HPM 视角下的函数概念教学*

黄深洵　（上海市青浦区第一中学　201700）
刘思璐　（华东师范大学教师教育学院　200062）
沈中宇　（华东师范大学数学学院　200241）

1　引言

《普通高中数学课程标准（2017 年版）》指出："函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中发挥重要作用.函数是贯穿高中数学课程的主线."[1]"函数的概念"是沪教版高一年级第一学期第三章第一节的内容，对于帮助学生建立完整的函数概念、学习后续相关内容起到了至关重要的作用.高中数学中的几乎所有的代数内容都围绕函数和函数思想展开.

高中函数概念的教学要求学生在初中用变量依赖关系描述函数的基础上，用集合语言和对应关系刻画函数.在实际教学过程中，由于函数知识体系的复杂性、变量概念的复杂性和辩证性、函数符号的抽象性等原因[2]，学生学习函数概念时存在一定的困难.教学的关键在于如何让学生从初中"变量说"函数定义自然过渡到"对应说"函数定义，理解函数的意义，而不是以机械记忆的方式学习[3].基于以上观点，许多教师尝试对高中函数概念的教学进行探索[4-7].

已有的研究表明，高中生对函数的理解与历史上数学家的理解具有一定的相似性[8].函数概念的演进历史为高中函数概念教学实现从"变量说"到"对应说"的自然过渡提供了重要参考.同时，HPM 视角下的教学实践表明，数学史有着多方面的教育价值，可以构建"知识之谐"、彰显"方法之美"、营造"探究之乐"、实现"能力之助"、展示"文化之魅"、达成"德育之效"[9].但由于受沪教版教科书的影响，已有函数概念 HPM 教学案例未能真正实现从对应说到变量说的过渡[10].有鉴于此，我们在已有相关案例的基础上，从 HPM 的视角重新设计函数概念的教学，具体的学习目标如下：

（1）理解函数的概念及函数的三要素，会根据具体情况确定函数的定义域以及判断两个函数是不是同一函数；

（2）经历函数概念的探究过程，形成动态的数学观，提升数学抽象的能力；

（3）体验函数概念的演进过程，感受数学的理性精神，提升数学学习的兴趣和信心.

2　历史材料及其运用

函数的概念经历了漫长的历史演进过程，可以将函数概念的历史分为四个阶段，分别是"解析式说"阶段、"变量依赖说"阶段、"变量对应说"阶段以及"集合对应说"阶段.

2.1　"解析式说"阶段

从 18 世纪起，数学家们已经对函数概念进行了持续不断的研究.古代分析学家将任一量 x 的不同次幂称为 x 的函数.接着，其涵义被拓展为含 x 的代数式.

1748 年欧拉（L. Euler，1707－1783）的经典著作《无穷分析引论》问世，在此书中，欧拉首次用"解析式"来定义函数.他将函数定义为："一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式."欧拉明确突破了代数式的局限，区分了代数函数和超越函数.[11]

2.2　"变量依赖说"阶段

18 世纪中期，数学家们一直在争论振动弦问题："一根两端固定的弹性弦被变形成某种初始形状，然后被释放出来振动.问题是描述确定某时刻弦形状的函数."这场辩论对函数概念的演变产生了重要的影响，出于刻画弦形状的函数的需要，数学家围绕"如果两个表达式在某个区间一致，那是否处处一致?"这一问题展开了争论.如果函数被定义为解析式，那么答案是肯定的，曲线的一小部分已经决定了其表达式，从而决定曲线整体的位置，而欧拉发现某些分段函数不符合这一规律，同时徒手画的曲线也不满足这一规律[12].

因此，数学家们开始意识到用"解析式"定义函数已经不够完善了，于是到了 1755 年，欧拉在《微分基础》中更新了自己对函数的定义："如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些变量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数."[11]函数的"变量依赖说"定义由此诞生.

2.3　"变量对应说"阶段

到了 19 世纪时期，德国数学家狄利克雷（G. L. Dirichlet，1805－1859）于 1837 年发表题为"用正弦和余弦级数表示完全任意的函数"的文章，定义函数为："设 a，b 是两个确定的值，x 是可取 a，b 之间一切值的变量.如果对于每一个 x，有惟一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时，y 也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一个连续函数.在整个区间上，y 无需按照同一种规律依赖于 x，也无需单单考虑能用数学运算来表示的

*本文是 HPM 工作室系列课例之一.

关系."[11]

从欧拉以来,数学家对函数的"任意性"有了更深刻的认识,但是实际上,他们都将函数认为是解析式或曲线,而狄利克雷首次将函数看成任意的变量对应关系,并且他举出了"性状极怪"的函数实例,即狄利克雷函数.其意义就在于:它突破了以往人们对于函数的印象,是第一个既不是由一个解析式表示,也不是徒手绘制的曲线;它说明了函数作为任意配对的概念[12].

2.4 "集合对应说"阶段

集合论诞生后,函数定义得到了进一步抽象,1939年,布尔巴基学派在《集合论》中给出了函数新定义:"设E和F是两个集合,它们可以不同,也可以相同.E中的一个变元x和F中的变元y之间的一个关系称为一个函数关系,如果对每一个$x \in E$,都存在唯一的$y \in F$,它满足与x的给定关系.我们将联系每一个元素$x \in E$和$y \in F$的运算称为函数,y称为x处的函数值.函数是由给定的关系决定的,两个等价的函数关系确定了同一函数."[12]

19世纪,英国传教士伟烈亚力(A. Wylie, 1815—1887)和中国数学家李善兰(1811—1882)在翻译时采用了"解析式"定义,将"变量"译为"变数","包含变数的表达式"就译为了"函数",其中"函"、"含"同义,这便是中文"函数"的由来[11].

基于以上历史,本节课主要采用了重构式,选取历史上函数概念演进的关键阶段,在课堂上重构函数概念的发生发展过程,从而让学生自然地完成函数概念的深入理解.

3 教学设计与实施

3.1 创设情境,引入主题

教师播放一段吉他曲,并展示了三位数学家的图片(图1).从左往右分别是著名的数学家欧拉、狄利克雷、李善兰,这些数学家都对函数概念的发展与传播做出了特别的贡献,本节课将沿着三位数学家的脚步,再次探究函数的概念.

图1 三位数学家

3.2 基于历史,探究新知

首先,教师让学生回忆已有关于函数的知识,肯定学生对于函数是解析式的意象,提出数学家欧拉就是如此定义函数的,接着教师提出问题引发学生思考:

师:刚刚我们听了一段优美的吉他曲,那么,琴弦振动的图象可以用函数来刻画吗?随手画的曲线呢?

教师展示了琴弦振动的图象和随手画的一段曲线(图2),请学生写出解析式,学生发现无法写出解析式.教师与学生讨论"解析式说"的局限.

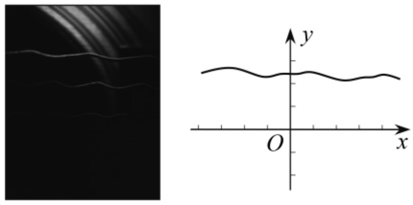


图2 弦振动的图象和随手画的一段曲线

师:通过刚刚的例子,我们发现"解析式说"对函数的认识并不全面,于是函数的概念要进行改进.这时候就像我们同学说的一样,数学家们进一步认为函数是两个变量之间的关系,这就得到了我们初中里面函数的定义,请你和同桌讲讲初中时函数的定义.

生:在某个变化过程中有两个变量,设为x和y,如果在变量x的允许的取值范围之内,变量y随着x的变化而变化,它们之间存在确定的依赖关系,那么变量y叫做变量x的函数,x叫做自变量.

师:由于"解析式说"不太完善,欧拉改进了函数的定义,他在1755年重新定义了函数,与刚刚提到的初中定义的函数类似,我们把这个定义称为"变量依赖说".

接着,教师举出三个函数例子,让学生用"变量依赖说"进行解释:

(1) 校运会男子100 m纪录统计表;

(2) 常值函数$y=0(x \in \mathbf{R})$;

(3) 历史上有位数学家叫狄利克雷,有一天他提出一个函数,这个函数的特点是:当x为有理数时,y对应的值为1,当x是无理数时,y对应的值为0.

学生发现用"变量依赖说"并不能够很好解释这三个例子.

师:所以我们用"变量依赖关系"来定义函数是不是也有问题呢?我们看狄利克雷所提出的函数,这个函数里面确实是一个变量变了,另一个变量也跟着变,但是两个变量之间还有依赖关系吗?

生:没有依赖关系.

师:由这三个例子,我们发现用"变量的依赖关系"来刻画函数,好像也不太合理.我们需要对函数的概念再修正一下,怎么改呢?刚才我们说两个变量是"依赖"关系,但是我们举出好几个例子发现变量之间依赖吗?

生:不依赖.

师:也就是我们需要把"依赖"这个词换一下就可以了.你觉得可以换什么词呢?

生:我觉得可以把"依赖"改成"对应".

师:为什么?

生:因为具体的函数关系中,每一个x的值,都有一个y的值和它相对应.

师：确实“对应”就是一个很好的描述，两个变量在变化过程中，它们之间的关系有时候可以描述，有时候不能描述，但是只要有一个 x 的值，就会有一个 y 的值和它对应.所以，如何对之前的定义进行修正？

生：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数.如果当 $x=a$ 时，$y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值.

师：很好.教材中把函数的定义讲得更加简洁，把所有 x 的值构成一个集合用集合 D 来表示，则有：如果在某个变化的过程中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某个实数集合 D 内的每一个确定的值，按照某种对应法则 f，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，记做 $y=f(x)$，$x\in D$.历史上狄利克雷对函数的概念进行了修正，与刚刚同学讲的类似，称为函数的“变量对应说”.

3.3　回顾历史，深化理解

师：刚刚经历了函数概念从“解析式说”到“变量依赖说”再到“变量对应说”，接下来我们通过一段微视频（图 3）把刚才的过程复习一下.

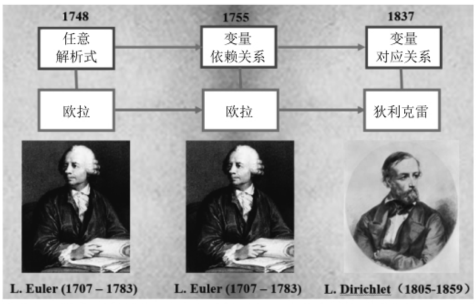


图 3　函数概念发展的微视频片段

师：刚才我们看到了函数概念演变的过程，但是函数概念并没有到此停止，接下来我们争取也要做点贡献.我们之前学习了集合，能不能用集合的语言再把狄利克雷函数表示得简洁一点呢？x 是有理数，说明 x 的取值范围是什么集合？

生：有理数集 $\mathbf{Q}$.

师：那么无理数呢？如果不能用指定的字母表示，能不能用集合的运算表示呢？

生：用 $\mathbf{Q}$ 的补集表示.

师：集合语言可以使得表示更简单，看看我们能不能用文氏图表示.我们用方框表示实数集，用一条线把实数集分为有理数和无理数，按照对应法则，对于每一个 x 的值，y 都有唯一确定的值与其对应，若 x 取任意有理数和任意无理数，它对应的 y 分别是多少？

生：0 和 1.

师：既然 x 的取值范围可以看成集合，是否 y 取到的值也能看成集合？这个集合里面有多少个数？

生：两个数，0 和 1.

师：那我们也可以用文氏图表示 y 值构成的集合.当我们用文氏图表示 x 和 y 构成的集合的时候，函数可以看成什么之间的对应关系呢？还仅仅是两个变量之间的对应关系吗？同桌之间可以先交流一下.

生：可以看成两个集合之间的对应关系.

师：很好，两个集合之间的对应关系，对应这个词仍旧保留，是哪两个集合呢？

生：自变量的取值范围构成的集合和函数值的取值范围构成的集合.

教师引导学生一起总结函数的集合对应关系定义，教师指出该定义是布尔巴基学派提出的，告诉学生如今函数定义的渊源.之后，教师引导学生对之前列举的例子再次进行了检验，并感悟函数的三要素：定义域、对应法则、值域.

3.4　练习例题，巩固新知

教师通过以下练习，对之前学习的知识进行了巩固.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$；(2) $y=\dfrac{2}{\sqrt{3x-2x^2-1}}$；

(3) $y=\dfrac{3x}{2x-\sqrt{3-4x}}$；(4) $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$.

例 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ \pi, & x=0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(2)$，$f(f(-1))$ 的值.

例 3　下列函数是同一函数吗？

(1) $y=x+1$ 与 $y=\sqrt{(x-1)^2}$；(2) $y=1$ 与 $y=x^0$；(3) $y=\dfrac{x^2-x}{x}$ 与 $y=x-1$；(4) $f(x)=x^2$，$x\in[-1,1]$ 与 $g(x)=|x|$，$x\in[-1,1]$.

3.5　总结内容，交流感悟

教师引导学生回忆本节课的具体内容，并从中梳理知识层面及精神层面的收获.

首先，在知识层面上，回忆函数概念演变的重要内容.函数概念从“解析式说”到“变量依赖关系”到“变量对应关系”，再到“集合对应关系”.复习如何通过三要素来判断两个函数是不是同一函数.其次，在精神层面上，教师启发学生看到函数概念的演变过程，明白任何一个数学概念并不是一开始就有标准定义的，而是经过不断演变和修正得到的.学生也提出要将这节课看到的这种不懈努力的精神融合到自己的学习当中.最后教师鼓励学生“函数的概念可能还会继续演进下去，说不定下一位作出贡献的数学家就在我们的同学之中”.

4　学生反馈

为了解本节课教学效果，对全班 38 名学生进行了前测和后测，并在课后进行了访谈.

在课前测试中,对于问题:“是否存在一个函数,将每一个正数对应到 1,将每一个负数对应到 -1,将 0 对应到 0?”有 42.1% 的学生认为不存在,而在课后测试中,对于类似的问题:“是否存在一个函数,将每一个质数对应到 1,将每一个合数对应到 -1,将 0 对应到 0?”仅有 7.9% 的学生认为不存在.

在课前测试中,对于坐标轴上的任意曲线(图 4(1)),有 21.1% 的学生认为不是函数,而在课后测试中,对于类似的问题(图 4(2)),仅有 15.6% 的学生认为不是函数.

在课后测试中,对于这节课中印象最深的内容,学生的回答可以分为函数的演变、函数的定义两种类型,典型回答有:

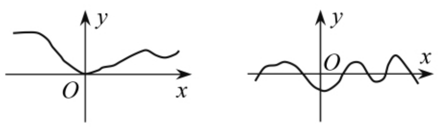
· 函数概念的演变过程,知识是不断进化的;

· 函数的演变过程,结合视频增加了趣味性;

· 历史上的数学家及其对函数概念的不断研究;

· 数学家探索函数的精神,启示自己开始时做错也很正常,后面的反思和修改更重要,试错与反思才会越来越好;

· 函数关系用集合表示和函数三要素,这个内容很新鲜.



(1)　　(2)

图 4　任意曲线题目

从课后对学生访谈的结果来看,学生能区别出初中函数定义与高中函数定义,并且能体会到集合知识在函数定义中的应用;对于狄利克雷函数,学生印象深刻,并能将其复述;对于课堂引入微视频介绍数学史的环节,学生感觉新颖,表示能让自己更集中地了解函数概念的演进历史,并从中感受数学家对真理坚持不懈、孜孜以求的精神等.

5　结语

本节课主要采用重构式再辅以顺应式、附加式的方式将数学史素材融入函数概念的教学中.通过重构函数概念发展的历史,让学生经历从解析式定义到集合对应关系定义的函数概念演变过程.通过顺应式改编历史上弦振动问题、狄利克雷函数,引发学生认知冲突,让学生由函数的解析式定义顺利过渡到对应关系定义.通过附加式的方式将历史上函数的定义与学生所讲的定义相联系,同时,播放函数概念发展的微视频,让学生有一条清晰的函数概念发展史的脉络.

从数学史的多元价值上来看,通过重现函数概念的历史发展过程帮助学生自然地实现函数概念从初中到高中的过渡,构建了“知识之谐”.在函数定义的完善过程中,利用数学史引发学生的热烈讨论与主动探索,营造了“探究之乐”.在完善函数概念的过程中,让学生经历数学概念不断抽象化的过程,培养学生的数学抽象素养,实现了“能力之助”.在展示函数概念的同时,介绍各国数学家探索函数概念的背景与过程,揭示知识源流,强调多元文化,展示了“文化之魅”.让学生体会数学家们探索真理的客观过程,培养学生的理性精神和动态数学观,达成了“德育之效”.

课后通过同行评议和教学实录,发现本节课仍有一些不足之处,比如教师课堂的引导语设计部分不够精准,课堂中的学生活动形式不够丰富,学生在探究活动过程中参与不足等,建议在以后的教学中加入多样化的学生活动设计,给学生提供更多探究和表达的机会,将会使本节课的教学效果更加显著.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] 张文亮.高中函数学习难点及教学教法[J].中学数学教学参考,2015(30):47,70.

[3] 邓勤.新课程背景下初高中数学教学的有效衔接——从函数概念的教学谈起[J].数学通报,2011,50(2):33-35.

[4] 陶维林.函数的概念教学设计[J].中小学数学(高中版),2009(Z2):51-55.

[5] 李雪梅,赵思林,李雪梅.基于 APOS 理论的函数概念“八步”教学设计[J].中学数学杂志,2017(11):10-15.

[6] 肖三杏.教学函数概念　注重数学抽象——关于“函数的概念”微课教学设计[J].中小学数学(高中版),2016(11):11-13.

[7] 章建跃,陶维林.注重学生思维参与和感悟的函数概念教学[J].数学通报,2009,48(6):19-24,30.

[8] 任明俊,汪晓勤.中学生对函数概念的理解——历史相似性初探[J].数学教育学报,2007(4):84-87.

[9] Wang X, Qi C, Wang K. A categorization model for educational values of the history of mathematics[J]. Science & Education, 2017, 26(7-9): 1029-1052.

[10] 钟萍,汪晓勤.函数概念:基于历史相似性自然过渡[J].教育研究与评论(中学教育教学),2016(2):62-68.

[11] 汪晓勤.19 世纪中叶以前的函数解析式定义[J].数学通报,2015,54(5):1-7,12.

[12] Kleiner I.Evolution of the function concept:A brief survey[J].College Mathematics Journal, 1989, 20 (4): 282-300.