【课堂研究·特设专栏：HPM课例研究（之七）】

周期函数的概念：从历史到课堂

杜金金[1]，陈莎莎[2]，沈中宇[3]
（1. 上海市建平中学，上海 200135；2. 上海大学附属中学，上海 2019003；
3. 华东师范大学 数学科学学院，上海 200241）

【摘 要】“函数的周期性”是沪教版高中数学第6章第一节“三角函数的图像与性质”第三课时的内容，是函数教学的难点之一。教师可以从HPM视角设计本节课教学，直接或间接利用历史素材，设计一系列问题，让学生在解决问题的过程中经历周期函数概念的发生和发展过程，加深对周期函数的理解，发展学生核心素养，营造人性化课堂，实施数学学科德育。

【关键词】数学史；周期函数；三角函数

一、引言

“函数的周期性”是沪教版高中数学第6章第一节“三角函数的图像与性质”第三课时的内容。沪教版高中数学在第3章第四节“函数的基本性质”中主要介绍了函数的奇偶性、单调性、最值和零点，而在介绍三角函数的周期性时才引出周期函数的概念。“函数的周期性”是函数教学的难点之一，主要体现在以下两个方面[1]：一是学生对周期现象描述不清楚、表达不完整且无法与函数的周期性建立联系；二是学生对周期函数概念的理解水平不高，大多数学生停留在直观或形式化的认识上。出现这些现象的原因之一是教师在教学过程中未能注重周期函数的产生与发展过程。同时，《普通高中数学课程标准（2017年版）》将数学核心素养的培养作为课程的主要目标，并提出数学课程要体现数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值[2]。这要求教师在课堂教学中，应致力于从关注结果到关注过程、从关注知识到关注素养、从关注技能到关注文化的转变。

实际上，周期函数在历史上经历了漫长的发展过程。在早期的西方三角学教科书中，人们从日复一日、年复一年的时间变化中感受到周期现象。之后，周期性与三角学就紧密联系在一起，例如角的终边和诱导公式。最终，数学家给出了周期函数的形式化定义。数学史为教学设计提供了参照，教师可以直接或间接利用历史素材，设计一系列问题，让学生在解决问题的过程中经历周期函数概念的发生和发展过程，加深对周期函数的理解，发展学生的核心素养。同时，教师可以通过数学史的融入，营造人性化的课堂，实施数学学科德育。

鉴于以上分析，笔者从HPM视角设计本节课教学，并拟定如下教学目标。

（1）理解和掌握周期函数的概念，熟练判断一个函数是否具有周期性并灵活运用定义法进行

【作者简介】杜金金，上海市建平中学数学教师，主要研究方向为高中数学课堂教学；陈莎莎，硕士，上海大学附属中学数学教师，主要研究方向为高中数学课堂教学；沈中宇，华东师范大学数学科学学院博士研究生，主要研究方向为数学史与数学教育。

【基金项目】上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”

证明;

(2) 提升从定性描述到定量刻画的能力，能够从多样化的结果中发现共性与差异性并进行对比和评价，培养数学抽象核心素养;

(3) 从数学史中感受数学的发展和魅力，感受数学来源于生活且高于生活，体会周期性思想对生活的指导性意义和价值。

二、周期函数概念的历史

根据周期函数概念的历史，笔者勾勒出三个关键步骤。

1. 周期现象：从时间到运动

周期函数的概念源于人类对周期现象的观察。人们最开始观察到的周期现象都与时间有关，如基思(T. Keith)于1810年对一天做出了明确的描述[3]；邦尼卡斯尔(J. Bonnycastle)于1818年对一个月进行了定义。在此期间，周期与时间的变化密不可分，物体重复经历一个位置的时间间隔称之为周期[4]。

人们逐渐认识到，时间间隔其实对应于物体运动的间隔，如汤姆森(J. Thomson)于1825年提到了天体的运动规律[5]。之后，数学家进一步将天体的运动类比到角的变化[6]。

2. 三角函数背景下的周期函数：从描述定义到诱导公式

周期概念的发展与三角函数息息相关。早在18世纪，欧拉(L. Euler)在《无穷分析引论》中给出了三角函数的一系列诱导公式，他已经认识到三角函数的周期性，但并未具体提出周期和周期函数的概念[7]。德摩根(A. De Morgan)于1837年根据角的终边周而复始的规律变化描述性地刻画了周期现象，但主要还是以文字描述为主[8]。与欧拉类似，西弗(E. P. Seaver)于1871年通过诱导公式呈现了三角函数的周期性[9]。里德尔(P. R. Rider)于1888年通过三角函数的图像特征来描述三角函数的周期性即三角函数的值和三角函数曲线重复出现，故称其具有周期性[10]。但这样的定义仍然是描述性的定义。

直至1880年，数学家开始尝试对三角函数的周期性进行刻画，但仅局限于文字描述，一般周期函数的形式化定义尚未出现。

3. 周期函数形式化定义：从不完善到完善

1892年，尼克逊(R. C. Nixon)提出了以三角函数为背景的形式化定义[11]，标志周期函数的概念进入新的发展阶段。1899年，加拿大数学家穆雷(D. A. Murray)摆脱了三角函数的束缚，对一般周期函数进行了定义[12]：一般地，对于函数$f(x)$，如果存在常数T，对任意一个x值都有$f(x+T)=f(x)$，那么函数$f(x)$叫作周期函数，常数T叫作函数$f(x)$的周期。

美国数学家博汉南(R. D. Bohannan)和德累斯顿(A. Dresden)先后于1904年和1940年给出了一般周期函数的形式化定义。博汉南认为，对于函数$f(x)$存在非零整数n，对任意一个x值都有$f(x+nT)=f(x)$，那么函数$f(x)$叫作周期函数，常数T叫作函数$f(x)$的周期[13]。德累斯顿认为，对于任意的x，且x和$x+T$均属于定义域$\mathbf{R}$内，$f(x+nT)=f(x)$，那么函数$f(x)$叫作周期函数，常数T叫作函数$f(x)$的周期[14]。

虽然上述定义仍有瑕疵，但已经十分接近现代关于周期函数的定义了。

4. 汉语“周期”一词的由来

“周期”一词英译为periodicity，是指具有某个阶段性特征的时间。然而，“周期”一词并非英译而来，最早出现在金元之际数学家李冶的读书笔记《敬斋古今黈》中[15]。据《汉语大词典》考究，事物在变化过程中，某些特征多次重复出现，其连续两次出现所经过的时间，称为周期[16]。

三、教学设计与实施

1. 情境创设，感性认识

课前，教师先让学生聆听一首经典歌曲*Why nobody fights*。

师：此时此刻你们脑中印象最深刻的是什么?

生(齐答)：印象最深刻的是“Why nobody fights”，因为整首歌曲都是这一句歌词!

师：对，正是这样的重复才让人感觉印象深刻。其实在我们的日常生活中，这样的例子比比皆是。语文教师常问“语文作文，写了吗？写

了吗？写了吗？”数学教师常问 “一课一练，做了吗？做了吗？做了吗？”英语教师常问 “英语单词，背了吗？背了吗？背了吗？”这是因为重要的事要说几遍？

生（齐答）：三遍！

师：这样具有规律的重复无所不在，你们能不能用一个学过的专业术语刻画具有规律的重复现象？

生 1：循环。

师：生 1 是从信息学的角度思考的，非常好。那能不能从物理的角度思考呢？

生（齐答）：周期。

师：今天我们来共同研究周期性现象。既然你们都知道“周期”这个词，那么为什么“周期”会被命名为“周期”？有没有哪位同学能够说文解字，向大家解读你心目中对于“周期”一词的理解？

生 1：物理上，周期代表转一圈的时间。

生 2 “周”可以理解为星期，意为一星期的时间。

生 3：我猜“周期”一词是 time 英译过来的。

师：事实上“周期”的英文为 periodicity，由形容词 period 和名词性后缀 icity 构成，意为具有某个阶段性特征的时间。但“周期”一词并非英译而来，它最早出现于我国金元之际数学家李冶的读书笔记《敬斋古今黈》中。据《汉语大词典》考究，事物在变化过程中，某些特征多次重复出现，其连续两次出现所经过的时间，称为周期。二者综合，周期可以被定义为特征重复出现的时间间隔。“周期”一词的语义如此丰富，值得我们进一步明确和探索。

【设计意图】教师通过歌曲和生活中的重复现象，让学生体会周期性现象，引出“周期”概念；通过对词语的考究，让学生进一步了解“周期”一词的来源和意义。

2. 模型刻画，概念初探

教师接着让学生指出物理中最典型的周期运动，从而引出匀速圆周运动。

师：我们可以用大家所熟知的单位圆模型来刻画周期运动。物理上，经过一个周期后，点 P 的位移不会发生变化，线速度和角速度也不会发生变化。用物理量刻画运动的周期性隐藏着浅显的数学原理。经过一个周期后，点 P 旋转到原来的位置（如图 1）。在数学上有没有什么数学量可以刻画旋转？

生 4：角可以刻画旋转。

师：角逆时针旋转一圈，即一个周期后，它的角度增加了 360°，这不是发生变化了吗？

生 5：但角的终边没有发生变化。

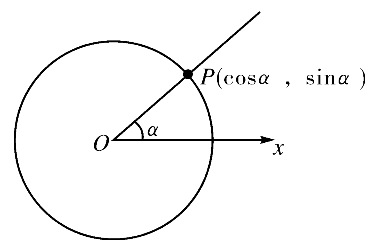

图 1 单位圆及其上点的坐标

师：一个周期后，点 P 的位移没有发生变化。在数学上有没有什么量可以刻画点 P 的位置？

生 6：坐标。

师：你能否写出单位圆上点 P 的坐标？

生 6：$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$。

师：当角 α 逆时针旋转一圈时，点 P 的坐标发生变化吗？

生 7：没有发生变化，因为$(\cos(\alpha+2\pi), \sin(\alpha+2\pi))=(\cos\alpha, \sin\alpha)$。

师：这其实就是诱导公式。我们发现一个周期后，角 α 的终边，即点 P 的坐标，也即角 α 的三角比不发生变化。我们可以将以上学生提到的周期性刻画方式总结如下（见表 1）。

表 1 周期性刻画方式

物理量（经过一个周期后）	数学量（经过一个周期后）	历史相似性
点 P 旋转到原来的位置	角 α 的终边不发生变化	终边定义
点 P 的位移不发生变化	点 P 的坐标不发生变化	诱导公式定义

【设计意图】匀速圆周运动是典型的周期性

运动，通过物理量刻画周期性，揭露物理量背后所对应的数学量，又通过数学量刻画周期性。

3. 结合图像，定性理解

从匀速圆周运动的刻画中，教师引出三角函数的周期性。

师：弧度制下的角和实数一一对应，因此我们引入三角函数。老师不禁想问，三角函数是否具有周期性？我们可以先从直观的图像上进行判别。

师：老师看到大部分学生都在点头，看来三角函数属于周期函数。更一般地，任意函数是否都具有周期性呢？

生（齐声）：不一定。

师：那函数图像满足什么特征时，具备周期性呢？

生 1：规律变化。

生 2：重复出现。

生 3：可以经过平移得到。

师：同学们都说得很好，但通过几何直观做出的判断往往模糊不清。比如高斯取整函数，有些学生认为是周期函数，有些学生认为不是周期函数。图像可以通过描点法绘制，但我们不可能描完所有的点，也不可能画出无穷的图像，所以类比函数的奇偶性、单调性等，我们最终要回归到严谨的定量描述。

【设计意图】观察三角函数和其他周期函数的图像，从几何直观认识函数的周期性。教师总结出周期函数图像的共性，让学生体会定量刻画函数周期性的必要性。

4. 概念探究，定量描述

教师引导学生回归之前学过的诱导公式。

师：我们回归到大家熟悉的诱导公式 $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$，$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$，从函数的视角可以得到三角恒等式 $\cos(x+2\pi)=\cos x$，$\sin(x+2\pi)=\sin x$，自变量 x 每增加 2π，三角函数值不发生变化。如果对于更为一般的函数，我们应该如何描述？

生 1：自变量 x 每增加一个周期，函数值不发生变化。

师：一般的函数可以用符号 $f(x)$ 表示，周期一般用字母 T 表示，既有时间的意味，又区别于时间，因为周期是重复特征出现的时间间隔。此时，我们就可以用什么简洁的式子进行定量刻画？

生 2：$f(x+T)=f(x)$。

师：函数的周期性作为函数的基本性质，需要有一个完整的定义描述。请同学们类比之前学习过的函数的奇偶性、单调性和对称性，尝试构建周期函数的定义。

生 1：存在 T 使得对任意 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数。

生 2：$\forall x$，$\exists T(T\neq 0)$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数。

生 3：$\forall x\in D$，$f(x+T)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为周期。

师：其实，历史上穆雷、博汉南和德累斯顿三位数学家也对函数的周期性下了一个定义。请同学们将自己写下的定义和三位数学家的定义进行对比，小组进行讨论，说说它们的共性和个性，以及你们对于生 1、生 2 和生 3 的定义的评价。

生 4：生 1 的定义和穆雷的一模一样，都关注到了存在性和任意性，但是没有关注到周期 T 是一个非零的实数。这一点生 2 完美补充了，并且用简洁的符号语言表示出来了。

生 5：博汉南的定义也关注到了存在性和任意性，并且强调了 n 非零，但是没有强调 T 非零。生 2 的表述应将 $\exists T(T\neq 0)$ 放在 $\forall x$ 之前，否则 T 就不是一个常数，而是随着 x 的变化而变化。此外，博汉南用 $f(x+nT)=f(x)$ 刻画函数的周期性也是正确的，因为 $f(x+T)=f(x)$ 可以推出 $f(x+nT)=f(x)$。

生 6：德累斯顿的定义关注到了任意性，但没有提到存在性和周期 T 的非零性。德累斯顿强调了定义域为全体实数集，而事实上周期函数的定义域也可以不为全体实数集，我们可以像生 3 一样用定义域 D 表示。

师：同学们都观察得很仔细！在穆雷的定义中，似乎缺少了周期 T 的非零性。博汉南的定义中，我们发现周期的非零整数倍仍然是周期，所以可以考虑定义一个最小正周期，这样所有的周期都可以用最小正周期进行统一表示。德累斯顿定义中的 R 在当时并不表示全体实数集，而表示定义域 Range，其实间隔相等的常值散点图对应的函数就是一个典型的周期函数。因此，周期函数的定义应运而生了。一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得当 x 取定义域 D 内的任意值时 $f(x+T)=f(x)$ 都成立，那么函数 $f(x)$ 叫作周期函数，常数 T 叫作函数 $f(x)$ 的周期。如果在所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫作函数 $f(x)$ 的最小正周期。

师：总的来说，穆雷的定义是直观的，博汉南的定义是宏观的，而德累斯顿的定义是微观的。我们今天在追求一种比穆雷的定义更严谨、比博汉南的定义更精炼、比德累斯顿的定义更普遍的定义，这样的定义具有简洁性、有序性和严谨性。

师：从定义的具体内容来看，周期函数中核心关注的是周期 T 的存在性、自变量 x 的任意性和函数 $f(x+T)=f(x)$ 的恒等性。从常数 T 的角度而言，我们则关注了其存在性、限制性（非零）和唯一性（最小正周期）。

【设计意图】借助三角函数和诱导公式，引出函数 $f(x)$ 为周期函数的必要条件，即 $f(x+T)=f(x)$，其中 T 为 $f(x)$ 的周期。学生将自己构建的周期函数定义和历史上三位数学家对于周期函数的定义进行对比，找寻其中的共性和差异，通过小组讨论进行点评和完善，构建出完整的周期函数定义。教师最后总结定义、周期函数的定义和周期的三个关键点。

5. 练习巩固，概念强化

教师通过几个具体的练习让学生进一步巩固周期函数的定义。

师：判断函数 $f(x)=|\sin x|$ 是否为周期函数，我们可以通过画图先从几何直观判断（如图2），然后再用定义进行严谨证明。

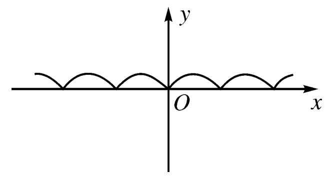

图2 周期函数练习题

生1：$\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x)$，故函数 $f(x)=|\sin x|$ 的周期为 π。

师：证明函数 $f(x)=1$ 和 $f(x)=\sin x$ 为周期函数，并求出其最小正周期。

生2：$\forall T\neq 0$，$\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x+T)=1=f(x)$，故函数 $f(x)=1$ 是以任意非零实数为周期的周期函数，不存在最小正周期。

生3：$\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$，故函数 $f(x)=\sin x$ 是周期函数，最小正周期为 2π。

师：这里在证明正弦函数的最小正周期为 2π 时，并不是特别严谨。我们可以利用定义中的存在性和任意法进行反证，即可证明。

【设计意图】教师借助函数图像判断函数的周期，巩固对函数周期性定义的理解，并利用定义求解函数的周期和最小正周期。

6. 课堂小结，思想提升

最后进行课堂小结，升华本节课涉及的周期思想。

师：其实生活中的周期现象无处不在，例如天文学中的行星运动、物理学中的单摆运动、医学中的心电图以及数学中的叠加之美等。

师：我们可以证明正弦型函数 $y=A\sin\omega x$ 和余弦型函数 $y=A\cos\omega x$ 是周期函数。如果我们将几个正弦型函数和余弦型函数进行叠加，可以叠加出众多周期函数！你们猜猜函数 $y=2\sin x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{2}{5}\sin 5x+\frac{2}{7}\sin 7x$ 的图像（如图3）会有何种神奇？

生：Teeth。

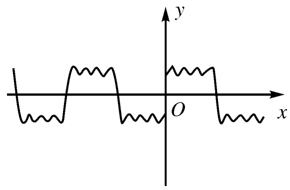

图3 正弦型函数的叠加

师：我们今天学习了周期函数，经历了从定性描述到定量刻画、直观想象到数学抽象。通过对周期函数定义的构建和三位数学家定义的评价，让我们多了一个观察角度，多了一种表达方式，多了一种拓展途径，多了一种研究手段，让我们站在巨人的肩膀上展望未来。周期最大的意义是将无限远处看不见、摸不着的结构展现在我们眼前，反之我们又能够将看得见、摸得着的结构拓展到无穷远方！

师：课堂的最后，老师想用一个开放性问题作为结尾。对于你而言，最小正周期是什么？

师：也许是年，喜迎新年！也许是周，上着同样的课！也许是天，家校的两点一线！也许是秒，每秒我都爱着我所爱的人！老师的答案是一生！把自己的最小正周期过好，活出精彩，活出自我！周期，虽然周而复始，但也令人期待！

【设计意图】教师通过学科交叉中的周期思想，让学生宏观认识事物的循环结构并应用于生活。

四、学生反馈

课后，笔者收集了32名学生对本节课的反馈信息。超过80%的学生高度认可将数学史引入课堂，并表示对于数学学习具有很大帮助。超过70%的学生能够完整复述周期函数的定义并能运用定义判断一个具体函数是否为周期函数。在判别狄利克雷函数$f(x)=\begin{cases}1(x\in\mathbf{Q})\\0(x\in\overline{\mathbf{Q}})\end{cases}$是否为周期函数时，有50%的学生能正确判断，并能发现任何一个非零有理数均为周期函数。

本节课后，学生再次看见“周期函数”一词时，所联想到的内容大致可分为五类（见表2）。从学生的上述回答可知，学生逐渐从对周期性的直观认识过渡到对抽象性质的认识。同时，学生也对课堂中渗透的数学文化印象深刻，体会到生活与数学的联系，并体悟到一定的哲学思想。

表2 学生再次看到“周期函数”一词时的联想

类别	典型例子	占比
图像特征	重复出现、循环 往复、平移后重合	20%
具体函数	$y=\sin x$，$y=\cot x$，$y=1$	20%
抽象性质	$f(x+T)=f(x)$，$x\in D$， $f(x+n\cdot T)=f(x)$，$x\in D$，$n\in\mathbf{N}^*$	20%
数学文化	穆雷、博汉南、德累斯 顿、生活中的周期现象	25%
哲学思想	周而复始、永无 止境、无限与永恒	15%

五、结语

本节课采用重构、附加和顺应三种方式将讲解内容融入数学史。首先，周期函数概念的历史作为一条主线贯穿于始终。在情境创设环节，学生对周期现象有了初步的感性认识；在模型刻画环节，学生对周期现象的认识从时间过渡到了运动；在定性理解环节，学生从图形直观上认识了三角函数的周期性，并给出描述性定义；在概念探究环节，学生经历了从三角函数周期性的定量刻画到一般周期函数的形式化定义的过程。由此可见，本节课融入数学史的主要方式为重构式。其次，在一般周期函数定义的形成过程中，教师让三名学生各自独立地给出自己的定义，并将其与历史上三位数学家的定义进行比较，这属于附加式。最后，教师让学生对数学家的三种定义进行辨析，找出其中的缺陷或不足，这属于顺应式。

以史为鉴，学生经历周期函数概念从现象到本质、从定性到定量、从不完善到完善的自然发展过程，构建了知识之谐。数学史的融入为学生创造自行定义周期函数、穿越时空与数学家“对话”的机会，为他们提供了一个展示自己、充分

（下转第19页）

物，并可以借此走进创作文本背后的人，了解他的喜怒哀乐愁，明白他的性格、思想、个性、情感、志趣，品读他的学养、眼光、襟怀、气度。散文阅读教学，实质是建立学生的已有经验与“这一篇”散文所传达的作者独特经验的链接[5]8。目前散文教学的一个困惑，就是没有教出“这一篇”来。为此，在散文的阅读教学中，教师要牢牢抓住“这一篇”，发现“这一篇”的教学价值，通过系列驱动任务活动的设计，实现培养学生审美鉴赏与创造的核心素养的目标，全面提升学生的语文素养。

参考文献：

[1] 林崇德. 构建中国化的学生发展核心素养 [J]. 北京师范大学学报（社会科学版），2017（1）：66-73.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中语文课程标准（2017 年版）[S]. 北京：人民教育出版社，2018.

[3] 王本华. 守正创新，构建“三位一体”的语文教科书编写体系：部编义务教育语文教科书的主要特色 [J]. 语文教学通讯：初中（B）2016（9）：7-10.

[4] 约翰·D. 布兰思福特. 人是如何学习的：大脑、心理、经验及学校（扩展版）[M]. 程可拉，孙亚玲，王旭卿，译. 上海：华东师范大学出版社，2013.

[5] 王荣生. 散文教学教什么 [M]. 上海：华东师范大学出版社，2014.

[6] 王岱. 以挑战性学习任务提升学生的语文核心素养：“战国四公子”专题阅读教学案例 [J]. 语文学习，2017（3）：34-39.

（上接第 14 页）

表达的平台，让他们获得一份归属感、获得感和成就感，从而营造了探究之乐。从角终边的变化到三角函数的周期性，再到一般函数的周期性，学生经历了完整的数学抽象过程，因而数学史实现了能力之助。通过呈现历史上数学家的不完善定义，学生体会数学和数学活动的本质，树立动态的数学观，感悟独立思考、敢于质疑、追求创新的理性精神，达成了德育之效。

参考文献：

[1] 吴健. 学生对周期函数概念的理解 [D]. 上海：华东师范大学，2007.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版）[S]. 北京：人民教育出版社，2017.

[3] Keith T. An introduction to the theory & practice of plane & spherical trigonometry [M]. London：T Davison，1810.

[4] Bonnycastle J A. Treatise on plane & spherical trigonometry [M]. London：Cadell & Davies，1818.

[5] Thomson J. Elements of plane and spherical trigonometry [M]. Belfast，1825.

[6] Day J. A treatise of plane trigonometry [M]. New Haven：Howe & Spalding，1824.

[7] 欧拉. 无穷分析引论 [M]. 张延伦，译. 太原：山西教育出版，1997.

[8] Morgan A de. Elements of trigonometry & trigonometry [M]. London：Taylor & Walton，1837.

[9] Seaver E P. The formulas of plane and spherical trigonometry [M]. Boston：Sever，Francis & Co.，1871.

[10] Rider P R，Davis A. Plane trigonometry [M]. New York：D Van Nostrand，1888.

[11] Nixon R C J. Elementary plane trigonometry [M]. Oxford：The Clarendon Press，1892.

[12] Murray D A. Plane trigonometry for colleges and secondary schools [M]. New York：Longmans，Green & Company，1908.

[13] Bohannan R D. Plane trigonometry [M]. Boston：Allyn & Bacon，1904.

[14] Dresden A. Introduction to the calculus [M]. New York：H. Holt & Company.

[15] 李冶. 敬斋古今黈 [M]. 北京：中华书局，1995.

[16] 罗竹风. 汉语大词典 [M]. 上海：汉语大词典出版社，1993.