



【课堂研究·特设专栏: HPM 课例研究(之九)】

# HPM 视角下“素数与合数”的教学

贾彬<sup>1</sup>, 孙丹丹<sup>2</sup>

(1. 上海市建平远翔学校, 上海 200129; 2. 华东师范大学 数学科学学院, 上海 200241)

**【摘要】**“素数与合数”是分解素因数的基础,也是后续学习最大公因数与最小公倍数的基础。在日常学习中,学生一般能够依据定义对素数与合数做出判定,但对于为什么要研究素数以及研究素数有何意义,他们并不清楚。为此,文章从 HPM 视角进行“素数与合数”的教学设计,旨在丰富学生“素数与合数”的概念意象,让学生知道知识的来源和发展,加深对素数意义的理解,提升数学素养。

**【关键词】**HPM; 素数与合数; 教学设计

## 一、引言

数是人类从具体的事物中抽象出共同的性质后逐渐形成的,正如英国哲学家兼数学家伯特兰·罗素(B. Russell)所说“当人们发现一对雏鸡和两天之间有某种共同的东西(数字2)时,数学就诞生了。”<sup>[1]</sup>从历史相似性的角度来看,学生形成各种数的概念需要一定的时间从生活的各个方面去体验、认识数的内涵,包括素数与合数。

“素数与合数”是沪教版数学六年级上册第一章“数的整除”中第二节的教学内容,在此之前,学生已经学习过因数和倍数的内容,知道如何求正整数的因数。教材通过引导学生寻找并比较1—14正整数的因数个数,给出素数与合数的定义,并指出1既不是素数也不是合数,进而将正整数分为1、素数与合数三类,最后引导学生基于定义判断各正整数是素数还是合数,并指出查素数表也是判断100以内的正整数是否为素数的方法之一。

“素数与合数”是分解素因数的基础,也是后续学习最大公因数与最小公倍数的基础。在日常学习中,学生一般能够依据定义对素数与合数

做出判定,但素数与合数留给他们的印象往往只是干巴巴的定义与判定,对于为什么要研究素数以及研究素数有何意义,他们并不清楚。根据素数的定义,学生虽然可以对1和2是否是素数进行判定,但这与学生的直观认识不甚相符,需要教师做适当说明。教材正文和章尾的阅读材料均介绍了素数表,素数表除了是一堆数字的集合,其背后有何文化内涵,学生并不了解。此外,学生在学习本节内容之前已经学习了“因数和倍数”,并且能够从“形”的角度理解这些知识。那么,学生除了可以从“数”的角度理解素数,是否也可以从“形”的角度理解素数呢?

基于以上问题,本文从 HPM 视角进行“素数与合数”的教学设计,旨在丰富学生“素数与合数”的概念意象,让学生知道知识的来源和发展,加深对素数意义的理解,提升数学素养。具体教学目标有三个。

(1) 通过数学史,从“数”和“形”两个角度理解素数、合数的意义,感受数形结合的数学思想;

(2) 知道正整数的分类,会判断除1以外的

**【作者简介】**贾彬,中学高级教师,主要从事初中数学课堂教学研究;孙丹丹,华东师范大学数学科学学院博士生,主要从事数学史与数学教育研究。



正整数是素数还是合数;

(3) 会用埃拉托色尼筛法寻找 100 以内正整数中的素数。

## 二、历史素材及解读

在古希腊,基于菲洛劳斯(Philolaus)的著作,斯珀西波斯(Speusippus)在摘录中区分了素数和合数。其中,素数被称为不能合成的数,合数则被称为能合成的数<sup>[2]72-74</sup>。尼可马科斯(Nicomachus)、塞翁(Theon)也提到素数为不能合成的数。欧几里得(Euclid)将素数定义为“仅能被一个单位量尽的数”,将合数定义为“可以被某数量尽的数”<sup>[2]72-74</sup>。塞翁对素数的定义与欧几里得相似,认为素数是一个“不能被其他数,只能被单位量尽的数”<sup>[3]284-285</sup>。尼可马科斯称素数为“基本的”,杨布里科斯(Iamblichus)进一步对此进行诠释,素数作为基础,其他数可以是它的倍数,它却只能是单位的集合<sup>[3]284-285</sup>。西马里达斯(Thymaridas)称素数为“直线的”,原因是它只能陈列成一个维度<sup>[2]72-74</sup>,塞翁也以“线性的”作为素数替代性术语。

中国数学家李善兰与英国汉学家伟烈亚力(A. Wylie)合译了《几何原本》后9卷(7—15卷),在第7卷中将“11”定义为“数根者唯一能度而他数不能度也”,数根就是素数的原始译名<sup>[4]</sup>。1872年李善兰撰《考数根法》,考数根法的目的是辨别一个自然数是不是素数。中国数学家邹伯奇著《乘除捷法》,将素数称为纯数,合数称为杂数<sup>[5]136</sup>。

历史上的中外数学家分别赋予了素数不同的名称和描述,但对素数的普遍描述都是“素数是只能被单位量尽,而不能被其他数量尽的数”。也有数学家认为素数是不能合成的数,即素数不能被除单位外的其他数合成,这里的单位是指1,单位1在那时常不被视为是一个数,纯数的得名也可从这个角度进行理解。“量尽”“合成”其实是除法的朴素表达,因而那些描述与现在素数定义中的因子是契合的,只是当时没有考虑用数字本身量尽自己,但这似乎没有多大的意义。尼可马科斯和杨布里科斯认为,“素数只能被单位1

量尽,不能被其他数量尽,有了素数以后,其他数就可以被素数量尽”。这一说法讨论了素数及可被素数量尽的数的关系,暗含素数是整数的乘法构造单位,因此素数被称为是基本的数,数根的得名可以从这个角度进行理解。除了从“数”的角度看素数,称素数为“线性的”则是从形的角度看素数,这是毕达哥拉斯形数理论的延续,当用石块或筹码来表示数字、度量数字时,素数是“线性的”便显而易见。

有关第一个素数,历史上也有很多讨论。刚开始人们没有将2看为素数,甚至不将其看为数,但是亚里士多德(Aristotle)将2看是唯一的偶素数。像亚里士多德一样,欧几里得也将2看为素数<sup>[2]72-74</sup>。亚里士多德不把1看为素数,因为他认为1是单位,单位不是数,只是数的开始<sup>[3]284-285</sup>。因为1不被认为是数,所以亚里士多德也说,素数不能被任何数量尽。尼可马科斯认为,3是第一个素数,因为素数是一类特殊的奇数,所以2被排除在素数之外<sup>[3]284-285</sup>。历史上的种种说法,启示我们在教学中应注意区分奇、偶、素、合。

如上所言,因为历史上很长一段时间里,1不被视为数,而是数的起源,所以1不可能是素数,而且素数与合数的分类最早源于是否只被单位1量尽,所讨论的素数与合数自然不会包括单位1,这是1不是素数的原因之一<sup>[6]</sup>。整数的很多特性可以追溯到其素因子的特性,所以我们可以将问题分而解之。从这个方面说,1是不起作用的,就如 $a = a \cdot 1 = a \cdot 1 \cdot 1 = \dots$ 不能为有关问题a的解决提供更多帮助。而任何一个大于1的整数都能唯一地分解成素数的乘积,即算术基本定理,这表明素数对于整数研究的重要意义。早在2500多年前,欧几里得的《几何原本》中关于整数的素因数分解思想就有所体现,但它存在性和惟一性的证明是由19世纪德国数学家高斯(Gauss)完成的。

历史上的数学家为什么会研究素数?古希腊毕达哥拉斯学派主张万物皆数,因而正整数成为该学派的重要研究对象之一,数的分类首先被探讨。在此基础上,后续古希腊数学家对素数进行



了深入研究。中算家认识素数起源于运算，一些乘除捷法需要先进行分解因数，这是导致中算家认识素数的一条途径，另一条途径是化整数为两两互素的算法<sup>[5]136</sup>。

素数的双重性——重要而无规律，自古至今吸引了大量数学爱好者不断关注和挑战，从诸如梅森素数、费马素数等各种有趣的素数到古老的素数测定方法——埃拉托色尼筛法，从寻找可以计算出所有素数的公式到今天尚未解决的有关素数的著名猜想——哥德巴赫猜想和孪生素数猜想，素数的秘密让全世界数学家乐此不疲，跃跃欲试。

### 三、教学设计与实施

学生在课前已通过阅读教材和观看微视频的方式对本节内容进行了预习，知道了素数和合数的概念，并尝试用“点形”表示素数。在此基础上，研究者的教学设计与实施过程如下。

#### (一) 从“数”的角度领悟素数与合数

##### 1. 概念初探

师：根据预习内容，请说一说什么是素数，什么是合数。

生1：一个正整数，如果只有1和它本身两个因数，这个正整数就是素数；如果它还有除了1和它本身之外的因数，这个正整数就是合数。

师：除了从正整数的因数角度理解素数与合数，你们还能从其他角度来理解吗？

生2：如果一个正整数只有两个因数，那么它就是素数；如果有两个以上的因数，那么它就是合数。

师：原来我们也可以通过数因数个数的方法来判断一个正整数是否是素数。

【设计意图】一个正整数是素数还是合数，除了可以从它的因数角度判断，也可以从它的因数个数判断。

##### 2. 以名解意

师：你们还知道素数的其他名称吗？

生1：素数还可以叫做质数。

师：确实，素数也叫做质数。除此之外，素数还有其他名称吗？

(学生互相看看，都摇起了头。教师呈现两

段文字。)

李善兰与伟烈亚力共同翻译了《几何原本》的后9卷(7—15卷)，第7卷定义“11”时说：“数根者唯一能度而他数不能度也。”数根就是素数的原始译名。(严敦杰《中算家的素数论》)

数学家邹伯奇著的《乘除捷法》中提到的纯数即素数，杂数即合数。(刘钝《大哉言数》)

师：从以上两段文字中，你们知道素数还有哪些名称？

生2：素数还曾被称为数根和纯数。

【设计意图】素数不同的名称折射出素数的性质，朴素而深刻。教师通过对素数不同名称的简单介绍，加深了学生对素数内涵的理解，同时也体会了数学概念名称背后的创造性。

#### 3. 规律探寻

师：根据目前我们所学的知识，你能写出正整数的几种分类方法？请分别列出。

(展示学生回答：正整数可以分为合数、素数与1，也可以分为奇数与偶数。教师让学生判断1—20之间正整数的奇性、偶性、素性、合性，以表格形式呈现学生判断结果，如表1所示。)

表1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
奇性	√		√		√		√		√		√		√		√		√		√	
偶性		√		√		√		√		√		√		√		√		√		√
素性	√		√		√		√		√		√		√		√		√		√	
合性				√		√		√		√		√		√		√		√		√

师：观察表1，你们有何发现？

生1：20以内的奇数和偶数的个数一样。

生2：1是奇数，但既不是素数也不是合数。

生3：偶数中，除2以外，都是合数。

生4：素数中，除2以外，都是奇数。

生5：合数除了1和它自身以外，还有其他的因数。

生6：一个正整数，除1以外，不是素数就是合数；一个正整数，不是奇数就是偶数。

【设计意图】在学习新知识的基础上建立与旧知识的联系，让学生感悟可以从不同角度理解



正整数的构成。教师通过一个开放性问题，首先让学生根据素数与合数、奇数与偶数的概念独立判断1—20之间正整数的奇性、偶性、素性、合性，然后在此基础上观察表格，让学生在小组讨论的过程中自己探索、发现正整数的奇偶性与素合性之间的区别与联系。

#### 4. “小题大做”

师：1为何既不是素数也不是合数？

生1：因为1的因数只有1个，即它本身，而素数要有两个因数且只能有两个因数，所以1不是素数。同样的道理，1也不是合数。

师：根据素数与合数的概念判断，确实如此。但是在数学发展早期，素数和合数的概念并非如今天这样清晰，对于1到底是不是素数，最小的素数到底是谁，历史上曾经有过不同的声音。古希腊数学家认为1不是素数，因为他们认为1不是数，是单位，单位组成了数。对于2，亚里士多德将2看作是唯一的偶素数，欧几里得也将2看作素数，但也有数学家不将2看作素数，如古希腊数学家尼可马科斯就认为3是第一个素数。

师：每一个概念和规定在发展中都经历了波折，最终的定义和规定是历史发展的结果，都有其合理性。其实同学们学习的每一个知识都是有故事的，这些故事蕴含着数学文化，希望同学们在学的过程中多积累一些这样的文化。

【设计意图】这段介绍让学生从历史的角度理解“1为何不是素数”“谁是素数”，激起学生对知识背后故事的好奇心。

### (二) 从“形”的角度理解素数与合数

#### 1. 远古萌芽

有人推测人类很早以前就知道素数了。现藏于比利时皇家自然历史博物馆的两块骨头，引起了考古学家的极大兴趣。它们是从非洲刚果(金)爱德华湖畔一个叫伊珊郭的渔村发掘出来的，经现代科学方法鉴定，这两块骨头是公元前9000年到公元前6500年之间非洲人使用的骨具(见图1)。考古学家推测这是古代居民用来雕刻或书写的工具<sup>[7]</sup>。两块骨头中出现了5, 7, 11, 13, 17, 19一组顺序的刻痕。最初，古人就是这

样用“形”来表示这些“素数”的。

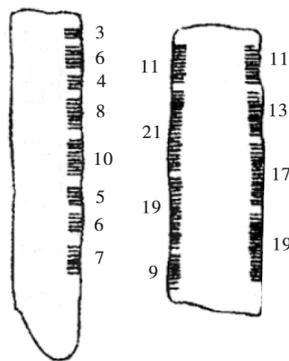


图1

【设计意图】这段素材一方面可以让学生知道素数的萌芽可能非常早，甚至早于数字的出现，另一方面也可以让学生了解最初古人在表示数时是以“形”的方式呈现的。

#### 2. 数形结合

师：素数如果用毕达哥拉斯的“形数”来理解有何特征？合数呢？

生1：素数用“形数”表达就是一条线，只能分成一行；合数可以分成几行几列(见图2)。

生2：用毕达哥拉斯的“形数”来理解，素数是此素数个数的点排成的一条线。

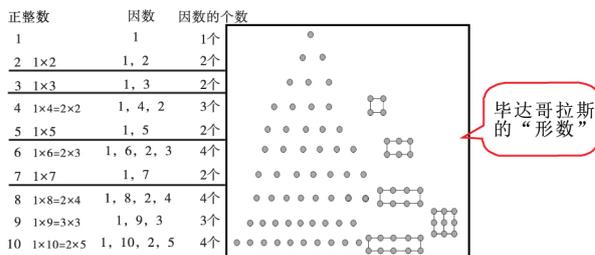


图2 用“形数”表示1—10

师：古希腊数学家西马里达斯称素数为“直线的”，现在同学们知道原因了吧。

【设计意图】从用“刻痕”表示素数到用“点形”表示素数，让学生体会“数”与“形”之间的联系，“形”可以配合“数”的理解。当学生从“形数”的角度得到素数是线性的，便与古代数学家的观点呼应，让学生体会到自己的学习与思考是在和古代数学家进行跨时空的交流。



### 3. 寻找素数

师: 请小组合作, 试找出不超过 100 的所有素数, 并说说你们是用什么方法找到的。

组 1: 先划去除 2 以外的所有偶数; 第五列和最后一列除 5 以外, 其他的数都是合数, 将它们划去; 再斜着划去除 11 以外的 11 的倍数 (33, 77, 99); 再在剩下的数中划去除 3 以外的 3 的倍数 (9, 21, 27, 39, 51, 57, 63, 69, 81, 87, 93); 又在剩下的数中划去除 7 以外的 7 的倍数 (49, 91); 最后再划去 1, 剩下的数就都是素数了 (见图 3)。

组 2: 我们的方法和组 1 的基本一样, 就是顺序有点不一样。我们先划去 1, 然后再划去除 2 以外的偶数, 再划去除 5 以外的 5 的倍数, 再划去除 3 以外的 3 的倍数, 再划去除 7 以外的 7 的倍数, 再划去除 11 以外的 11 的倍数, 剩下的就都是素数了。

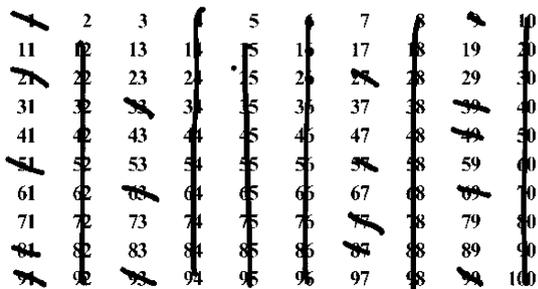


图 3 素数的寻找

师: 两组寻找素数的方法与 2000 多年前的古希腊数学家、亚历山大城图书馆馆长埃拉托色尼的方法一样。为了找到从 1 到任意一个自然数之间的全部素数, 他把从 4 开始的所有偶数下面画一短横, 表示把这些数去掉; 再把能被 3 整除的、下面没画短横的数画上短横, 这些数有 9, 15……接着在能被 5 整除的、下面没画短横的数画短横, 这样的数有 25, 35……一直这样做下去, 最后得到一列下面没画短横的数, 这些数除 1 以外全都是素数。后来人们把这样寻找素数的方法叫做埃拉托色尼筛法。这个方法像从沙子里筛石头那样, 把素数从自然数中筛出来, 素数表就是根据这个筛法原则编制出来的。

【设计意图】通过寻找不超过 100 的正整数中的素数, 学生进一步熟悉素数与合数的判定, 体会素数与合数的内涵。学生通过小组讨论得到与古代数学家基本一致的素数表制作方法, 再次让学生感受到只要勇于思考、认真探索, 他们也可以像数学家一样做数学。

### 4. 课堂小结

师: 通过本节课的学习, 你们收获了哪些知识?

生 1: 我知道了素数的名称还有质数、数根、纯数。

生 2: 我会寻找不超过 100 的正整数的素数了, 先划去 1, 再依次划去 2, 3, 5, 7, 11 的 2 倍及 2 倍以上的倍数, 剩下的数就是素数了。

生 3: 素数和前面学习的数一样, 也能通过图形来表示, 当用“点形”表示素数时是一条直线。

### 四、学生反馈

课后, 针对本节课所学内容, 研究者对全班学生进行了问卷调查。

对于“根据本节课所学知识, 正整数可以如何分类?”的问题, 学生回答的正确率达到 95%。

对于本节课印象最深的环节, 学生提到的有“毕达哥拉斯的‘形数’”“寻找素数的方法”“素数的名称”“1”“两块骨头”等, 其中提到最多的是“寻找素数的方法——埃拉托色尼筛法”。印象最深的原因很多, 一部分学生认为在寻找素数时, 与全班同学一起讨论、研究、分析, 最后得出正确答案很有成就感; 一部分学生觉得自己总结出了与古人相似的方法很开心。对于“毕达哥拉斯的‘形数’”, 学生印象最深的原因是素数可以通过画画来表示, 也可以用形状分出素数与合数。

对于“学完这节课, 你是否有疑问没解决或产生了新疑问? 如果有, 疑问是什么?”的问题, 40%的学生表示“听明白了, 没有什么疑问了”, 30%的学生在数学史的基础上提出了新的疑问, 如“为什么古时候就有人发现了素数, 他们是通过什么想到的? 为什么素数也被称为纯数, 它‘纯’在哪里? 为什么合数也叫杂数, 它‘杂’在哪里? 在以前, 为什么 1 被认为是单位而不是数?”



另外 30% 的学生出于对素数与合数的好奇对其进一步思考, 提出了一些问题, 如“怎样借助‘形数’得到答案? 到底有多少个素数? 素数有什么规律吗? 为什么不把 0 和负数纳入素数与合数?” 等等。

从学生的问卷反馈可知, 课堂上介绍的每一段数学史、所融入的人文元素, 都给学生留下了深刻的印象, 有助于激发学生的学习兴趣, 促使学生主动深入思考, 达成相应的教学目标。

## 五、结语

### (一) 探究之乐与能力之助

学生自己用“点形”把正整数表示出来, 探寻素数与合数“点形”的不同特色, 可以增强数形结合的能力。学生根据素数与合数、奇数与偶数的概念独立判断 1—20 之间的正整数的素性、合性、奇性及偶性, 并在此基础上探索、发现正整数的奇偶性与素合性之间的区别与联系, 有利于培养学生的数学归纳能力。寻找 1—100 正整数内的素数时, 各小组展示的寻找素数的方法充分体现了他们的探究过程。当学生成功寻找出 1—100 内的素数时, 他们的内心充满了快乐, 进而增强了学生分类处理数据的能力。

### (二) 方法之美

学生除了可以从“数”的角度理解素数, 还可以从“形”的角度解读素数, 当用毕达哥拉斯的“形数”来表示素数时, 素数只能是“直线的”。从古人用石子计数, 到用石子研究数, 将“数”用“形”的形式表现出来, 是人类最淳朴的数形结合的思想。就素数而言, “形数”的表达可以使素数更为直观, 同时也可以辅助学生对素数内涵的理解。

### (三) 文化之魅

古希腊的素数、不能合成的数、“线型的数”, 中国的“数根”和“纯数”, 非洲出土的带有刻痕的骨头, 这些都表明素数在不同的文明中酝酿和发展, 在不同的文明间传播, 既有共同点又各有自己的特色。不同时空、不同地区的素数观有利于学生在头脑中形成一个丰满而鲜活的素数概念意向, 让学生感受到数学文化的多样性。

### (四) 德育之效

即使像素数、合数这样看似简单的数学概念也有它的前世今生, 数学史的融入可以让学生看到概念背后的创造过程, 有利于培养学生动态的数学观。当学生知道自己寻找 1—100 内素数的方法竟然与 2000 多年前的古希腊数学家、亚历山大城图书馆馆长埃拉托色尼的方法基本一样时, 探究的满足感和数学学习的自信就会油然而生。关于第一个素数, 学生对如今教材的解释可能还存在困惑, 历史上也曾经有过不同声音, 与学生直观感受相契合。这一方面可以降低学生的挫败感, 另一方面不同观点的碰撞也启示学生要敢于思考、善于思考, 学会质疑, 学会激发自己的疑问, 让疑问带动兴趣、引导探究。

HPM 视角下的“素数与合数”教学设计, 旨在让学生掌握素数与合数概念的同时, 感受到素数和合数不只是两个干巴巴的概念, 而是有温度的、有文化的。判别素数与合数的基本技能训练当然重要, 若没有过硬的技能, 任何境界都无从谈起。但是只有技能训练是不够的, “学如弓弩, 才如箭簇, 识以领之, 方能中鹄”, 除了“学”的基本技能做底蕴, 还要有数学能力和才华做锋芒, 有见识来引领前行。研究者希望通过贯穿课堂的一段段素数与合数的历史, 能够激起学生思考, 最终成就有灵魂的教育。

#### 参考文献:

- [1] 蔡天新. 数学简史 [M]. 北京: 中信出版集团, 2017.
- [2] HEATH T L. A history of greek mathematics [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1921.
- [3] HEATH T L. The thirteen books of euclid's elements (Vol. 2) [M]. Cambridge: The University Press, 1908.
- [4] 严敦杰. 中算家的素数论(续) [J]. 数学通报, 1954 (5): 6-10.
- [5] 刘钝. 大哉言数 [M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1997.
- [6] LAROCHE P. et al. Why is the number one not prime? [EB/OL] (2018-12-7). <http://primes.utm.edu/notes/faq/one.html>.
- [7] 谈祥伯. 乐在其中的数学 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.