数学史料的选取原则与案例分析*

陈晏蓉，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，200062）

摘　要：HPM课例开发首先要选取合适的数学史料。依据相关文献中的数学教学原则，结合数学史的六类教育价值，提炼出用于教学的数学史料的选取原则：趣味性、可学性、有效性、人文性和科学性。趣味性、有效性和人文性原则能够确保数学史教育价值的最大化，而可学性原则能够保证数学史教育价值的产生，科学性原则能够确保数学史料的真实性。选取五个典型的HPM课例作为对象，分析上述五项原则在数学史料选取中的体现。结果表明，相应的数学史料可学性、有效性和科学性较强，而趣味性和人文性较弱。

关键词：HPM　数学史料　选取原则　课例分析

近年来，数学史融入数学教学的实践研究已经成为数学史与数学教育（HPM）领域的重要课题。随着实践研究的深入开展，HPM课例开发日益增多。HPM课例开发的第一步是搜集、占有足够的数学史料（“巧妇难为无米之炊”），从中选取可以用于教学的（对其进行裁剪、加工）。这就涉及数学史料的选取问题。

在国内已经发表的HPM课例文章中，我们很少能看到数学史料的具体选取过程和依据。因此，需要建立一个数学史料选取的方法或标准，以便能够更好地指导HPM课例开发。有鉴于此，笔者尝试依据相关文献中的数学教学原则，结合数学史的教育价值，提炼数学史料选取的原则；并选取典型的HPM课例，分析其中数学史料的选取是否符合这些原则，同时检验这些原则的合理性。

一、数学史料选取的五项原则

（一）相关文献中的数学教学原则

美籍匈牙利著名数学家和数学教育家G. 波利亚（G. Pólya，1887～1985）提出数学教学的三个原则：主动学习原则（P_1）、最佳动机原则（P_2）和循序渐进原则（P_3）。其中，主动学习原则指的是在给定的条件下应当让学生尽可能多地靠自己去发现；最佳动机原则指的是应当注意选择好的问题（这些问题最好是有趣的、带有一些实际应用特色的），从而激发学生的学习兴趣；循序渐进原则指的是学习过程应当从行动和感知开始，进而发展到词语和概念，并以养成合理的思维习惯结束。

美国著名数学家和数学教育家M. 克莱因（M. Kline，1908～1992）提出数学课程的四个原理：兴趣原理（K_1）、动机原理（K_2）、直观原理（K_3）和文化原理（K_4）。其中，兴趣原理指的是数学课程应该激发学生的学习兴趣；动机原理指的是数学课程应该揭示相关知识的必要性，激发学生的学习动机；直观原理指的是数学课程应该直观地揭示每个数学思想或过程的含义；文化原理指的是数学课程应该反映数学与其他知识领域（科学、哲学、艺术等）之间的关联性。

（二）数学史的教育价值

充分挖掘知识的教育价值，是实施有效教学的要求。将数学史融入数学教学时，教师要深刻认识数学史的教育价值。已有的实践研究表明，数学史具有六类教育价值“知识之谐”（V_1）、“方法之美”（V_2）、“探究之乐”（V_3）、“能力之助”（V_4）、“文化之魅”（V_5）和“德育之效”（V_6）。其中，“知识之谐”是指数学史揭示了知识自然发生、发展的过程，揭示了数学的本质，符合学生的认知规律，能促进学生对数学的理解；“方法之美”是指数学史展现了数学方法的多样性和数学思维的灵活性，能培养学生的创新思维；“探究之乐”是指数学史作为数学问题的宝藏，为学生提供了丰富的探究机会；“能力之助”是指数学史有助于发展学生的数学素养，培养学生数学阅读、表达、转换等多方面的能力；“文化之魅”是指数学史揭示了数学与现实世界以及人类其他知识领域之间的联系、数学文化的多元性以及数学活动的本质；“德育之效”是指数学史能激发学生的兴趣和信念，培养学生尊重、包容、正直、诚实等良好的个性品质。

（三）五项原则

依据相关文献中的数学教学原则，结合数学史的六类教育价值，我们提炼出用于教学的数学史料的选取原则：趣味性、可学性、有效性、人文性和科学性。这五项原则的内涵以及对应的数学教学原则、数学史教育价值见表1。

表1

原则	内涵	数学教学原则	数学史教育价值
趣味性	选取的数学史料应该能够激发学生的学习兴趣和动机	P_2、K_1、K_2	V_6
可学性	选取的数学史料应该符合学生的认知基础	P_3	V_1
有效性	选取的数学史料应该有助于学生理解、掌握和运用相关知识	P_1、K_3	V_1、V_2、V_3、V_4
人文性	选取的数学史料应该与数学家相关联，反映数学的人文精神；或与其他知识领域相联系，揭示数学的文化价值	K_4	V_5、V_6
科学性	选取的数学史料应该有明确的文献出处，符合史实	—	V_1、V_2、V_3、V_4、V_5、V_6

首先，根据趣味性、有效性和人文性原则来选取数学史料，能够确保数学史教育价值的最大化，避免为历史而历史。其次，教师也要关注学生的认知基础，因为很多数学史料并非像教师想象的那样简单易懂。一则数学史料若不具备可学性，就不可能产生应有的教育价值。最后，科学性原则能够确保数学史料的真实性。离开科学性，将数学史融入数学教学就成了一句空话。因此，教师需要参考原始文献或权威的二手文献。这对中小学教师来说难度很大。不过，大学研究者和中小学教师合作，能够很好地解决这个难题。

二、五项原则在 HPM 课例中的体现

我们选取《对数概念：从历史到课堂》《数列概念：通过历史体现“奇、趣、本、用”》《HPM 视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究》《“正弦定理”：用历史拓思维、润情感》《两角和差的三角公式推导——数学史融入数学教学的实例研究》这五篇文章中的五个 HPM 课例作为对象，分析上述五项原则在数学史料选取中的体现。这些课例涉及代数和三角学，均为新授课。

（一）“对数概念”课例分析

本课例首先通过特殊正整数的乘法，让学生感受计算之繁；其次通过以 2 为底的正整数指数幂与指数对应的数表，让学生体会乘法可以简化为加法；再次引出天文学上的大数运算，让学生看到相乘的两个大数不在数表中（即不是 2 的正整数指数幂），因而数表失效；然后尝试寻找相应的指数，让学生发现这样的指数难以精确求得，需要定义新的数，由此引入对数定义；最后通过指数与对数的互化，巩固对数概念。整节课运用了四则史料。

1. 等差和等比数列之间的对应关系。

15～16 世纪，欧洲许多数学家在各自的著作中都运用了等差和等比数列的对应关系，将乘除运算简化为加减运算。比如，法国数学家许凯（N. Chuquet，1445～1488）在《算学三部》中给出了双数列之间的对应关系，如表 2 所示，即等比数列的乘除运算对应等差数列的加减运算。由于等比数列中相邻两项的间隔太大，这样的对应关系效用并不大。其后，苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier，1550～1617）构造了相邻两项的间隔很小的等比数列，从而发明了对数。

表 2

1	2	4	8	16	32	64	128	…	1 048 576
0	1	2	3	4	5	6	7	…	20

本课例中，教师从学生熟悉的正整数乘法出发，通过数表的作用和局限，再现了对数的发现过程，揭示了对数的必要性，促进了学生对对数的理解，也为对数运算学习埋下伏笔。此外，教师还展示了数学与天文学之间的关系。因此，这一史料的选取符合趣味性、可学性、有效性和人文性原则。

2. 古巴比伦泥板上的利息问题。

古巴比伦泥板上载有以下问题：年息 20%，一定数目的钱经过多长时间后的本利和变为原来的两倍？

这个问题与生活实际息息相关，切合了对数的定义，反映了对数的用途，符合趣味性和有效性原则。

3. 对数的历史故事。

纳皮尔经过整整 20 年的努力，终于在 1614 年发明了对数。翌年，英国数学家布里格斯（H. Briggs，1561～1630）从伦敦赴爱丁堡拜访他。这场“旷世之约”导致了常用对数的诞生。

这个故事激发了学生的兴趣，并留下了人生的启迪，符合人文性原则。

4. 对数的辞源。

17 世纪，法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596～1650）发明了幂的记号，指数概念由此而生。17 世纪末，人们认识到对数可以定义为幂指数。此后，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707～1783）创用了“$\log_a N$”这一记号。中国明代数学家薛凤祚（？～1680）在《比例对数表》（1653）中首次将纳皮尔的“logarithm”一词译为“对数”。清代康熙皇帝主持编写的《数理精蕴》的下编卷第 38 条“对数比例”对双数列之间的关系做了详细的介绍。

本课例中，教师追溯了对数的辞源，帮助学生理解了“对数”中“对”字的含义。在小结环节，教师引用《数理精蕴》中的一段话作为结尾：“对数……以假数与真数对列成表，故名对数表。其法以加代乘，以减代除；以加倍代自乘，故折半即开平方；以三因代再乘，故三归即开立方；推之至于诸乘方，莫不皆以假数相乘而得真数。盖为乘除之数甚繁，而以假数代之甚易也。”说明了对数的运算法则，为后续学习埋下伏笔。因此，这一史料的选取符合有效性原则。

（二）“数列概念”课例分析

本课例以古巴比伦泥板上的月相表、莱因德纸草书中的财产问题以及根据约瑟夫故事改编的课堂小游戏为引例，归纳出数列的定义；在对概念进行辨析并给出不同的表征后，引入数列通项的概念；在例题和练习环节，聚焦数列的通项公式；最后，通过微视频展现数列在天文学上的应用。整节课运用了四则史料。

1. 古巴比伦泥板上的月相表。

大英博物馆所收藏的巴比伦泥板 K90（公元前 7 世纪）记录了一张月相表：将满月分成 240 个部分，则从新月开始每天的月相情况构成了一个数列，如表 3 第二行所示，其前 5 项构成公比为 2 的等比数列，第 5～15 项构成公差为 16 的等差数列。

表 3

1	2	3	4	5	6	7	8
5	10	20	40	80	96	112	128
9	10	11	12	13	14	15	—
144	160	176	192	208	224	240	—

其实，古巴比伦泥板中含有许多与数列相关的内容。这里，教师选用月相表作为引例，目的是呈现数列与生活之间的密切联系，从而突出数列学习的必要性，激发学生的学习动机；同时，月相变化规律反映了数列的“序”的本质特征，有助于学生对数列的理解。因此，这一史料符合趣味性、人文性和有效性原则。

2. 莱因德纸草书中的财产问题。

莱因德纸草书（约抄录于公元前 1650 年）上载有如下问题：一位富人家里有 7 间储藏室，每间储藏室里有 7 只猫，每只猫捉了 7 只老鼠，每只老鼠吃了 7 棵麦穗，每棵麦穗长出了 7 个体积单位的麦粒，则储藏室、猫、老鼠、麦穗、麦粒数各有多少？这是与等比数列 $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5$ 相关的财产问题。

古埃及纸草书上不乏有关数列的内容。选择财产问题，显然是因为它是一个趣味性的数学问题，并且适合用作关于通项公式的例题。因此，这一史料符合趣味性和有效性原则。

3. 约瑟夫故事。

在公元前 4 世纪的一部著作里，海格希普斯讲述了约瑟夫运用智慧自救的故事。当

罗马人攻陷 Jotapat 后，约瑟夫和另外 40 个犹太人躲到一个山洞里避难。可是，除了约瑟夫和他的一位好朋友之外，其余 39 人都决定自杀，以避免落入罗马人之手而遭受折磨。约瑟夫提出在临死之前大家不妨玩一个游戏娱乐一下。他提出的游戏规则如下：所有人排成一圈，随机从某一位置开始点数，将逢三者拉出圈子杀掉，最后剩下的两个人自杀。约瑟夫将他自己和好朋友分别安排在 16 和 31 号位置上，成功地避开了死神。

本课例中，教师将约瑟夫的故事改编成了课堂小游戏：10 个同学排成一圈，随机从某一位同学开始，逢三点数，点到者出列，让最后剩下的两位同学请大家吃薯愿。这个游戏既有趣，又突出了“序”的本质特征，符合趣味性和有效性原则。

4. 提丢斯—波德律。

18 世纪，德国数学家提丢斯(J. D. Titius，1729～1796)用一个特殊的数列 4，7，10，16，28，52，100，196，388，772 来表示太阳系行星与太阳之间的相对距离。该数列被后人称为“提丢斯—波德律”。对“28”这一项所对应的可能“行星”的寻找，导致了谷神星的发现。

本课例中，教师以微视频展现了数列在天文学上的这一应用，进一步揭示了数列学习的必要性以及数学和天文学的密切联系。因此，这一史料符合趣味性、有效性和人文性原则。

(三)“复数概念”课例分析

本课例首先利用现实情境，让学生求和为 10、积为 24 的两个数，进而引出 16 世纪意大利数学家卡丹的问题，让学生发现问题没有实数解；接着给出 16 世纪意大利数学家邦贝利的三次方程求根问题，进一步让学生面对“两数之和为实数，但这两个数都不是实数”的事实，由此引出虚数概念。整节课运用了三则史料。

1. 卡丹问题。

1545 年，意大利数学家卡丹(G. Cardan，1501～1576)在《大术》中提出了如下问题：将 10 分成两部分，使其乘积为 40。作为尝试，卡丹给出了形如“$5+\sqrt{-15}$”和“$5-\sqrt{-15}$”的解，但他并未接受“负数平方根”这样的数。

卡丹问题揭示了复数的必要性，激发了学生的学习动机；并且，二次方程的解法为学生所熟悉。因此，这一史料符合趣味性、可学性、有效性和人文性原则。

2. 邦贝利的三次方程求根。

16 世纪，意大利数学家邦贝利(R. Bombelli，1526～1572)在用求根公式解三次方程 $x^3=15x+4$ 时，遇到了一个“矛盾”：$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$，即一个实数等于两个非实数之和。正是这一矛盾促使邦贝利对“负数平方根”这种“新数”进行了深入的探究，从而导致虚数概念的诞生。

很多教师认为，三次方程求根问题太难，不符合可学性原则。本课例中，教师分别呈现运用三次方程求根公式得到的根以及通过因式分解得到的根，从而降低了难度。通过三次方程的根来引入虚数概念是最令人信服的，符合趣味性、有效性和人文性原则。

3. 虚数的辞源。

1777 年，欧拉用“imaginary”一词的首字母“i”来表示虚数，本意是指虚数只存在于“想象之中”。

本课例中，教师向学生解释虚数的辞源，让学生体会历史上数学家对于虚数的困惑，从而感受虚数概念缓慢而艰辛的发展历程。

因此，这一史料符合人文性原则。

（四）“正弦定理”课例分析

本课例通过流星测量问题来引入正弦定理；在利用“作高法”证明正弦定理后，引入梅文鼎简化的“同径法”；在探究边与对角正弦的比值时，引入韦达的“外接圆法”；最后简要介绍了正弦定理的历史。整节课涉及了以下史料。

1. 流星测量方案。

10 世纪，阿拉伯天文学家阿尔·库希（al-Kuhi）曾经提出流星的测量方案：位于不同地点的两个测量者观测同一颗流星，通过两地的距离、仰角，可以求得流星距离大地的高度。

本课例中，教师将这一方案改编成流星测量问题，由此揭示了正弦定理的必要性以及数学与天文学的联系，符合趣味性、有效性和人文性原则。

2. 简化的“同径法”。

历史上，正弦定理的几何推导方法可以分为“同径法”和“外接圆法”。“同径法”最早为 13 世纪阿拉伯数学家纳绥尔丁（Nasir-Eddin，1201～1274）和 15 世纪德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus，1436～1476）所采用。17～18 世纪，中国数学家家梅文鼎（1633～1721）和英国数学家辛普森（T. Simpson，1710～1761）各自独立地简化了“同径法”。

这一方法使正弦定理更加直观，促进了学生对该定理的理解，因而符合可学性与有效性原则。

3. “外接圆法”。

“外接圆法”最早为 16 世纪法国数学家韦达（F. Viète，1540～1603）所采用。20 世纪初，“外接圆法”演化为“辅助直径法”。

这一方法能让学生感受数学思维的灵活多样性，帮助学生更好地理解和掌握推广的正弦定理（任意三角形一边与其对角的正弦之比等于该三角形外接圆的直径），因而符合有效性原则。

4. 有关数学家。

本课例中，教师简要介绍了正弦定理的历史以及数学家韦达和梅文鼎的故事，揭示了数学背后的人文精神，符合人文性原则。

（五）“两角和差的三角公式”课例分析

本课例根据古希腊数学家帕普斯的和角公式几何模型设计一系列问题，帮助学生利用几何图形推导两角和的正、余弦公式，并引导学生进一步推导两角差的正、余弦公式；又根据韦达和差化积公式的证明，引导学生进一步证明其余和差化积公式。整节课主要采用了两则史料。

1. 和角正弦公式的推导。

3 世纪末，古希腊数学家帕普斯（Pappus，3 世纪末）在《数学汇编》第 5 卷第 4 部分给出了如下命题：如图 1，设 H 是以 AB 为直径的半圆上的一点，CE 是半圆在点 H 处的切线，$CH=HE$；CD 和 EF 为 AB 的垂线，D、F 为垂足，则 $(CD+EF)\cdot CE=AB\cdot DF$。当 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ 时，即得图 2 所示的和角公式几何模型。

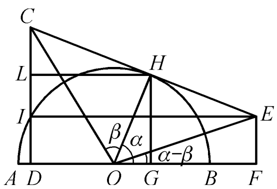

图 1

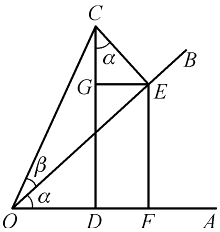

图 2

有了帕普斯的几何模型，学生可以从直

角三角形的边角关系出发，自主得出两角和与差的正、余弦公式。因此，这一史料促进了学生对公式的理解和记忆，符合可学性和有效性原则。

2. 和差化积公式的推导。

韦达曾用几何方法证明了和差化积公式：如图 3，在单位圆 O 中，有 $\sin\alpha+\sin\beta=AD+CE=AF=AC\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$。

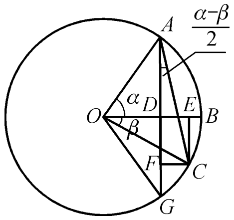

图 3

韦达的方法直观易懂，符合可学性与有效性原则。

总之，对上述五个课例所选取的数学史料的分析表明：绝大多数史料都符合学生的认知基础；都能揭示知识的必要性，促进学生对相关知识的理解；都符合史实，有明确的文献出处。因此，这些史料满足可学性、有效性和科学性原则。但是，一些史料的趣味性和人文性较弱。究其原因：一方面，教师更关注数学史料对数学理解的帮助，更关注数学史料所蕴含的思想方法，而并不刻意追求趣味性和人文性；另一方面，虽然数学史料丰富多彩，但是要选择一则同时满足五项原则的数学史料并非易事。

---

* 本文系上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”的子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（编号：D1508）的阶段性研究成果。

参考文献：

［1］ Pólya, G. *Mathematical Discovery*［M］. New York: John Wiley & Sons, 1965.

［2］ Kline, M. The ancients versus the moderns: a new battle of the books［J］. *Mathematics Teacher*, 1958(6).

［3］ 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育［M］. 北京：科学出版社，2017.

［4］ 钟萍，汪晓勤. 对数概念：从历史到课堂［J］. 中学数学月刊，2015(5).

［5］ 李玲，汪晓勤. 数列概念：通过历史体现“奇、趣、本、用”［J］. 教育研究与评论（中学教育教学），2016(4).

［6］ 方国青，王芳. HPM 视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究［J］. 数学教学，2013(4).

［7］ 张筱瑜，汪晓勤. “正弦定理”：用历史拓思维、润情感［J］. 教育研究与评论（中学教育教学），2015(6).

［8］ 张小明，汪晓勤. 两角和差的三角公式推导——数学史融入数学教学的实例研究［J］. 数学教学，2007(2).