亲近数学。

在本案例中，格子算拓宽了教师关于乘法的一般内容知识。对于格子算背后的算理、格子算与竖式算法之间联系的认识，丰富了教师关于乘法的专门内容知识。在教学设计过程中，教师在大学合作者的指导下，查阅有关乘法的历史文献，丰富了自己的内容与课程知识。

3.3 圆的面积

历史上，古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287～前 212）最早给出圆面积的准确公式：“圆面积等于一条直角边长为圆半径、另一条直角边长为圆周长的直角三角形面积。”^[4]这里，阿基米德将圆“转化”为更简单的三角形，从而得出了圆面积公式。

虽然阿基米德最终借助穷竭法来证明关于圆面积的命题，但他一开始是如何将圆和三角形建立联系的呢？从微积分的角度看，圆面积的不同解决方法取决于“微元”的不同选择，如图8所示。

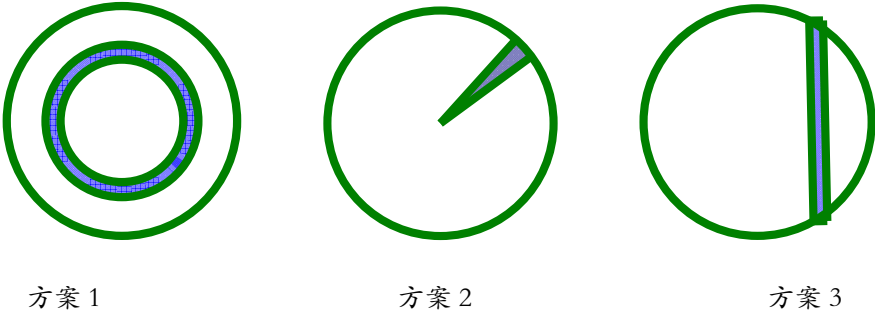


图8 圆面积的不同微元

阿基米德可能使用了第一种方案。如图9，想象圆由一些长短不同的细绳围成，将圆“剪开”，并将各绳“拉直”，一端对齐，得到一个直角三角形，其长直角边等于圆的周长，短直角边等于圆的半径。

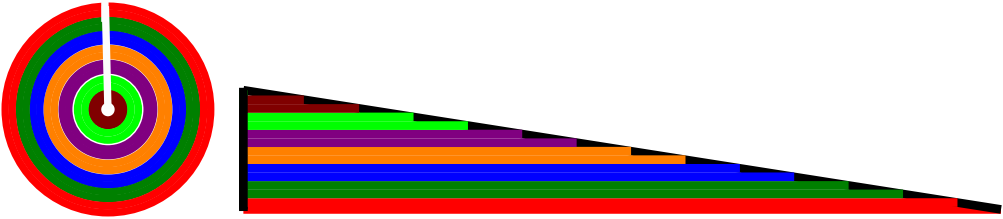


图9 将圆“变形”为三角形

17世纪德国数学家开普勒（J. Kepler， 1571~1630）则选择第二种方案建立起圆与三角形之间的联系：将圆分割成无数个顶点在圆心、高为半径的小“三角形”（实为小扇形，但将圆分得越细，小扇形越接近三角形）。将这些小“三角形”都转变成等底等高的三角形，最后，它们构成了一个直角三角形，如图10所示。

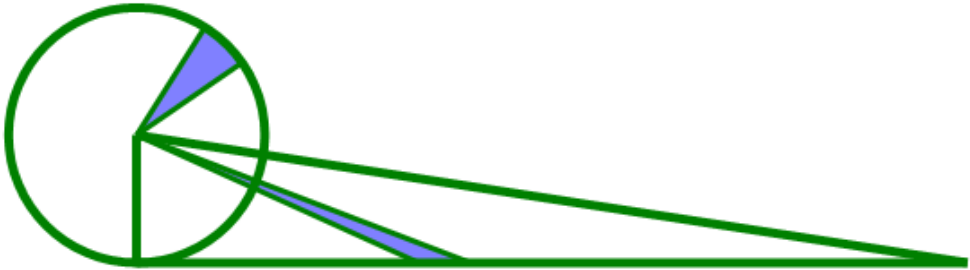


图10 开普勒求圆面积的方法

在六年级教学案例“圆的面积”中，教师讲述开普勒求圆面积和酒桶体积的故事，并采用开普勒的方法来推导圆面积公式：先让学生回顾“等底等高的三角形面积相等”的事实；

再作圆内接正十二边形，利用几何画板（PPT展示），依次对其中的12个小三角形进行等积变换，从而将其变成等积的直角三角形；然后作正二十四边形、四十八边形、九十六边形，相应得到等积的直角三角形，让学生直观感受并猜想这些直角三角形与圆面积之间的关系。

开普勒求圆面积的方法引起学生浓厚的兴趣，而开普勒的故事则让学生感受到数学背后的人文精神。

在本案例中，开普勒的方法拓展了教师的专门内容知识和内容与教学知识；同时，该方法建立了圆面积公式和三角形面积公式之间的联系，丰富了教师的水平内容知识。

4 结语

以上我们看到，数学史不仅有助于发展和完善教师的 MKT，而且在很多情况下就是教师 MKT 的不可或缺的一部分；数学史融入数学教学的实践对于小学数学教师的专业发展有着巨大的促进作用。

我们期待，“数学史与数学教育”能够成为小学数学教师在职培训的重要课程，我们也期待，有更多的小学数学教师走进 HPM、实践 HPM，让他们的数学课堂洋溢数学文化的芬芳。

参考文献

- [1] Ball, D. L. et. Al. Content Knowledge for Teaching [J]. *Journal of Teacher Education*, 2008, 59: 389-407
- [2] 范良火.教师教学知识发展研究[M].上海: 华东师范大学出版社,2013
- [3] Thomaidis, Y., Tzanakis,C. The notion of “parallelism” revisited: historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2007, 66: 165-183
- [4] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid’s Elements* (Vol.1) [M]. Cambridge: The University Press, 1968. 36-178
- [5] Heath. T. L. *The Works of Archimedes*[M]. New York: Dover Publications, 1959.
- [6] Keiser, J. M. Struggles with developing the concept of angle: comparing sixth-grade students’ discourse to the history of angle concept [J]. *Mathematical Thinking and Learning*, 2004, 6 (3): 285-306

萨顿的教育思想及其对 HPM 研究的启示

牟金保

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

乔治·萨顿(G. Sarton, 1884~1956)被称为“科学史之父”^①, 毕生致力于科学史的研究与教学工作。他一生出版了 15 部专著, 发表了 300 余篇论文, 编辑了 79 份详尽的科学史重要研究文献目录; 其中有四条主要思想贯穿始终, 即“统一性思想、科学的人性化、东西方思想的价值、宽容和仁爱的态度”。与此同时, 他也以一名教师的角色, 一直致力于教育教学工作。当今很多“学习科学前沿领域”热点理论观点大都以科学史作为类比。从中能看出, 对于同时具备科学史与教育教学背景的萨顿, 他有自己的教育体会与向往, 这种体会与向往也正是其教育思想的体现, 对教育工作者有着潜移默化的影响。那么, 他有怎样的教育教学思想? 对我们今天的 HPM 研究又有哪些启发? 本文拟对萨顿的教育教学思想进行梳理探讨, 藉以回答上述问题。

1 乔治·萨顿的贡献

乔治·萨顿于 1884 年出生于比利时佛兰德省的根特, 中学毕业后, 进入根特大学学习。最初学习哲学, 后来先后学习了化学、结晶学和数学, 并曾获得根特大学等四所高等学校授予的化学金质奖章。1911 年 5 月, 他完成了题为“牛顿力学原理”的论文, 并获得了博士学位。这一博士论文, 也表明了他受到哲学家和科学史家孔德(A. Comte, 1798~1857)、迪昂(P.-M.-M. Duhem, 1861~1916)和坦纳里(P. Tannery, 1843~1904)等人的哲学影响。1912 年, 萨顿创办科学史杂志《爱西斯》(Isis), 该杂志自诞生之日起, 一直是国际上最具权威的科学史刊物之一。1916 年, 他开始在哈佛大学任教。1936 年, 他又创办了《欧西里斯》(Osiris)作为《爱西斯》的姐妹杂志; 同时, 出版了《数学史研究》。萨顿的代表性著作有《科学史引论》、《科学史》、《科学史和新人文主义》、《科学的生命》、《文艺复兴时期的科学观》、《科学的历史研究》和《新人文主义的桥梁》等。萨顿一生对历史进行了庞大而深入的研究和探索, 并以极大的热情阐述和宣传历史研究及教学的重要性和必要性, 提出了自己独特的教育思想。萨顿的教育思想在今天依然有着重要的现实意义。

^① 参阅《上海 HPM 通讯》2016 年第 2 期刊首语。

2 乔治·萨顿的教育教学思想

“科学史之父”乔治·萨顿一生著作丰富、贡献突出。他被授予 7 个荣誉博士学位，被世界上 15 个国家的 40 多个学术机构吸纳为会员、理事或担任主席、荣誉顾问，获得 7 个奖章，包括两次获得巴黎科学院的比诺奖^[1]，萨顿还被 1947 年的 Newsweek 杂志称为世界科学史家的先驱^[2]。作为拥有近四十年的哈佛大学教育教学经历，萨顿对于教育教学有足够的发言权。萨顿的教育教学思想主要体现在“知识统一性思想、东方思想的价值、科学人性化、历史与认知一致性、科学与人文的融合、宽容和仁爱的态度”（如图 1）。这些观点对今天的 HPM 研究有很大的启发和意义。



图 1 萨顿的教育教学思想

2.1 知识统一性思想

知识的统一主要体现在两个方面：（1）一门科学的进步都是依赖于其他科学的进步。也就是说，每一门科学的发展与其它科学在许多方面都是相关联的，并不存在独立发展的科学，并且这种相关性并不是偶然发生的，它们之间的这种相关性是有机的；（2）科学发展在不同的地方使用不同的方法却同时得出了某一个同样的结论，这也意味着科学内在的一致性。萨顿认为，知识统一性最好的方式是研究知识发展的来龙去脉，整体把握。他把某些眼界狭隘的教育工作者比喻为一只站在一棵枝叶繁茂的大树顶端一根树梢上的鸟，它难以透过那些繁密的枝叶看到这棵大树的主干和其它远离它所在的枝条的那些枝叶，更难以看到那些深深植

于泥土之中的根须，它看不到整个这棵大树——知识之树全貌，所以体会不出知识是一个统一的整体^[3]。

2.2 东方思想的价值

“科学的种子，包括实验方法和数学方法，实际上科学的全部形式的种子都来自于东方”。^[4] 实验和数学方法由东方传到西方之后，在西方得到极大的发展。但是在欧洲中世纪的黑暗时期，这些方法又被东方人民大大的发展了。因此，在很大程度上，实验科学不仅仅是西方的子孙，也是东方的后代，东方是母亲，西方是父亲。”^[5]

2.3 科学的人性化

萨顿的“科学人性化”思想是建立在科学日益专门化、技术化、理智化的基础上的。是对科学技术滥用、对科学家与人文学者之间相互指责的一种批判及反思，对后世有着巨大的警醒作用。但是对于萨顿“科学史是实现科学人性化的唯一途径”的期望，学者望而却步。按照萨顿的教育思想，数学史可以让数学变得人性化，而且，人性化的数学教学能使学生热爱并深刻理解数学。正因为如此，萨顿指出，研究数学史的主要理由在于人性，而数学史家的主要职责之一是解释数学的人性。

2.4 历史与认知一致性

在《科学的生命》（1948）中的“教育的观点”这篇文章里，萨顿对于教育的功能进行了详细的论述。在传统的教育中，通常强调的是教授给学生现成的知识，而不关注知识产生的历史与认知之间的关系。教科书的有些内容是以逻辑的方式将所要教授的知识重新建构，而不是按照历史发展的序列来写作。以这种方式来编排的教科书有其思路清晰、易于掌握所讲授的知识等优点，但却使得知识发展的历史消失在逻辑一贯的叙述背后。

2.5 宽容和仁爱的态度

萨顿说：“没有宽容和慈善精神，我们的文明，无论它现在是怎样的，都非常不稳固。科学是必需的，但只有它却很不够。”科学本身并不会教给我们宽容和仁爱的态度，但是我们可以从对科学史研究中理解这种宽容和仁爱。因为在科学的历程中，科学史不仅是对人类探索宇宙的描述，而且还是对真理的捍卫以及对各种错误和迷信的斗争。在科学发展的历史

过程中，主流是进步，但是，科学的这种进步并不是没有中断过，在某一段时期内，在某个地区、民族有过中断，但是从整个科学的发展来看，仍然是连续的。^[3]

2.6 科学与人文的融合

萨顿认为，科学与人文的融合既是必要的，也是可能的。科学精神是科学与人文融合的基础，科学的正确应用的需要为科学与人文的融合提供有力保证。最终，萨顿提出“科学史是沟通科学与人文之间的桥梁”。

3 对 HPM 研究的启示

萨顿的教育教学思想对 HPM 研究有着重要的启示。

3.1 知识统一性思想对 HPM 研究的启示

公理，顾名思义就是大家都公认的道理，自《几何原本》以来，它其中的公理都很明白不必要证明，惟独平行公理不是很明白，似乎需要证明，后来人们又把平行公理称之为欧几里得第五公设（以下简称第五公设），被认为是世界数学难题之一。随之这一问题就成为众多数学家，甚至哲学家审视的对象。从整个几何史来看，非欧几何诞生经历了三种不同的途径：第一种途径是 17 世纪以前，对平行公理的试证，按这种途径试证第五公设并具有代表性的有古希腊学者普塞德纽斯(Posidonius, 公元前 135~前 51)^[6]、希腊的托勒密(Ptolemy, 约 100~170)、公元 5 世纪希腊评论家普罗克拉斯(Proclus, 410~485)、阿拉伯数学家纳绥尔丁(Nasir.Eddin, 1201~1274)、英国数学家沃利斯(J. Wallis, 1616~1703)等，都以失败而告终；第二种途径是 18 世纪，在第五公设试证基础上，无形引出两种非欧公理，但当时他们自己并没有意识到是一种新几何体系。其中这三位具有代表性的数学家是意大利数学家萨凯里(G. Saccheri, 1667~1733)、瑞士数学家兰伯特(H. Lambert, 1728~1777)、法国数学家勒让德(A. M. Legendre, 1752~1833)。第三种途径是 19 世纪俄国数学家罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky, 1793~1856)和匈牙利数学家亚诺什·鲍耶(Janos Bolyai, 1802~1860)在总结前人关于第五公设精深研究的基础上，不约而同的地利用其它公理来代替第五公设而产生欧几里得几何以外的几何。德国数学家高斯(C. F. Guass, 1777~1855)虽然生前没有专门发表文章讨论过非欧几何，但从他遗留下的信件中知道他在 1820 年左右已经有许多关于非欧几何的定理，并且对于非欧几何学的观念，他是非常清楚的，非欧几何

学这个名词就是他定的。可问题的关键是这种新几何会产生许多奇怪的结论：如三角形内角和不等 $\neq$ 于 180° ，圆周率也不是 3.14 等等，完全背离现实空间观念。为解决这一问题就必须解决非欧几何逻辑上的相容性，在现实生活的欧氏空间中找到模型来证实。当时高斯、罗巴切夫斯基和鲍耶都试图做到这一点，比如：高斯试图从应用的角度解决，他实地测量了三座高山山峰构成的三角形内角和，由于他选择山峰的范围不够大，最后发现内角和与 180° 只有微小的差别；罗巴切夫斯基试图从应用、教育、哲学等角度来解决，他曾经实际计算了天狼星的视差，由于当时微分几何知识的欠缺还是没有为新几何提供有力证据，但他当时的工作已很接近后来克莱因—贝尔特拉米模型；鲍耶则试图从纯数学理论的角度来进行思考，由于当时数学知识的限制也没有取得成功。于是，非欧几何学在人们心中就只是个假说，未被人们理解和接受。直到 1868 年，意大利数学家贝尔特拉米（E. Beltrami, $1835\sim1899$ ）才注意到闵定的结果和罗氏几何学的联系，于是他发表了一篇题为“非欧几何学的实际解释”的文章，利用当时微分几何的最新成果证明了关于伪球面上的内在几何学与罗氏几何一致。^[4]这种具体而实在的喇叭状特殊曲面（伪球面）模型消除了人们对罗氏几何学的怀疑，使这种非欧几何由假说变为定论。后来亥姆霍兹（H. von Helmholtz, $1821\sim1894$ ）、李（Sophus Lie, $1842\sim1899$ ）和贝尔特拉米在他的基础上继续研究，巧妙地运用微分几何得到了一个确定的结论：三种常曲率的面上各有一种几何学。（I）曲率恒等于零时，就是欧氏几何的面；（II）曲率为负常数时，就是罗氏几何的面；（III）曲率为正常数时，就是黎曼几何的面。这种思想凭借微分几何的发展，统一了非欧几何与欧氏几何推广了空间观念。

几何学的思维起源于非欧几何，中学数学教师应该完全掌握罗氏几何的基本概念和内容，因为只有从非欧几何的观点来看才得以阐明在中学所学欧氏几何的逻辑结构。中学高年级的学生也会很感兴趣并有成效的理解罗氏几何基本内容。由此可见，教师的知识统一性非常重要，只有这样才能善于理解各种几何教材中的知识。我们在 HPM 研究过程中，一定要注意知识统一性思想，弄清来龙去脉，整体把握。

3.2 东方思想的价值对 HPM 研究的启示

我国在战国时期就认识到了负数。如李悝（约前 $455\sim395$ ）在《法经》中写道，“衣五人终岁用千五百不足四百五十”。而在甘肃居延出土的汉简中，有“相除以负百二十四算”、“负二千二百四十五算”、“负四算，得七算，相除得三算”等类似叙述，这里把“负”与“得”相比，意为缺少、亏空，就是今天负数的雏形。

关于负数的加减法运算法则是在我国古代数学经典著作《九章算术》给出的，其最晚成书于公元前 1 世纪。

同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。

这里的“同名”、“异名”，就是“同号”和“异号”，“相益”、“相除”是二数绝对值“相加”和“相减”，“无”即“零”。前四句为减法法则，后四句为加法法则。大意为：同号两数相减，等于其绝对值相减（若绝对值较大者为被减数，则符号不变；否则要改变符号）；异号两数相减，等于其绝对值相加（取绝对值较大者符号）；零减正数得负数，零减负数得正数。异号两数相加，等于其绝对值相减（取绝对值较大者符号）；同号两数相加，等于其绝对值相加（符号不变）；零加正数等于正数，零加负数等于负数。

3.3 历史与认知一致性对 HPM 研究的启示

函数概念的历史与认知的发展具有高度的一致性。17 世纪，莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646~1716）用“function”一词来表达与曲线相关的几何量（纵坐标、次切距等），后来将 x 的幂称为 x 的函数。李善兰（1810~1882）所译《代数学》（1859）一书首先把函数概念介绍到我国，将“function”一词译为“函数”。（《代数学》中有：“凡式中含天，为天之函数。”（中国古代以天、地、人、物表示未知数）书中定义相当于“凡一式含有 x ，则称之为关于 x 的函数。在古代函与含二字相通，“代数学”中函数的函是有着包含的意思。函数定义在历史上的数学家代表如表 1 所示：

类别	函数定义	历史上的数学家代表
1	运 算	格雷戈里（1667）
2	解析式	伯努利（1696、1718）；欧拉（1748）；拉格朗日（1797）； 布尔（1854）
3	曲线（图像）	欧拉（1748）
4	变量的依赖	莱布尼茨（1714）；欧拉（1755）；拉克洛瓦（1797）； 柯西（1821、1823）； 罗巴契夫斯基（1834）；狄利克雷（1837）；斯托克斯（1847）

		孔多塞(1778);傅立叶(1822);罗巴契夫斯基(1834); 狄利克雷 (1837); 黎曼 (1851); 汉克尔 (1870); 哈代 (1908); 古尔 萨 (1923)
5	变量的对应	
6	映 射	戴德金 (1887)
7	集合对应关系	坦纳里 (1904); 卡拉泰奥多里 (1917); 维布伦 (20 世纪); 布尔巴基 (1939)
8	序偶集	皮亚诺 (1911); 豪斯多夫 (1914); 布尔巴基 (1939)

表 1 数学家对函数的定义

从表 1 可以看出，函数的定义大体可定义为三个阶段“变量说”、“对应说”、“关系说”，从认知上来讲，“变量说”对应于初中学生的认知水平，“对应说”对应于高中学生的认知水平，“关系说”对应于大学学生的认知水平。对于函数概念，历史与认知的一致性如图 2 所示：



图 2 函数概念历史与认知的一致性

3.4 宽容和仁爱的态度对 HPM 研究的启示

十八大提出：坚持教育为社会主义现代化建设服务、为人民服务，把立德树人作为教育的根本任务，全面实施素质教育，培养德智体美全面发展的社会主义建设者和接班人，努力办好人民满意的教育。教育部（2014 年）又下发了文件《关于全面深化课程改革，落实立德树人根本任务的意见》。立德树人的一条重要途径就是学科德育，萨顿宽容和仁爱的态度对学科德育有一定启发。

20 世纪初工业化社会培养人的教育模式是授受主义为主流，20 世纪 80 年代左右起培养人的教育模式是探索理解过程中建构自己的知识。学习者和教育者相对于知识的获取和传递关系也在发生变化，如图 3

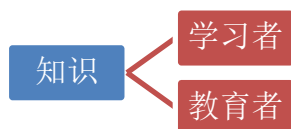


图 3 学习共同体

宽容和仁爱，在学生的成长中，有着极其重要的作用和影响。在任何教育体系下，那种严格的没有人性色彩的教育制度，苛刻僵化的教育规则不适宜教育的可持续发展。教育者对知识进行传递，最大程度上是创设情境引导学习者，能够允许学生大胆提出自己对知识理解的观点，能对学生出现的错误抱有宽容和仁爱的态度。HPM 研究中启示我们如图 4 流程：

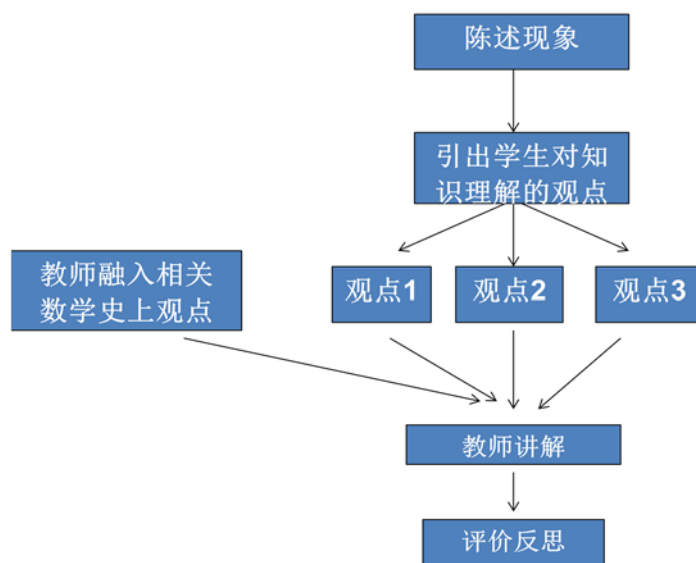


图 4 宽容和仁爱视角下 HPM 流程图

4 结束语

萨顿的知识统一性思想告诉我们知识之树全貌的重要性，教育工作者具有统一的知识，才能深刻理解数学知识，而且在 HPM 研究过程中，才能弄清来龙去脉，整体把握。萨顿的东方思想的价值思想启发我们，在 HPM 案例开发中怎样获得更有利于学生理解数学知识的历史素材。萨顿历史与认知一致性思想认为最为合理的方法，就是让学生去研究按照数学发展的历史过程编写的教科书。这种按历史叙述的教科书，能够把课程讲得更为明白、更为直观。而且教师的口头讲授比书面讲义更灵活，更容易作简短的历史插话。萨顿宽容和仁爱的态度思想告诉我们，数学史就是在数学与人文之间构建一座桥梁，可以促使学生更好地理解知识，激发学习数学的热情，培养坚忍不拔的意志品质。数学知识的创造是一种积累的过程，学生可以比之前早期数学家更有见识和学问，是因为他们站在了前人的肩膀上，由此可以看

得更远。数学史的研究和学习，对于学习数学知识是很有价值的。HPM 视角下教学能体现萨顿的教育思想是我们所追求的目标之一，HPM 案例开发中贯穿萨顿的教育思想是我们努力的方向。

参考文献

- [1] Cohen I. B. Honors and medals awarded to George Sarton [J]. *Isis*, 1957(3): 299.
- [2] Pyenson, L. *The Passion of George Sarton* [M]. Philadelphia: American Philosophical Society, 2007.
- [3] 乔治·萨顿著, 陈恒六, 刘兵, 仲维光译. 科学的历史研究[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2007.
- [4] 乔治·萨顿著, 陈恒六、刘兵、仲维光译. 科学史和新人文主义[M]. 北京: 华夏出版社, 1989.
- [5] 乔治·萨顿著, 刘诺裙译. 科学的生命[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2007
- [4] Sarton, G. Science and tradition [A]// *A Guide to the History of Science* [C]. Chronica Botanica Company, 1952.
- [5] 乔治·萨顿. 科学的生命[M]. 刘珺珺译, 北京: 商务印书馆, 1987.
- [6] 中村幸四郎等译. 几何原本（日文版）[M]. 公立出版株式会社, 1983.

数学史融入“列方程解相遇问题”复习课的教学

岳增成¹ 程赞²

(1.华东师范大学数学系, 上海 200241; 2.华东师范大学附属紫竹小学, 上海, 200241)

1 引言

相遇问题是列方程解决问题部分的重要组成部分,也是考查学生的重要内容。然而,在一次测验中,面对这样一道测试题,“货车在上午8时从甲站开往乙站,每小时行85千米。客车在上午10时从乙站开往甲站,每小时行95千米,经过2小时后与货车相遇。甲站与乙站相遇相遇多少千米?”,学生的得分率普遍不高。究其原因,与学生没有很好地理解列方程解决相遇问题的本质有着密切的关联。那么,该如何帮助学生理解列方程解相遇问题的本质所在?特别是在小升初,学生普遍对数学学习兴趣不高的复习阶段。

数学史给了我们很好的启示,一方面从动机的视角出发,数学史能增加学生的学习兴趣,创造学生的学习动机,使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心^[1],另一方面,数学史作为一种资源,在提供大量问题及解法^[2]的同时,提供了学生探究的机会^[3]。因此,我们将数学史融入“相遇问题”复习课的教学,意欲实现如下的教学目标:(1)借助线段图分析复杂相遇问题中的等量关系,列方程解决问题;(2)通过辨析,领悟万变不离其宗,会利用基本的等量关系解决各种相遇问题;(3)通过数学家斐波那契的故事,培养学生对数学学科的情感。

2 历史素材及选取

一元一次方程问题古已有之,它包含四则、定和、余数、盈亏、互给、合作、行程、比例等问题类型,^[4]相遇问题是其中行程问题(包括等速直线、变速直线运动,下文中出现的都是等速直线运动)的重要组成部分,在古代的一些数学著作都有此类问题的记述,^[5]比如

(1)成书于公元1世纪的《九章算术》盈不足章中有“今有垣高九尺。瓜生其上,蔓日长七寸;瓠生其下,蔓日长一尺。问几何日相逢”,均输章中有“今有凫起南海,七日至北海;雁起北海,九日至南海。今凫、雁俱起,问几日相逢”。

(2)意大利数学家斐波那契写于1202年的《计算之书》中有这样2个问题“塔高100尺,

塔底有一蛇，每天向上爬 $\frac{1}{3}$ 尺，又向下爬 $\frac{1}{4}$ 尺；塔顶有另一条蛇，每天向下爬 $\frac{1}{5}$ 尺，向上爬 $\frac{1}{6}$ 尺。问：几天后两蛇相遇” “两船相隔若干距离，第一艘船需行5日，第二艘船需行7日(彼此抵达对方位置)。今两船同时出发(相向而行)，问几日后相遇”。

此外，18世纪初 Магницкий编写的教学书《算术》中也有类似于上述行船问题的题目“一旅行者从甲地到乙地走17日，另一旅行者从乙地到甲地走20日。问：两人同时出发，几日后相遇？”

那么，该选取哪些问题应用于教学？考虑到小学五年级学生的认知水平、从初次接触相遇问题到第一次复习这部分内容相隔时间较长、进入复习阶段学习积极性不高与领悟列方程解相遇问题的本质的目标等因素，我们打算以“两船相隔若干距离，第一艘船需行5日，第二艘船需行7日(彼此抵达对方位置)。今两船同时出发(相向而行)，问几日后相遇”为问题原型，通过变式设置与故事串联来设计本节课的教学活动。

3 教学过程

第一环节：情境引入

教师根据学生对斐波那契的了解情况，介绍他的生平、著作，并引出主题。

师：很好，你听说过斐波那契数列。但看来大多数同学没有听过，我来介绍下。他是中世纪意大利的著名数学家，他的《计算之书》于1202年出版，这在中世纪是一部百科全书式的数学著作，对整个世界的数学发展都有着深远的影响。（课件展示斐波那契的头像、《计算之书》的封面）斐波那契的父亲是一位商人，年轻时斐波那契随父亲一起到地中海经商，常年在货船上度日，因此斐波那契思考了很多与货船航行相关的行程问题，收录在他的《计算之书》中，今天，就让我们跟随斐波那契的脚步，走进他的数学世界，一起去探讨这些行程问题。

第二环节：相遇问题基础练习

出示问题背景（下文中的问题背景即此背景）

已知撒丁尼亚（现称为撒丁岛）与非洲海岸相距200km，甲货船在撒丁尼亚的港口A，乙货船在非洲海岸的B港口，斐波那契在甲船上。（如图1）



图 1

问题一：两船同时出发相向而行，速度分别为 25km/h 和 15km/h，经过几小时两船相遇？

师：读完题目，我们马上知道它是什么问题？

生：相遇问题。

师：相遇问题我们已经学过，这节课我们一起来复习相遇问题。（出示课题）

谁来分析运动情况是什么？

通过教师的引导，学生从运动的起始状态、运动时间、运动方向、运动结果，即两艘船是两地出发、同时出发、相向而行、最终相遇来分析运动情况。

师：那么这个相遇问题该怎么解决？请你在课堂练习本上画出线段图，并写出解设句、列出方程，时间关系，今天课堂上的题目我们都不求解。

学生独立完成，教师巡视、观察学生的解题过程，并反馈学生的解答：

设经过 x 小时两船相遇

$$25x + 15x = 200$$

$$(25 + 15)x = 200$$

师：用第一个方程的同学举手，你找到的等量关系是什么？

生：相遇时甲行的路程+相遇时乙行的路程=总路程（ $S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = S_{\text{总}}$ ）（对照图 2 线段图分析）

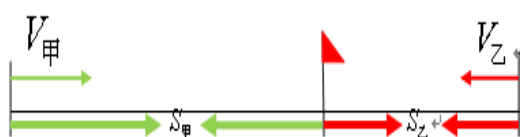


图 2

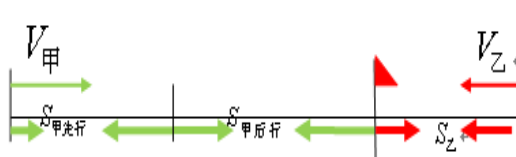


图 3

师：刚才的等量关系我们可以很清晰地从线段图上得出，那么第二个方程又是用了什么

等量关系？怎么得出的？

生：速度和 $\times$ 相遇时间=总路程（ $V_{\text{和}}t=S_{\text{总}}$ ）

师：这个等量关系是怎么得出的？

生：用乘法分配律，先把速度和加起来，再乘相遇时间。

师：也就是说因为他们的相遇时间相同，所以我们可以由第一个等量关系运用乘法分配律推导出第二个等量关系。因此第一个是最基本的等量关系，相当于爸爸，第二个是推导出来的，相当于儿子。

第三环节：相遇问题变式练习

出示题目背景及问题二：按合同规定，甲船要赶在中午前交付货物，因此甲船一大早出发，先行了 80km 后乙船再出发，甲船速度为 25km/h，乙船速度为 15km/h，乙船经过几小时与甲船相遇？

教师引导学生按照上题的流程，即分析运动情况、画线段图、设未知数、列方程来解决问题，与上题过程不同的是在设未知数前让学生用手势演示运动过程，加深学生对运动过程的理解。

学生独立完成，教师巡视、观察学生的解题过程，并反馈学生的解答：

设乙船经过 x 小时与甲船相遇

$$80 + 25x + 15x = 200$$

$$25x + 15x = 200 - 80$$

$$80 + 25x = 15x$$

师：同学们用了这三种方法，我们一起来看，第一种方法用了什么等量关系？

生：甲先行的路程+甲后行的路程+乙行的路程=总路程（ $S_{\text{甲先行}} + S_{\text{甲后行}} + S_{\text{乙}} = S_{\text{总}}$ ）（对照图 3 线段图分析）

师：第二种呢？

生：甲后行的路程+乙行的路程=总路程—甲先行的路程

师：第三位同学列的方程看明白了吗？同意吗？

生：列错了，想成了甲先行的路程+甲后行的路程=乙行的路程

师：是啊，一看到先行、后行，就容易想成追及问题。所以，我们一定要画好线段图，根据图找等量关系。

师：我再请大家来看“甲先行的路程+甲后行的路程”实际上也可以用一个量来表示，就是什么？

生：相遇时甲一共行的路程。

师：所以我们的等量关系还可以进一步简化，就是“相遇时甲行的路程+相遇时乙行的路程=总路程（ $S_{甲}+S_{乙}=S_{总}$ ）”。

师：我们回过头来看，请你找出第一题与第二题的相同之处，不同之处。组内讨论下。

通过教师的引导与小组合作，学生给出了这样的答案：他们的出发地点、运动方向、运动结果都是相同的，两地的距离，两船的速度也相同；他们都可以用“相遇时甲行的路程+相遇时乙行的路程=总路程（ $S_{甲}+S_{乙}=S_{总}$ ）”来列方程。不同之处是第一题是同时出发，第二题是先后出发。

出示题目背景及问题三：海上航行不是一帆风顺的，甲船因途中遭遇大风，斐波那契决定躲避风浪，因此在途中停了半个小时，甲船速度为 25km/h，乙船速度为 15km/h，经过几小时两船相遇？

教师引导学生先前的流程解决问题，得到了学生如下的反馈：

解：设经过 x 小时两船相遇

$$25(x-0.5)+15x=200$$

$$25x+15*0.5+15x=200$$

师：同学们中有这两种答案，我们来看，第一种等量关系是什么？

生：相遇时甲行的路程+相遇时乙行的路程=总路程（对照图 4 线段图分析）

师：有同学列了第二种，对不对？（部分同学认为对，部分同学认为不对）

生：这里 x 应该是甲实际行驶的时间，乙多走了 0.5 小时。



图 4

师：如果设甲实际行的时间为 x 小时，这个方程就对了。这个方法理解起来稍有难度。

师：刚才这道题目和前面两题相比又有什么相同点和不同点？

学生通过小组合作给出了这样的答案：都是两地出发，相向而行，最后相遇，第二题是先后出发，第三题中途甲船有停顿。他们都可以借助同样的等量关系解决问题：相遇时甲行的路程+相遇时乙行的路程=总路程（ $S_{甲}+S_{乙}=S_{总}$ ）。

出示问题背景及问题四：早上 9 点时，两船同时出发相向而行，速度分别为 25km/h 和 15km/h，行驶一段时间后，他发现自己遗漏了一份非常重要的文件，于是马上命令船长返程赶回 A 港口去取（取件时间忽略不计），取好后继续向港口 B 行驶，行驶过程中速度不变，

下午 3 点时两船相遇，问甲船行驶了几小时后斐波那契发现自己遗漏文件？

师：时间关系，这个问题留作课后大家来解决。

4 教学反馈

课后对授课的两个班级共计 61 名学生进行了问卷调查与部分学生访谈，对授课教师进行了访谈，结果表明：

（1）超过 93% 的学生认为自己听懂了这些课，另外在“听了这节课，你的收获是什么的”的回答中，有 35 人说道加深了对相遇问题的理解，可见，从知识掌握的角度来看，这节课取得了不错的效果，后来在区统考时学生对相遇问题“如图（见图 5）所示，小巧和小胖同时从 A 点出发，沿长方形绿地朝两个方向走，小巧的速度是 50 米/分，小胖的速度是 70 米/分。当小胖走到 C 点时，小巧离 C 点还有 360 米。这时，他们走了几分钟？再过几分钟他们两人相遇？”的解答得分率较高的现象也间接地印证了这一点：

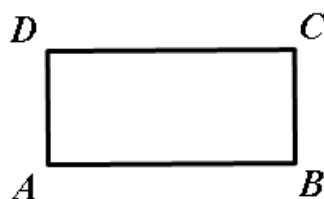


图 5

（2）尽管小学生一直喜欢上数学课的比例不是特别高（77%），甚至有两个人不喜欢上数学课，但是他们没有人不愿意了解与教学内容有关的历史，甚至有约 82% 的学生愿意/非常愿意了解这些内容，可见，大部分学生对数学的历史比较感兴趣，这也就不难理解有 37 名学生在“这节课，你印象最深的是哪部分”的回答中，提到了与历史相关的斐波那契或者他写的《计算之书》，有 24 人在回答上述“听了这节课，你的收获是什么的”时，提到了斐波那契和他的《计算之书》，56 人希望课本里介绍相关数学家生平或相关的数学史内容，他们的理由除了未作答或答非所问的 10 人外，包括增加知识面、拓宽视野，（26 人）对数学的历史本来就感兴趣或数学史能提高他们的兴趣，（14 人），促进数学理解（5 人），甚至有一名小学生提到“小学生应当了解一些历史”。

（3）对数学史融入的课堂教学，尽管有一部分学生不置可否，但是超过 84% 的人希望以后的数学课也用这种方式进行，可见数学史融入的数学课堂对学生有一定的吸引力。

（4）授课教师对数学史的认识发生了一些改变，比如数学史的运用不仅仅是在数学课堂上讲故事，其目的也不仅仅是激发学生兴趣，事实上，在数学课堂中运用数学史有多种方式，比如直接运用历史名题（复制式），根据学生认知特点而对历史名题的改变（顺应式），

而即使时讲故事（附加式），除了激发兴趣外，还可以增加学生的知识面，使自己的课堂更连贯。

5 结论与启示

本节课以《计算之书》中的问题为原型，在附加地介绍斐波那契的故事后，利用顺应式得到的4个问题进行变式教学，取得了不错的教学效果，体现了如下数学史的教育价值：

（1）探究之乐

为了实现“通过辨析，领悟万变不离其宗，会利用基本的等量关系解决各种相遇问题”的重要教学目标，引导学生突破这一难点，教师从问题一就开始让学生寻找自己列出的几个等量关系的共通之处，特别是问题二、三，在问题一的基础上，教师引导学生分析题意，通过手势、线段图表征题意，通过小组合作进行自主探索。学生通过辨析，找到了解决相遇问题的关键所在，即“相遇时甲行的路程+相遇时乙行的路程=总路程（ $S_{甲} + S_{乙} = S_{总}$ ）”。在整个教学过程中，通过合作探究，学生不仅找出了解决关键问题所在，而且获得了问题解决的体验。

（2）文化之魅

“掐头去尾中间烧”依然是小学数学教学中存在的问题，而这恰恰导致了学生对数学滋生出“除考试别无它用”的观念。而事实上，“头”代表的知识来源与“尾”代表的知识应用对改善学生对数学的错误认识至关重要。因此，这节课以斐波那契为线索，一方面在情境引入环节，通过人物介绍，让小学生知道数学来源于生活，数学是与生活密不可分的，另一方面，通过变式设置，让学生列方程解决问题，在解决问题的过程中，让学生体验到数学不仅来源于生活，而且可以应用于生活，解决实际问题。通过这节课的学习，学生体验了数学与生活的联系，感悟到了数学文化的魅力所在。

（3）德育之效

前面已经提到学生进入复习阶段学习积极性不高的现状，因此我们希望改善这种现状：一方面在设问的基础上引出斐波那契的故事介绍，吸引学生的兴趣；另一方面在引导学生解决问题的过程中，让他们感受数学家的伟大之处。事实证明，我们的教学设计取得了不错的效果：在整个教学过程中，学生为斐波那契的故事所吸引，“埋头于”斐波那契遭遇问题的解决当中。

（4）观念转变

通过案例开发，授课教师的认识发生了转变，她认识到了数学史融入数学教学方法的多样性，也感受到了不同方法的使用带来的不同结果。她已为 HPM（History and Pedagogy of

Mathematics, 数学史与数学教学)所吸引, 她希望更多的了解 HPM 的缤纷世界, 因此, 她期望进一步开发融入数学史的课例。

然而, 有机会领略 HPM 缤纷世界的小学教师并不多, 我们期望更多的教师参与进来, 让数学史“立德树人”的教育价值在学生身上展现出来。

参考文献

- [1] Gulikers I., Blom K. A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, 47: 223-258.
- [2] Fauvel J., van Maanen J. *History in Mathematics Education* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 262-264; 272-273.
- [3] Fauvel J. Using history in mathematics education [J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.
- [4] 沈康身. 历史数学命题赏析[M].上海: 上海教育出版社. 2010: 140-249.
- [5] 汪晓勤. 历史上的一元一次方程问题(一)[J]. 中学数学教学参考(初中), 2007(11): 54-56.

初三几何复习课上的寻根之旅*

李霞¹ 吴迅捷²

(1.华东师范大学数学系, 上海, 200241; 2.呼玛中学, 上海, 200431)

1 引言

三角形面积问题一直是教学中的难点, 学生对多种方法往往无从选择, 这就需要培养学生发现解决问题突破口的能力。对教师教学而言这可能只是经验的积累, 但教学不能停留在“经验传授”上。翻阅尘封在历史中的数学家著作, 可以发现由他们创造的结论或命题, 仍然有一些还在应用, 并且经过创新变形, 可以作为现代解题的法宝^[1]。同时, 笔者对《几何原本》中的命题进行了新的审视, 发现某些命题可以与现行教材中的知识融合起来, 有助于解决有关三角形面积的题目。虽然 HPM 视角下的初中数学教学案例日益增多, 但还未有将数学史素材融入初三几何复习课的成功尝试。那么, 如何将数学史素材融入初三几何复习课的教学中? 这能对学生的学产生哪些积极的影响? 上述问题的答案需要在实践中寻找。

本节课尝试将有关命题的历史素材融入课堂, 希望达到以下教学目标:

- (1) 理解和掌握有关三角形面积的命题, 利用题目的“根”来解题;
- (2) 理解经典的几何证明, 感悟几何的系统性和严谨性, 领会并应用数学转化思想;
- (3) 通过对数学史的了解, 让学生感受数学背后的人文精神, 感悟数学文化。

2 《几何原本》中的命题

欧几里得《几何原本》成书于公元前 3 世纪, 全书共有 13 卷, 共 465 个命题。其中第一卷命题 37 是这样叙述的: 在同底上且在相同而平行线之间的三角形彼此相等。第六卷命题 1: 等高的三角形或平行四边形, 他们彼此相比如同它们的底的比^[2]。这两个命题的几何语言表示如图 (1)、(2)。

上述两个命题所描述的是常用于解有关三角形面积习题的“技巧”: 同底等高三角形面积相等; 等高三角形面积比等于相应的底边之比。两个命题呈递进形式, 由特殊到一般。欧几里得利用者两个命题将面积关系转化为线段关系, 分别证明了勾股定理和平行线分线段成比例定理^[3], 我们可以称之为“欧几里得面积法”。两个命题不难证明, 但却有着重要的应用价值, 足以体现《几何原本》的系统性和严密性。

学生在初三复习阶段, 投入题海, 却不知数学题的“根”在哪里。他们或许知道欧几里

*2015 年度上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教材的有效设计”之子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”(项目编号: D1508) 系列教学案例之一。

得的上述两个命题，但并没有应用它们的意识。因此，我们尝试利用这两个命题及其背后的历史素材，设计一堂有关三角形面积的平面几何复习课。

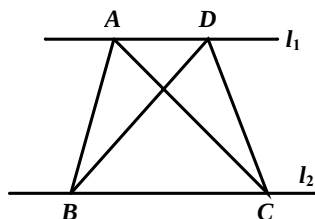


图 1

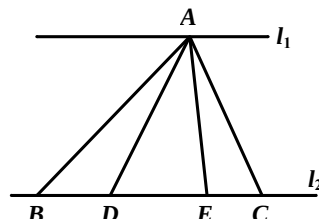


图 2

数学史在数学教学中的运用方式有附加式、复制式、顺应式和重构式四种类型^[4]。我们采用如下四种方式进行HPM视角下初三几何复习课的教学：

- (1) 重构式：将数学史上零散的数学命题串联起来，设计问题让学生作出发现；
- (2) 复制式：在课堂上向学生介绍数学命题的早期形式，让学生了解题目的“根”；
- (3) 附加式：利用“洋葱视频”向学生简单介绍欧几里得和《几何原本》；
- (4) 顺应式：拓展题目改编自古巴比伦土地分割问题。

3 教学设计与实施

3.1 牛刀小试

课堂伊始，教师给出一道有关平面几何习题及变式，两个问题由浅入深，教师引导学生逐步发现解决问题的关键所在，如图（3）、（4）：

例 1。如图 $AB \parallel CD$ ，若 $S_{\triangle AOD} = 8, OD = 2OB$ ，求 $S_{\triangle BOA}, S_{\triangle BOC}$ 。

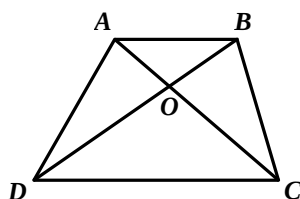


图 3

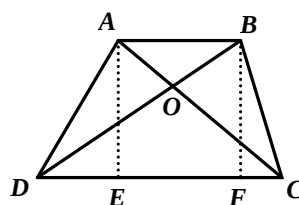


图 4

例 2：如果删除例 1 条件中的 $OD = 2OB$ ，能否求出 $S_{\triangle BOC}$ ？

师：例 1 中，你能用什么方法求得 $S_{\triangle BOA}, S_{\triangle BOC}$ ？

生：嗯…

生 1：可以先求 $\triangle AOB$ 的面积，等于 4。

师：为什么呢？来你给大家解释一下。

生1: 因为 $\triangle AOD$ 和 $\triangle AOB$ 的面积比等于 OD 和 OB 的比, 所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}S_{\triangle AOD} = 4$ 。

师: 好的, 那你的依据是?

生1: 因为两个三角形等高, 所以面积比等于底之比将面积求出来。

师: 大家都赞同生1的做法吗?

生: 赞同, 也可以求出来 $\triangle BOC$ 的面积。

师: 如果将 $OD=2OB$ 的条件去掉, 你还能求出 $\triangle BOC$ 的面积吗?

生2: 过 A 作 DC 的高 AE 交 DC 于 E 点, 过 B 做 DC 的垂线 BF 交 DC 与 F 点。那就有(四边形) $ABEF$ 是矩形, 可以得到 $AE=BF$ 。因为 AE 、 BF 是 $\triangle ADC$ 与 $\triangle BDC$ 的高, 所以他们的面积相等, 所以两个三角形减去他们公共部分 $\triangle ODC$, 可得到剩下的两个三角形面积相同, 所以 $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD} = 8$ 。

师: 同学2主要用到哪几条来解题的?

生: 同底等高的两个三角形面积相同。

师: 还有前面解题中, 生1提到的等高三角形面积比等与底边比, 请大家用几何语言描述这两种情况。

3.2 性质辨析

教师要求学生作图表示出两种性质: 同底等高三角形面积相等; 等高三角形面积比等于底边之比。学生给出如下两个图形并进行了说明, 如图(5)、(6):

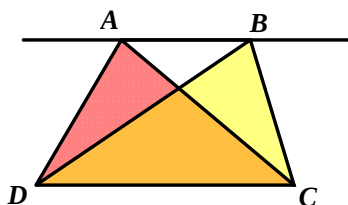


图5

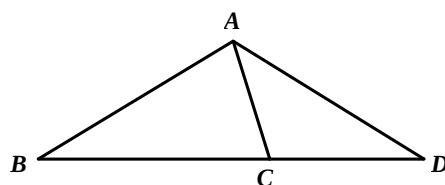


图6

生3: 如果两个三角形同底等高, 就像(图5) $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$, 我们就可以得到 $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$ 。

师: 怎么说明两个三角形等高呢?

生: 因为 $AB \parallel CD$, 所以等高。

生4: 就像前面生2作高之后证明中间的四边形为矩形一样。

生: 嗯, 是的。

生5: 像这样(指着图6), 可以得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的面积比等于 $BC:CD$ 。

师: 来给大家解释一下为什么?

生5: 因为两个三角形的底边 BC 和 CD 在同一直线上, 而且顶点相同, 所以高相同,

根据三角形面积公式就可以得到啦。

师：很好， BC 和 CD 和相等的“高”什么关系？

生 5：是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的底边 BC 和 CD 上的高相等。

师：好的，那大家能不能把生 5 前面说的结论补充完整？

生：等高三角形的面积比等于高所对应的底边的比。

然后，教师要求学生提炼出两个性质，并简单说明证明过程。

性质 1：同底等高三角形面积相等；

性质 2：等高三角形的面积比等于对应的底边之比。

同时，教师给出两个性质在数学名著《几何原本》中的表述形式，并播放洋葱视频中“几何学的创始传说-欧几里得和几何原本”的一段向学生展示了几何的发展历程以及有关《几何原本》的基本知识。

师：大家看视频都很认真，那你们有没有什么想法呢？

生：几何最重要的方法就是证明，而证明就是可以利用简单的定理去证明复杂的内容。

师：对的，我们就看看前面学到的命题是如何用来证明更复杂命题？

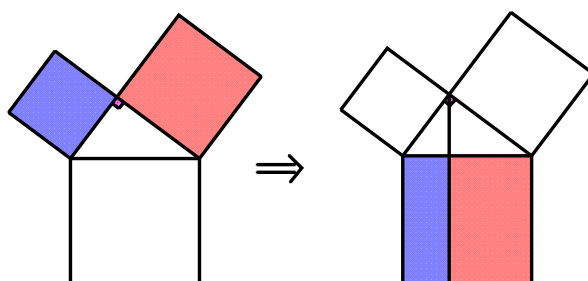
3.3 火眼金睛

从古到今，对勾股定理证明方法的探究从未间断，《几何原本》当中对勾股定理的证明运用几何图形中面积的转化来证明，逻辑严密性十足。

师：欧几里得是通过证明直角三角形直角边上所作的正方形的面积之和等于斜边上所作的正方形的面积。这恰恰就是勾股定理当中的 $a^2 + b^2 = c^2$ ，大家能不能理解？

生：能。

师：那接下来的重要任务就交给大家了，如何证明两个小正方形的面积和等于大正方形的面积，给大家一些时间阅读学案材料（见图 7），可以讨论。



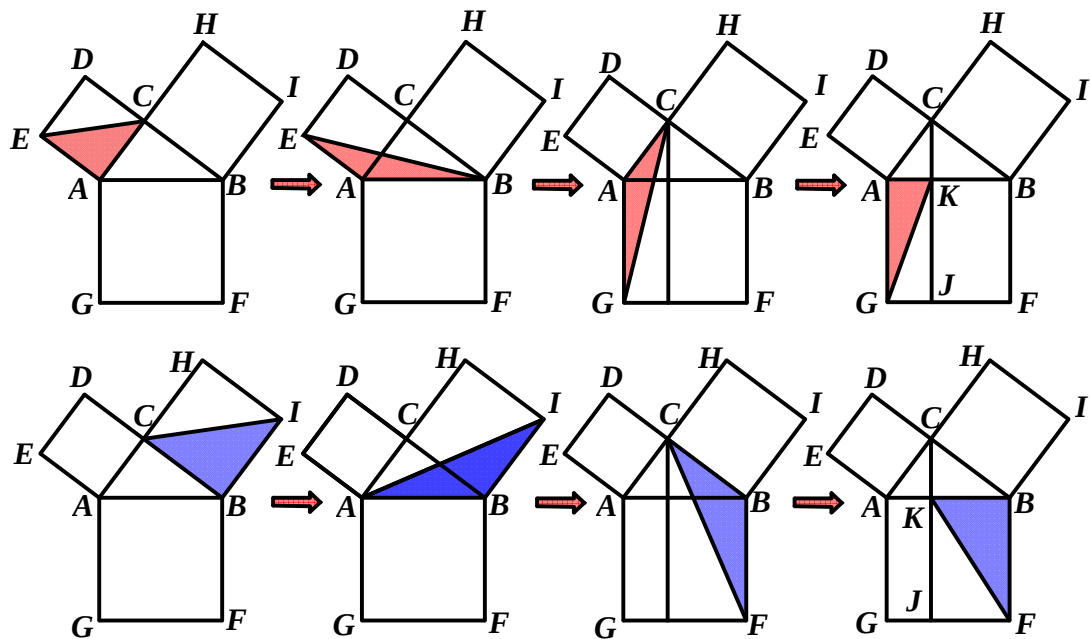


图 7

师：大家讨论好了吗？哪组能派代表来扮演“小欧几里得”上来给大家解释下他的证明？

生 6： $\triangle AEC$ 的面积等于 $\triangle AEB$ 的面积，因为底都是 AE ，而且同高。

师：不好意思打断下，“等底”大家可以看得出来，同高呢？

生 6：两个三角形夹在平行线 AE 和 BD 之间，在底边 AE 上的高都是 AC 。

生：嗯，是的。

生 6： $\triangle ACG$ 和 $\triangle AKG$ 也是，等底 AG ，同高 AK 。又得到一组面积相等的三角形。

师：嗯，很好，那我们能不能把正方形 $AEDC$ 转化成矩形 $AGJK$ ？谁有没有补充？

生 7：还有那个 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ACG$ 是全等的，因为边角边： $AE=AC$ ， $\angle EAB = \angle CAG$ 还有 $AB=AG$ 。

师：那之后我们是不是能得到 $\triangle AEC$ 、 $\triangle AEB$ 、 $\triangle ACG$ 和 $\triangle AKG$ 的面积都相等。那么就能够得到正方形 $AEDC$ 的面积等于矩形 $AGJK$ 的面积了，对吧？

生：是的，等量的两倍还是相等的。

之后，学生又演示了另一小正方形的转化过程，最后圆满证明了勾股定理。教师讲述了 17 世纪英国哲学家霍布斯（T.Hobbes，1588~1679）被《几何原本》中勾股定理的证明吸引而着迷于数学的故事。同时，从一个命题出发证明更多更复杂的命题，学生们也做到了。另一个命题在平行线分线段成比例定理的证明中也很重要，教师鼓励学生课外探讨。对于初三的学生来说，这两个命题能发挥怎样的作用？教师带领学生再回到初三复习课常有的习题演练中一探虚实。

3.4 应用巩固

初三复习课要揭示知识的内在联系，使知识系统化和集中化^[5]。从下面的应用中，我们将碎片化的古代数学命题系统地应用到初三课堂当中，促使学生发现初三复习题目的根源所在。

练习 1：如图（8），在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $3DE = BC$ ， $S_{\triangle DOE} = 1$ 。

- （1）求梯形 $DBCE$ 的面积。
- （2）求三角形 ADE 的面积。

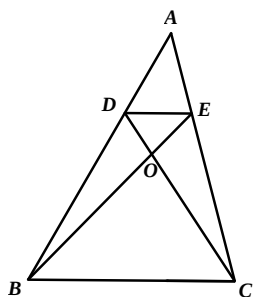


图 8

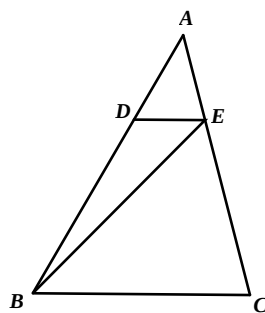


图 9

练习 2：如图（9），在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $S_{\triangle ADE} = 4$ ， $S_{\triangle BEC} = 24$ ，求 $S_{\triangle BDE}$ 。

生 8：由 $S_{\triangle DOE} = 1$ 以及 $3DE = BC$ ，根据性质 2 可得 $S_{\triangle DOB} = S_{\triangle EOC} = 3$ ，再用相似三角形面积比等于相似比的平方求得 $S_{\triangle BOC} = 9$ ，那么梯形面积就为 16。

师：很好，有同学采用别的方法的吗？

生 5：求 $S_{\triangle BOC}$ 也可以利用性质 2， $\triangle EOC$ 和 $\triangle BOC$ 的面积比为 1:3，从而可以求出 $S_{\triangle BOC} = 9$ 。

师：嗯，很不错！大家有没有发现这里的 $\triangle BOD$ 和 $\triangle EOC$ 的位置关系跟例 1 中 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 的位置关系一样么？由例 1 的话，我们是不是可以得出面积相等？

生：可以的！

师：其实像图 5 除去重合的阴影部分，剩下的图形人们称之为“欧几里得蝴蝶”，是不是很像？

生：是的，很像蝴蝶！

师：那么“欧几里得蝴蝶”有什么样的性质？

生 9：蝴蝶两扇翅膀的面积相等，这个由性质 1 是可以得到的。

师：那是不是无论四边形形状如何，都满足性质？

生 9：不对，要保持两底边平行才可以。

师：好的，也就是说梯形的对角线形成的两翼上的三角形面积是相等的，用蝴蝶来形容这一性质是不是很美呢？

生：数学也很艺术啊！

师：而且两道简单的命题就帮我们解决了复杂的题目，这两个命题不可小觑啊！

生 10：对的，前面两个命题就是解题的基础。

师：这位学生说的很不错，其实现在的很多题目都是由这些基础衍生出来的，所以只要我们了解了题目的“根”，题目是万变不离其宗的！

对于第二问，有同学利用三角形相似的性质解答，但过程繁琐，计算易出错。有学生仍从性质 2 出发，利用 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle BDE} = 1:3$ 求得 $\triangle ADE$ 的面积。两种方法对比可得优劣，学生更惊叹于这些简单性质的妙用。练习二的难度较大，两个性质在解题当中的优越性更加突显。

师：这道题的话，同学们都有什么想法？

生：这里的话也不知道 AD 和 BD 的比，怎么求呢？

师：还有别的条件呢，再看看。

生： $DE \parallel BC$ ，所以有相似，但相似比不知道。

师：相似比和 AD 和 BD 的比有关系的对吧？

生：是的。

师：那 AD 和 BD 的比还跟什么有关系？

生： $S_{\triangle ADE}$ 和 $S_{\triangle BDE}$ 的面积比就是 $AD:BD$ 。

师：要求的 $S_{\triangle BDE}$ 还不知道，但我们发现了相似比和面积比之间的关系，同学们，下一步可以尝试怎么做？

生：可以设 $S_{\triangle BDE}$ 为未知量 x ，列方程。

师：很好，大家抓住了题目的根源，这样去解决问题就不会手足无措了。

学生将面积比与线段比的转化运用地相当精彩，课堂最后教师留了一道拓展题：二等分一个不规则的四边形土地。课堂总结中，学生们多次提到解题的“根”、“几何证明”的重要性、几何学的严密性和系统性，学生们的热情在本是枯燥的数学复习课上被重新点燃。

4 教学反思

课后发放学生问卷，问题设置如下：（1）请用课上学到的方法证明三角形中位线定理；（2）你之前是否了解到课上介绍的数学家欧几里得，现在你了解多少？（3）请你写出这节课的重点及关键词。

欧几里得在《几何原本》第六卷当中利用性质 2 证明了现在的“平行线分线段成比例”

定理，而三角形中位线定理是其中的特例，问题一的目的就是为了让学生更深入地体会到命题的应用价值和几何学的逻辑严密性。在回收的 36 份问卷中，有一半的学生在问题 1 中能够呈现出“欧几里得的面积法”的证明；问题 2 的结果显示，36 名学生中仅有两位学生之前听说过“欧几里得”这个名字，但并不真正了解，很多学生更是因此认识到了欧几里得对几何学的巨大贡献，也有学生表示通过这节课发现“几何并没有那么复杂”了；对于这节课，大部分学生以解题的“根”为重点，很多学生都提到几何证明，有三分之二的学生提到面积和线段之间的转化思想，几乎所有的学生提到欧几里得的两个命题或命题的现代形式。

调查表明，学生对这堂有关几何证明的复习课表现出浓厚的兴趣而且都收获颇丰。课后的访谈中，学生们纷纷表示这堂复习课完全不像以往那样做很多题，课上做的题不多，可是学到的东西并不少，只要了解题目的根源所在，解题都变得很容易。学生这种学以致用想法，也源自于我们对数学史素材的深入挖掘，让数学复习课更绽放不一样的光辉！

5 结论与启示

数学史对数学教育的重要作用早在 19 世纪就被一些西方数学家所认识，数学史在课堂中的运用是 HPM 的重要研究领域^[6]。但 HPM 融入复习课的教学是少有人尝试过的，因为这可能会打破题海战术的传统，挑战教师对复习课的认知。然而，从课堂效果和反馈来看这次复习课的教学效果还是可喜的，不仅减轻学生的负担，鼓励他们从题目中挖掘可用信息，更是将枯燥乏味的复习课转变为有着人文气息有趣的课堂。

如何将数学史融入到初三的复习课，实践之后，我们将问题的答案归为以下几点：

首先，设计将数学史融入到复习课的教学目标，需要的不仅是让学生会做题，而且是以做更少的题目达到会做一类题目为目的，引导学生从题海中的迷茫走向光明中的自信；

其次，了解复习课重点要考察的知识点，需要挖掘题目的根源，这需要教师翻阅相关历史素材，把零散的知识碎片提取出来；

最后，把数学史上这些零散的知识点用历史长线串起来，将历史素材中无意识的知识碎片系统化，有意识地应用到课堂上。鼓励学生利用题目的“根”解题，返璞归真，复杂问题简单化，枯燥的复习课变得更有新意、更人性化。

本节课也体现了数学史融入数学教学的如下价值：

（1）知识之谐：呈现出学生熟知的两个性质的早期形式，“无源之水”变得有根可循，复习课中常见的解题模式转变为有意义的寻根之旅；

（2）探究之乐：通过阅读材料和同学间的讨论，学生重现并解释了欧几里得对勾股定理的证明，这离不开学生之间的质疑和探讨；

（3）方法之美：命题中面积和线段转化的巧妙之处，以及应用巩固环节，比较学生对练习 1 第二问的复杂繁琐和简单易懂的两种解法，更让学生感叹转化方法的奇妙；

(4) 能力之助: 据授课教师所言, 课堂上的练习 2 学生是没有能力解决的, 但这里不需要不断地练习巩固, 学生已然能够自主地解决这道“难题”。难题不再难, 足以见学生已经具备了题目所考察的知识能力;

(5) 文化之魅: 从一个班仅有两位学生听说过“欧几里得”到学生们对伟人的无比崇敬, 从对几何学的抗拒到“并不复杂”, 从复习课的乏味到新颖有趣, 学生在这一节课上不只学会了如何解一类题, 更知晓了数学方法的根源, 了解了几何学的发展, 这是常规复习课达不到的效果。

复习课的目的是将学生某一块的知识串联起来, 使之更加系统化, 单纯的一个数学史题目是达不到这样的效果的, 我们需要将数学史上有关的素材整合起来, 将碎片化的知识系统化, 追溯习题中常见定理的发展, 让其在课堂上返璞归真、有根可循, 课堂也更具文化特色。教师需要利用课堂上学生无意识反馈的信息进行剖析, 将其转变为有意识的教学行为。总而言之, 教学是需要实践和不断完善的, 这节 HPM 走进初三的复习课是一次有意义的尝试。

参考文献

- [1] 沈金兴. 《几何原本》中的命题应用: 从历史到高考[J]. 数学通讯, 2015(16): 63-64.
- [2] 欧几里得. 几何原本[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003.
- [3] 李霞, 汪晓勤. 三角形中位线定理的历史[J]. 中学数学月刊, 2016(9): 58-60.
- [4] 汪晓勤. HPM 的若干研究和展望[J]. 中学数学月刊, 2012, (2): 1-3.
- [5] 麦贤. 浅谈初中平面几何总复习[J]. 高等数学研究, 2005(z1): 70-71.
- [6] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006(2):16-18.

学术活动

一次心灵之约，一场精神盛宴——桐乡 HPM 教学研讨会纪略

李婷 王鑫

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

昔传彩凤栖梧桐，今有新城曰桐乡。在这个枕水而居、青石板巷、溪水潺潺的美丽桐乡，我们共赴了一次心灵之约，享受了一场精神盛宴。

2016 年 12 月 5 日下午，华东师大汪晓勤教授及其 HPM 研究团队一行 14 人前往浙江省桐乡凤鸣高中开展了为期三天的 HPM 教学研讨会。此次研讨会由上海数学教育教学研究基地与浙江省“张金良名师网络工作室”共同举办。参与会议的还有凤鸣高中沈金兴 HPM 实践小组、义乌王芳数学工作室、嘉兴夏晓华数学工作室共 40 余位热爱 HPM 教学的老师、博士与硕士。会议有三个主题：

- （1）数学学科德育价值探讨
- （2）HPM 视角下的课堂教学观摩
- （3）HPM 课例开发的理论框架研讨



图 1 研讨会全体成员合影

1 初探数学德育，领悟立德树人

5 日晚上 7 点 30 分，华东师大与各位老师入住的桐乡酒店会议室开展数学德育价值研讨会。会上，大家集思广益，积极发言，在两个小时的讨论与交流中，大家提到数学作为一门最重要的基础学科之一，它拥有自己独特的育人功能。数学知识本身蕴含的哲学思想与

理性精神，以及数学具有的人文精神都属于数学学科德育范畴。数学学科德育的渗透应是潜移默化的，是自始至终的，需要结合具体的数学知识、数学思想与数学方法，让学生体验到数学独特的美。

6日上午8点40分,HPM教学研讨会暨“浙江省张金良名师网络工作室集中研修活动”开幕式在桐乡凤鸣高级中学行政楼四楼大会议室举行。开幕式由华东师范大学数学系邹佳晨博士主持,凤鸣高级中学陆国良校长致开幕词,华东师范大学汪晓勤教授讲话。紧接着,“上海数学教育教学研究基地-----浙江桐乡凤鸣高级中学”授牌仪式在此隆重举行。



图2 数学学科德育研讨会



图3 HPM教学研讨会开幕式

2 观摩教学实例，体验生动课堂

开幕式结束后，会议地点转向桐乡凤鸣高中科技大楼二楼阶梯教室，观摩 HPM 视角下的三角学教学。

课堂一：三角函数序言课

第一节课由王华老师讲授。整节课以三角函数为线索贯穿始终，从测测高度开始，王老师由测量旗杆、太阳和流星高度的问题引出解斜三角形和正余弦定理。看看生活中的周期现象，带领学生用学过的函数刻画生活中的周期现象，欣赏数学之美。到说说“角度”的前世今生，接着回顾了角的两种定义：静态定义与动态定义，并启发学生思考为何一周角要规定为 360° 而不是 365° 呢？谈谈“弦长”，从数学史的角度介绍了三角学“萌芽—传播—确立”的三个历史发展阶段，最后议议“锐角三角函数”，画画“图象”从函数的角度讨论了锐角三角函数，采用列表、描点、连线作图，画出了 $y = \sin x, x \in (0^\circ, 90^\circ)$ 的图象，并让学生思考如果角度大于 90° 怎么办？横纵坐标单位不一致如何画出统一而美观的图象？由此引出弧度制的学习。最后聊聊未来，通过一首诗将本章所有知识点串联起来，使三角学的整章知识在这短短 40 分钟的课堂上有了一个全景呈现并为数学增添了韵律和趣味。



图 4 王华老师公开课

课堂二：任意角

第二节课由饶彬老师讲授。引入部分，通过一段视频《立竿成影》创设情境，介绍了角与周期现象、数学与自然密不可分的关系。饶老师还借助手电筒发出的光来模拟太阳光，向学生现场演示了日晷计时的原理，随后对角的静态定义和动态定义进行了复习。探究新知部分，通过影子旋转的角度引出有大于 360° 的角，并让学生头脑风暴，思考该如何区分顺时针旋转得到的角与逆时针旋转得到的角，引出正负角的概念，并列举出海底漩涡、台风、人类跑步的方向等实际例子，说明正角和负角定义的合理性，在学生的讨论中整节课的气氛达到了一个高潮。接着饶老师又问道：可以把任意角放在哪里研究比较合适？引出象限角与坐标轴上的角。在练习部分，让学生自己画出几个给定的角度： -50° ， 405° ， 270° ， -30° ， 330° ， -390° ，探究如何在直角坐标系中准确地表示角，以及所有与角 α 终边相同的角的表示方法，使整节课的气氛达到了第二次高潮。最后，饶老师指出角的旋转是一种周期性的运动，为后面三角函数的学习做准备。



图 5 饶彬老师公开课

课堂三：弧度制

第三节课由孙冲老师讲授。在情景引入部分，通过序言课中的一首诗引入本堂课研究的主题：度量统一，由生活中的周期现象引出三角函数解析式 $y = \sin x$ ，再结合“桌子长 1 米，

宽 2 尺，求面积”“半斤八两”以及“方程 $x + \sin x = \frac{1}{2}$ 的解的问题”让学生认识到统一单位的重要性和弧度制引入的必要性。

在讲授新课部分，结合序言课，让学生意识到角度制的定义带有一定的主观性，同时角的大小不随圆半径的变化而变化，量角的制度是一种量圆周长（弧长）的制度。该如何把角度变为实数呢？学生在课堂上对此进行了一番探究。在学生探究的基础上进行完备弧度制的定义，尤其是 1 弧度的定义，进而得到角度制与弧度制之间的对应关系。最后再回到方程 $x + \sin x = \frac{1}{2}$ 的解的问题，通过零点存在性定理和几何画板的演示，让学生认识到此方程的解确实是存在且唯一的，解决本节课所带来的问题，首尾呼应。



图 6 孙冲老师公开课

课堂四：三角函数序言课

第四节课采用同课异构的形式，由何晓蕾老师讲授。在第一部分有“棱”有“角”中，由测量距离的问题入手，提出如何测出旗杆的高度、如何用旗杆测量地球的周长、测量月亮与地球之间的距离等，引出解三角形问题，并给出华罗庚的一句名言：大哉数学之为用——不上高山，能测山高；不下湖泊，能量河宽，让我们深刻感受到数学的作用和价值。超级月亮离我们到底有多近呢？可以将这个问题转化为数学问题：已知三角形中的一条边及该边上的两个角，求三角形的另外三个量。通过向已知边作高，得到两条边与对应角的正弦成比例，何老师让学生猜想正弦定理的标准形式再进行验证，也给出余弦定理的公式，让学生领略了数学公式之美。

在第二部分有“动”天中，通过生活中周而复始的运动变化引出角度的概念，然后自然过渡到三角函数图像的问题上，根据在单位圆中正弦的几何表示，与学生探讨了如何画出三角函数 $y = \sin x$ 在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 上的图象，在探究过程中让学生认识到度量要统一的重要性，由此引出弧度制。



图 7 何晓蕾老师公开课

3 评析有趣课堂，聆听精彩讲座

教学观摩结束后，由浙江省教研员张金良老师和汪晓勤教授对课例进行了点评，并分别作了题为《2017 年浙江省数学高考说明解读》与《HPM 的“前世今生”》的讲座。

张金良老师总结道：数学史能帮助学生了解数学的过去和未来；建议教师们在写教案时不用把三维目标分开写，直接将目标 1、2、3 是什么列出来即可；也没必要倡导让学生在课堂上谈收获；另外教学要规范，教师在黑板上画图时要采用尺规作图。



图 8 研讨与交流

汪教授为我们介绍了 HPM 的“前世今生”，将其分为“滥觞-思辨-形成-实践-实证”的过程。分别介绍了 19 世纪以前数学的教育价值，1901 年 John Perry 提出的数学的教育价值和琼斯的 HPM 观点，接着引用 Heppel 的诗句：如果又一场洪水爆发，请飞到这里来避一下，即使整个世界被淹没，这本书依然会干巴巴。嘲讽之后值得深刻反思，要改变这种状况，让学生不再觉得数学是一门枯燥乏味的学科。还介绍了在 HPM 领域的研究课题中，HPM 与教师专业发展、教学实践与案例开发仍是值得研究的问题，数学史融入数学教学的内容、方式与价值，HPM 与 MKT 等，指出学生学习数学具有极大的历史相似性，历史上古人遇到的困难今天我们同样也会遇到。

4 交流实践经验、领会数学本质

讲座结束大家意犹未尽，晚上 HPM 研讨会继续进行。首先，邹佳晨博士展示了 HPM 课例开发的系统框架，从开发模式、案例要素和成长形式三大分支细化到具体的教学设计三试三议、收集教学视频、开展问卷调查，形成文本实录、及时反思和论文写作。接着由王芳数学工作室成员进行一系列的 HPM 课例汇报。义乌中学金惠萍老师做了题为《数学史融入二项式定理的教学》的报告，从二项式定理教学现状分析、历史根源、课堂呈现与教学体会四个方面呈现了报告的内容。义乌二中吴静波老师做了题为《数学史融入基本不等式的教学》的报告，为大家讲述了基本不等式的设计思路 and 教学反思。义为上溪中学的吴丽华老师做了题为《数学史融入正弦定理的教学》的报告，报告重点讲述了正弦定理的历史溯源和四种证明方法。义乌中学楼萍萍老师做了《数学史融入集合概念的教学》的报告，系统地介绍了集合论并讲述数学史融入集合教学的困难与疑惑。



图 9 HPM 教学框架讨论



图 10 HPM 教学课例展示

第三天上午，会议继续进行。沈金兴 HPM 实践小组的王华、饶彬和孙冲三位老师分别作了题为“基于 HPM 的三角函数序言课”、“HPM 视角下的高中数学课堂”、“那次邂逅开启了 HPM 之路”的报告，各自讲述了他们在 HPM 教学实践中的收获与成长。永嘉中学夏晓华老师介绍了高中数学复习课教学设计，讲述了复习课模型中新旧知识紧密结合的五条线索。接着分别由永嘉职业中学李雪丽、永嘉上塘中学吕陈栋、永嘉中学李小靖、李招燕、谢作俊，永嘉碧莲中学徐成浩结合课例具体分析了五条线索的课型。

会议临近尾声，华东师大汪晓勤教授对各位老师的 HPM 教学研究给予了充分的肯定，并做了小结，汪教授提出 HPM 研究将会立足当前，着眼未来，更多精彩的课例将会诞生，HPM 将遍地开花。最后，在一片热烈的掌声中，会议圆满结束。

沐浴着杲杲冬日，回味这场精神盛宴，我们期待下一次的心灵之约！

第四届 HPM 研讨会综述

刘帅宏 陈莎莎 王鑫 李婷

(华东师范大学教师教育学院, 上海, 200062)

一年一度的 HPM 研讨会聚焦数学史与数学教育领域的研究热点、研究动态和最新研究成果, 以 HPM 学习共同体的创建为目标, 为广大数学教育研究者、中小学一线数学教师搭建一个学术交流平台, 业已成为 HPM 领域的重要学术活动之一。

作为苏州市有效教学联盟的系列学术活动之一, 第四届 HPM 研讨会于 2016 年 12 月 24-26 日在苏州市平江中学举行, 会议由苏州市教育局、上海华大教育研究所、上海市数学教育教学研究基地共同主办, 苏州市平江中学承办。来自北京、上海、江苏、浙江、山东、河南、广西、福建等地的 150 多位高校教师和中小学教师、教研员出席了会议。

1 大会报告

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授作了题为“HPM 研究新进展”的报告。报告从理论探讨、教育取向的数学史研究、教学实践与案例开发、HPM 与教师专业发展、数学史融入教科书研究五个方面总结了 2016 年华东师大 HPM 研究团队所取得的学术成果。

在理论方面, 团队在国外学者关于数学史教育价值的讨论的基础上, 结合近年来所开发的众多中学 HPM 教学案例, 提炼出数学史在教学中所体现的六类价值: 知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效, 并通过“对数的概念”、“直角坐标系”和“全等三角形的应用”三个 HPM 案例加以分析。在教育取向的数学史研究方面, 团队针对中学数学中的许多概念、公式、定理和思想做了大量的文献工作。例如, 通过对西方 140 余种三角形著作的考察, 勾勒出正弦定理的历史, 挖掘出精彩纷呈的证明方法及其演变过程, 为 HPM 教学提供了丰富的素材。

HPM 教学实践与案例开发是团队近年来最主要的工作。图 1 给出了案例开发的基本流程。报告指出, 数学史融入数学教学的方式可分成附加、复制、顺应和重构四种, 案例开发的基本模式是大中学教师的合作。目前, 团队在小学、初中、高中和大学各个层次都开发了教学案例, 数目多达数十个。

在 HPM 与教师专业发展方面, 团队致力于在 HPM 和 MKT (教学取向的数学知识) 之

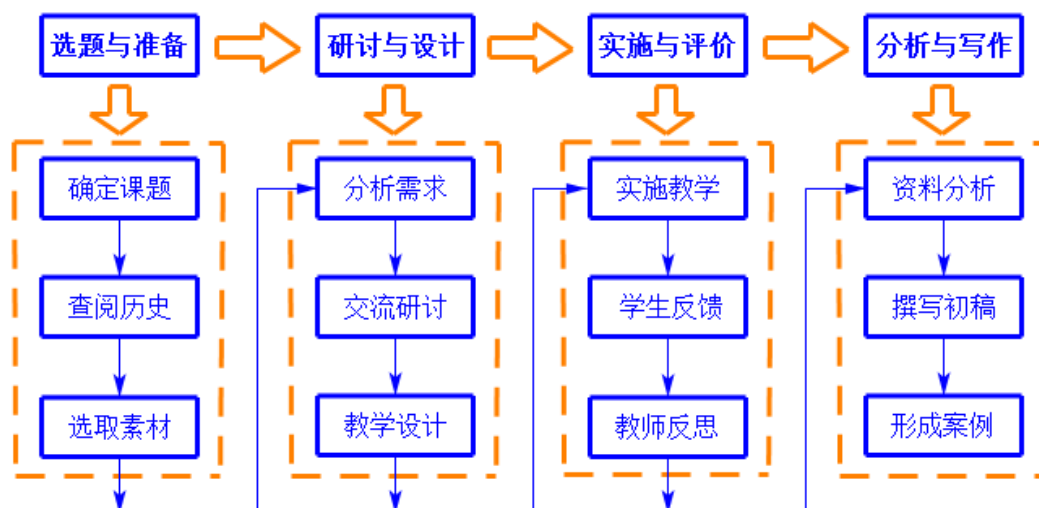


图 1 HPM 案例开发的流程

间建立密切的关联。MKT 由一般内容知识、水平内容知识、专门内容知识、内容与学生知识、内容与教学知识和内容与课程知识六个成份组成。汪晓勤教授以初中数学中的“用字母表示数”和“三角形内角和”为例，分析了 MKT 诸成份与数学史之间的密切联系，从而从知识的视角揭示 HPM 教学实践在促进教师专业发展方面的有效性。

在教材研究方面，报告以“对数的发明”为例，呈现了关于高中数学教科书中数学史阅读材料使用现状的一项研究，提出数学史阅读材料应该体现数学背后的人文精神，更好地发挥数学史的育人价值。

重庆师范大学初等教育学院的蒲淑萍教授作了“小学数学中的数学史”的报告。报告主要从数字、字母符号、思想方法三个方面展示了精彩有趣的数学史内容，并探讨了数学史的教育价值。在数字方面，蒲教授展示了古希腊的记数系统、古埃及的数码与记数法、中国甲骨文数字、中国筹算数码、玛雅象形文字等；在字母符号方面，蒲教授生动地讲述了“等号站起来”的故事。在思想方法方面，蒲教授分析了中国古代的出入相补原理在平面图形面积计算上的应用，并对历史顺序与逻辑顺序进行了比较。

华东师范大学数学系博士生洪燕君老师做了题为“初中数学教师 HPM 教学的个案研究”的报告。报告以字母表示数为例，展现了一位初中数学教师的 HPM 教学设计与实施过程，刻画了他在 MKT 上的变化。

上海教育出版社、新青年数学教师工作室的刘祖希老师作了题为“HPM 与 MM 教育方式的耦合初探”的报告。报告分析了 HPM 和 MM（数学方法论）这两个富有特色的领域在基本立场、基本内容、教学设计、教师专业发展和研究方法等方面的一致性。

江苏省启东市中小学教师研修中心的蔡宏圣老师作了题为“携手 HPM，开创小学数学

教育新天地”的报告。蔡老师回溯了自己从事 HPM 教学实践的经历，阐述了数学史与小学数学教学之间的关系，认为数学知识产生发展的过程是教学的内在依托：情境激发认知冲突——再现经典时刻——交流碰撞形成共识——生成深度理解养成数学素养。蔡老师还总结了读史的方法和层次。

苏州市平江中王恒昌老师作了“HPM 视角下的平江中学数学课堂教学范式”的报告。报告回溯了平江中学的课改历程，总结了平江中学数学课堂教学范式，并对 HPM 视角下该范式的进一步完善作了深入思考。

安徽师范大学陈克胜老师作了题为“函数概念教学的文化考量”的报告。报告从函数概念的教学现状出发，阐述了该概念的文化内涵，呈现了基于文化的函数概念教学设计。陈老师指出：数学文化为数学教学指明了方向，为教师教学艺术的展现提供了思想材料，为学生理解数学开拓了视野，因此，数学教学中有必要增加数学文化内容。

华东师范大学博士生齐春燕老师作了题为“HPM 案例驱动下的高中数学教师专业发展——以三角学为例”的报告。报告展示了一项旨在了解高中数学教师三角学 SCK 的研究：通过对 34 位高中数学教师的问卷调查，得出教师关于三角学的 SCK 的水平分布情况；通过 HPM 视角下的三角学序言课、任意角、弧度制的教学，教师有关三角学的 SCK 得到了提升。

苏州市吴江盛泽中学的孙四周老师作了题为“还原祖冲之——我是如何在中学讲割圆术的”的报告。孙老师将“祖冲之求出圆周率 7 位小数”当作一种现象，而不再将其当作知识、政治、趣味故事、解题方法来对待。他对祖冲之求圆周率的方法作了推测，并展示了自己的教学设计以及学生关于 π 表达式的研究结果。

华东师范大学博士生栗小妮老师作了题为“20 世纪中叶以前美国早期教科书中的无理数概念”的报告。报告对 1820~1919 年间出版的 74 种美国代数教科书中的无理数定义进行了深入考察，得出定义的类型以及演变过程，据此提出若干教学建议。

华东师范大学博士生牟金保老师作了题为“萨顿的教育思想及其对 HPM 研究的启示”的报告。该报告总结了科学史之父乔治·萨顿的思想——统一性思想、科学的人性化、东方思想的价值、宽容和仁爱的态度，并论述了这些思想对 HPM 研究的启示。

华东师范大学博士生岳增成老师作了题为“小学 HPM 教学案例的开发与应用”的报告。报告以“圆的初步认识”为例，详细考察了 HPM 教学实践对小学教师专业发展的促进作用，并探讨了 HPM 教学案例的可复制性问题。

华东师范大学博士生邹佳晨老师作了题为“HPM-2016 综述”的报告。报告对 2016 年国际数学教育大会之 HPM 卫星会议（HPM-2016）作了介绍。

华东师范大学博士生彭刚老师作了题为“HPM 领域中的设计研究”的报告。报告总结了设计研究的背景和方法，并对若干以设计研究为研究方法的 HPM 博士学位论文进行了评析。

2 工作坊

本届研讨会的特色之一是同步进行的小学、初中和高中三个学段的 HPM 工作坊。

小学 HPM 工作坊 I 由蔡宏圣老师主持。关于 HPM，蔡老师总结出“走自己的路，让别人发现这也是一条路”的观点。江苏省启东实验小学的陈金飞展示了课例“认识平均数”；陈黎春老师展示了课例“认识厘米”；张范辉老师展示了课例“小数的意义”，刘爱东老师展示了课例“24 时计时法”。

小学 HPM 工作坊 II 由岳增成老师主持。来自上海的张婧老师和马思聪老师展示了各自的四年级课例“圆的认识”；刘轩如老师展示了二年级课例“角的初步认识”；冯晶老师展示了四年级课例“角的认识”。

初中 HPM 工作坊 I 由上海市武宁中学张德荣校长主持。来自上海师范大学附属罗店中学的沈志兴老师展示了课例“一元二次方程的配方法”；建平远翔学校的贾彬老师展示了课例“三角形内角和”；延河中学的孙洲老师展示了课例“字母表示数”。

初中 HPM 工作坊 II 由洪燕君老师主持。来自上海市闵行第三中学的陈慧老师展示了课例“一元一次方程的应用”；上海市市西初级中学的王进敬老师展示了课例“可化为一元二次方程的分式方程”；华东师范大学硕士研究生李霞同学对课例“三角形中位线”进行了评析，执教者、复旦大学附属中学国际部的方元沁老师则讲述了自己的教学感悟。



图 2 高中 HPM 工作坊

高中 HPM 工作坊 I 由浙江省桐乡市凤鸣高级中学的沈金兴老师主持。沈老师以“十年磨一剑、缘定 HPM”来总结自己的 HPM 实践经历。他的 HPM 小组的孙冲老师展示了课例“弧度制”；饶彬老师展示了课例“任意角的概念”；王华老师展示了 HPM 视角下的三角学序言课的教学，并总结了自己的教学感悟。

高中 HPM 工作坊 II 由浙江省义乌中学王芳老师主持（图 2）。王老师介绍了她的高中数学工作室七年来先后开发的十个高中 HPM 课例以及课例开发的模式（三试三议）、课例的要素（教学视频、问卷调查、文本实录、教师反思）和成果形式（论文、微课）。浙江省义乌市第四中学陈锋老师展示了课例“棱柱的定义”；义乌市大成中学徐超老师展示了课例“抛物线的概念”。

3 HPM 教学展示

26 日上午的教学展示是以同课异构的形式进行的。其中，小学数学的课题是“用字母表示数”，分别由来自苏州的杨明媚老师和来自上海的刘轩如老师执教。杨老师的整节课以钱包中的钱数的表示为线索贯穿始终，从猜测钱包中有多少元开始，逐步让学生自己说出许多、不确定、不知道等，从而引出字母表示数的主题。让学生产生用符号替代数字的需求，也知道字母可以代表数字的含义，同时还能掌握用字母可以表示特定的数字。稍后杨老师分别用粉色钱包和棕色钱包中的钱数对比展开，从“粉色钱包数比棕色钱包数多 5 元”到“粉色钱包数是棕色钱包数的 5 倍”，学生不仅能用字母表示数，还能用字母表示加法、乘法、除法关系。最后，通过一段微视频，让学生了解字母表示数的历史。



图 3 杨明媚老师授课



图 4 刘轩如老师授课

刘轩如老师以学生与古希腊毕达哥拉斯“对话”为线索贯穿整节课，让学生经历字母表示数的历史。小胖同学穿越到古希腊时期，与毕达哥拉斯共同探讨用一个字母概括出数字的结果。首先，学生跟随毕达哥拉斯从自然数出发，一起探索用字母表示自然数的意义，引出

用 n 表示自然数；接着，让学生寻找石子个数的规律，引出用 $2n$ 表示偶数。最后，探究正方形数的表示方法，引出 n^2 。最后让学生探究 $2n$ 和 n^2 的差异。

初中的课题是“反比例函数”，分别由平江中学的洪宇老师和上海市西初级中学的王进敬老师执教。洪老师的课堂从复习旧知、展示“核心概念图谱”开始。引导学生将行程问题中的路程、速度和时间三个量自由设置成变量或常量，构造出不同的函数关系，从而引出反比例函数概念。接着，让学生列举生活中的反比例关系。然后，让学生辨析反比例函数、用待定系数法确定反比例函数关系式。王进敬老师则由《太上感应篇》记载的一则“入重出轻”的故事来引入新课，并展示一杆秤和物理上所用的天平模型。利用天平模型做实验并记录有关数据，引导学生从中发现正比例和反比例关系，由此引出反比例函数的概念。通过一系列问题，引导学生对概念进行辨析。最后通过法院的天平图标的涵义，渗透数学学科德育。



图 6 洪宇老师公开课



图 7 王进敬老师公开课

高中的课题有两个，分别是“任意角的概念”和“数系的扩充与复数的引入”。其中，“任意角的概念”由苏州市田家炳实验高级中学的陆似华老师和桐乡市凤鸣中学的饶斌老师执教。陆老师首先让学生回顾初中学习过的角的定义，并把角分成锐角、直角、钝角、平角与周角。接着借助体操运动员旋转运动的例子，凸显扩大角的范围的必要性，并给出旋转角的定义。接着，直接给出正、负角的概念，并将角分为正角、负角和零角；然后，给出象限角和轴线角的概念，最后探讨终边相同的角的关系。饶彬老师则用古诗词所表达的自然界周期规律来创设情境，并以一次函数刻画汽车的匀速运动、二次函数研究喷泉轨迹，藉以揭示生活中各种现象与数学的密切联系。接着，借助手电筒发出的光来模拟太阳光，向学生现场演示日晷计时的原理，给出旋转角的定义。然后，通过影子旋转的角度引出有大于 360° 的角，并让学生思考：如何区分顺时针旋转得到的角与逆时针旋转得到的角；通过列举海底漩涡、台风、人类跑步的方向等实际例子，说明正角和负角的规定合理性。饶老师又通过问题“可以把任意角放在哪里研究比较合适”，引出象限角与坐标轴上的角。最后，引出“终边相同的角”的概念。



图 8 陆似华老师上课



图 9 饶斌老师上课

“数系的扩充与复数的引入”由苏州市第三中学的顾芳芳老师和义乌第六中学的万松强执教。顾老师由 10 的拆分问题引入：把 10 拆成两部分，使两者乘积为 16，则两数为多少？使两者乘积为 -24？使两者乘积为 $\frac{75}{4}$ ？使两者乘积为 23？接着，引入卡丹问题： $x + y = 10$ ， $xy = 40$ ，由此引发学生的认知冲突，并探讨 $\sqrt{-15}$ 的意义。然后，通过从整数到分数、从正数到负数、从有理数到无理数的扩充过程，引导学生进一步对实数集进行扩充。由 $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ （其中 a 为正数），引导学生发现，定义 $\sqrt{-1}$ 是使所有负数能够开平方的关键，由此引入虚数的定义，并通过虚数 i 与任意实数进行四则运算，得到复数的统一形式，最后，对复数进行分类。万松强老师则由莱布尼茨的问题来引入：已知 $x^2 + y^2 = 2$ ， $xy = 2$ ，（1）求 $x + y$ ；（2）求出 x ， y 的值。学生发现， $x + y$ 是存在的，但 x 和 y 都不是实数！万老师用几何画板进一步演示， (x, y) 这个点不存在，但其横纵坐标之和却等于一个实数，从而凸显了数与形之间的矛盾。接着，以社会生活的需要和数学内部发展的需要两条主线介绍数系扩充的历史，引导学生发现虚数的定义。通过 2、3、 i 三个数进行四则运算而构造新数的探究环节，归纳总结得到复数的代数形式。最后，通过微视频，揭示了“虚数不虚”的道理。



图 10 顾芳芳老师授课



图 11 万松强老师授课

4 研究生与青年学者论坛

25日晚上,热爱HPM的研究生、青年学者再次汇聚于平江中学行政楼报告厅。来自华东师范大学、首都师范大学和广西师范学院共六名硕士研究生做了学术报告。来自华东师范大学的杨懿荔同学作了题为“数学史融入高中解析几何教学的行动研究”的报告,为大家讲述了她自己开发的“直线的倾斜角与斜率”、“直线的方程”、“点到直线的距离公式”和“曲线与方程”四个HPM教学案例。来自首都师范大学的李卓忱同学作了题为“例谈HPM研究:圆锥曲线的前世今生”的报告。来自首都师范大学的李晴晴与王丹同学作了题为“对游戏中数学文化的研究与推广——以卡片猜数字为例”的报告。来自广西师范学院的康美飞同学作了题为“高中数学教学中数学文化与数学史”的报告。首都师范大学的方丽华同学作了题为“教科书中数学史素材进入教学的可能途径——以一元二次方程概念教学为例”的报告。最后,华东师范大学的沈中宇同学作了题为“数学史融入高中立体几何教学的行动研究——以直线和平面为例”的报告,为大家介绍了平面概念与公理的发展历史,呈现了HPM视角下平面概念教学设计的思路以及行动研究的具体步骤。



图 12 与会人员合影

本届研讨会的特点可以用八个字来概括:聚焦、高效、纯粹、优质。会议展示了HPM理论和实践研究的新成果,令所有与会者都感到受益匪浅。会议必将对HPM的传播和发展起到重要的推动作用。期待在第五届HPM研讨会上的再次相聚!