



【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之四）】

HPM 视角下“有理数的乘法”教学研究

王进敬¹，栗小妮²

(1. 上海市市西初级中学，上海 200042；2. 华东师范大学 教师教育学院，上海 200062)

【摘要】“负负得正”这一符号法则是数学上为了在数系扩充时保持运算律一致性而做出的合理规定，它本身并不能被证明，但其合理性可以借助现实模型加以解释。在课堂教学中，很多教师往往不重视“负负得正”法则的由来，也很少给予学生机会探究“负负得正”的原因。教师从司汤达的故事入手，引导学生对“负负得正”进行探究，除了让学生更深刻地理解这一法则，还体现了多方面的教育价值。

【关键词】HPM；负负得正；有理数乘法法则；教学设计

一、引言

初中阶段，学生要经历两次数系的扩充，第一次为负数和有理数。有理数乘法法则作为有理数的学习内容，是将学生已知的正整数范围内的运算法则推广到有理数范围的一个重要载体。有理数乘法法则可以让学生深化对负数、已有正数范围内运算法则和运算律的理解和运用，而如何向学生解释“负负得正”是教学的难点。

在已有的教学设计中，很多教师利用一个或两个现实模型引入有理数乘法法则，例如有的教师利用蜗牛爬行模型、水位变化模型或者归纳模型引入该法则。在教学实践中，用现实模型解释有理数乘法法则有一定难度。学生除了要弄清不同情境中正负的规定，运动中方向的确定与正负的对应，还要将静态的负数理解为一个动态的过程，这样就增加了思维的难度。因此，有的教师改编教科书中的设计，运用加法法则解释“负正得负”，再利用相反数的意义得到“负负得正”，或辅以现实模型得到或验证“负负得正”，强化

学生对该法则的理解。还有的教师通过将正整数范围内的运算律推广到有理数范围来引入有理数乘法法则，先用加法法则解释“负正得负”，再利用分配律解释“负负得正”。

有些教师试图在教学中证明“负负得正”，事实上，“负负得正”在数学上是无法被证明的。德国数学家 F. 克莱因在其《高观点下的初等数学》中告诉数学教师“不要把不可能的证明讲得似乎成立”^[1]。美国数学家和数学史家 M. 克莱因以史为鉴，预言学生在学习负数时必定会遇到困难。他曾指出，历史上大数学家所遇到的困难，恰恰也是学生会遇到的学习障碍，试图利用逻辑的冗长语言来消除这些困难是不可能成功的。从数学诞生开始，数学家花了 1000 多年才得到负数的概念，后面又花了 1000 多年才接受负数的概念，因此我们可以肯定，学生学习负数时必定会遇到困难。而且学生克服这些困难的方式与数学家大致是相同的^[2]。

因此，在教学有理数乘法法则时，教师有必

【作者简介】王进敬，中学高级教师，主要从事数学史与数学教育研究；栗小妮，华东师范大学教师教育学院博士研究生，主要从事数学史与数学教育研究。

【基金项目】上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究



要弄清以下问题 “负负得正”既然是一种“规定”，那么这种“规定”的根源何在？除了用课本上给出的运动模型进行解释，还可以采用哪些方式来解释其合理性？在历史的发展进程中，“负负得正”经历了怎样的曲折？在后续的数学学习中，怎样看待“规定”的内容？是毫无疑问地全盘接受，还是从多个角度加以质疑，并在探索中寻找问题的答案，从而获得终身学习的能力？鉴于上述问题，我们从 HPM 视角设计本节课。

二、历史素材

有关负数和“负负得正”的历史精彩纷呈，本教学设计所采用的是 19 世纪法国著名作家司汤达 (Stendhal) 在其自传中描述他学习“负负得正”的经历，以及 M. 克莱因用“负债模型”对有理数乘法法则的解释。司汤达小时候很喜爱数学，当数学教师迪皮伊先生教到“负负得正”这一法则时，司汤达希望教师能对“负负得正”的缘故做出解释。面对司汤达的提问，迪皮伊先生只是一笑而过，并不当回事，而靠死记硬背学数学的一名学生则对司汤达的疑问“嗤之以鼻”。补习学校的数学教师夏贝尔先生被司汤达问得十分尴尬，只得不断重复课程内容，说负数如同欠债，而那正是司汤达的疑问所在：一个人该怎样把 10000 法郎的债与 500 法郎的债相乘起来，才能得到 5000000 法郎的收入呢？最终，夏贝尔先生只得搬出数学家欧拉 (Euler) 和拉格朗日 (Lagrange) 的话给予解答 “这是惯用格式，大家都这么认为。”^[3] 司汤达被“负负得正”困扰了很久，最后，在万般无奈之下只好接受了它。

19 世纪，司汤达的老师未能解释“债务乘以债务等于收入”的悖论。到了 20 世纪，美国数学家 M. 克莱因成功地解决了这个难题。他声称，如果记住物理意义，那么负数的运算以及负数和正数的混合运算就很容易理解了。M. 克莱因的解释如下。

假定一人每天欠债 5 美元，而在给定日期他身无分文 (0 美元)。那么，给定日期 3 天后他欠债 15 美元，如果将 5 美元的债记为 -5，那么每天欠债 5 美元，欠债 3 天，可以用数学式子表示为 $3 \times (-5) = -15$ ；在给定日期 3 天前，他的财产比

给定日期多 15 美元，如果用 -3 表示 3 天前，-5 表示每天欠债数，那么给定日期 3 天前他的经济情况可表示为 $(-3) \times (-5) = 15$ 。

三、教学设计与实施

1. 有理数乘法法则初探

在本节课之前，学生已经学习了有理数加法法则，知道有理数加减法法则需要考虑符号和绝对值，因此，教师让学生类比加减法法则，通过例 1 中几个算式的计算，从符号和绝对值两个方面初步探讨有理数乘法法则。

例 1 计算下列各题。

① 4×3 ；② $(-4) \times 3$ ；③ $4 \times (-3)$ ；④ $(-4) \times (-3)$ 。

师：从计算结果来看，两个有理数相乘，我们应该关注哪两个方面？

生：符号和绝对值。

师：请分别说说上述 4 道题中两个因数的符号和计算结果的符号有何关系？

生：正乘正得正，正乘负得负，负乘正得负，负乘负得正。

师：“正乘正得正”是小学学过的，你能举一个生活中的实例解释一下吗？

生：妈妈每天给我 4 元钱，3 天后，我拥有 12 元。

师：仿照这个例子，你能给出 $(-4) \times 3 = -12$ 的解释吗？

生：假如规定收入为正，支出为负，每天支出 4 元 (-4)，与现在相比，3 天后 (+3) 支出 12 元 (-12)。

生：规定向右运动为正，向左运动为负。一个人从原点出发，以每小时 4 千米的速度向左运动 (-4)，3 小时后 (+3)，这个人在原点左侧 12 千米处 (-12)。

2. 探究为何“负负得正”

根据对负数的认识，学生可以很快解释“负正得负”。如何解释“负负得正”是本节课的难点，教师从让学生解释“正负得负”入手，再引入司汤达的故事，通过讲述司汤达的困惑引发学生探究和思考，最后引导学生将已经给出的模型进行扩展，解释“负负得正”，从而突破本节课



的难点。

师：前面这些例子都是先给出一个因式的现实意义，再给出另一个因式的现实意义，从而得出积所表示的意义。 $(-4) \times (-3) = 12$ 的符号说明“负乘负得正”，这是为什么呢？

（随后，教师向学生讲述了司汤达的故事，并提出问题“你能为司汤达解释他的困惑吗？”）

生：反面的反面是正面。

师：这个例子虽然有些道理，但远比不上前面同学举出的负乘正的例子具有说服力。根据前面的例子，正数与负数是两个相对意义的量，要说明负数，就要先规定正数的意义，并与参照标准做比较。在这之前，你能仿照老师和前面同学给出的例子，说明 $4 \times (-3) = -12$ 的结果吗？比如规定向右运动为正，向左运动为负，+4表示向右运动，-3只能表示时间，那么怎样规定时间的正负呢？参照标准是什么呢？

生：规定向右运动为正，向左运动为负，当下在起点，以每小时4千米的速度向右运动(+4)，3小时前(-3)在起点左侧12千米处(-12)。故 $4 \times (-3) = -12$ （如图1所示）。

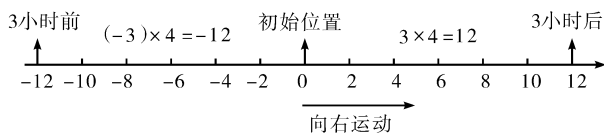


图1

师：在两个有理数的乘法中，两个因数分别有各自的正负规定，最终根据参照标准，得出乘积所表示的意义。你能根据上述知识，用文字或者数轴说明 $(-4) \times (-3) = 12$ 的结果吗？

（小组讨论交流并展示讨论结果。）

生：规定向右运动为正，向左运动为负，当下在起点，若以每小时4千米的速度向左运动(-4)，则3小时前(-3)在起点右侧12千米处(12)。故 $(-4) \times (-3) = 12$ （如图2所示）。

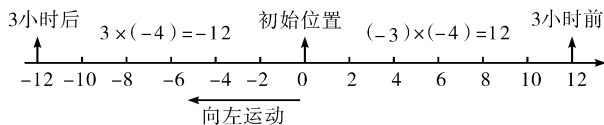


图2

师：从上述模型中，我们解释了“负负得正”的原因，那么你能解答司汤达的困惑吗？

生：根据我们的模型解释，“负负”其实包含两个层次，司汤达混淆了“负负得正”中两个“负”的层次，即法郎 \times 法郎=法郎。

师：司汤达的老师夏贝尔先生所说的“负数如同欠债”，可以解释“负负得正”吗？

生：其实夏贝尔先生找到了打开“负负得正”大门的钥匙，用欠债模型也可以解释，即每天欠债4美元表示为-4，与现在相比，-3表示3天前，那么，他的财产比现在多12美元。

师：司汤达的故事给我们什么启示？

生：我很佩服他不畏权威的质疑精神，在今后的学习中，我也要多问为什么，并努力通过各种形式解释它。

3. 归纳有理数乘法法则

在本教学环节，教师和学生根据前面的探讨一起总结有理数乘法法则。

师：你能从符号和绝对值两方面叙述有理数乘法法则吗？

生：有理数乘法法则是两数相乘，同号得正，异号得负，并把两数的绝对值相乘。

师：从有理数的符号分类来看，这个法则中还缺哪个数？

生：任何数与零相乘都得零。

师：根据这个法则，在有理数计算中，通常我们会先考虑什么再计算？

生：先确定符号，再把两数的绝对值相乘。

师：如果司汤达坐在我们的教室中，与同学们共同讨论“负负得正”，他一定会深刻理解这一知识。

4. 数学与逻辑相结合

教师从数系扩充的角度向学生解释“负负得正”，为学生在后续乘法学习中验证已有的运算律打基础。

师：数系扩充的原则之一就是运算律的无矛盾性，根据这一原则，我们也可以从逻辑上解释“负负得正”。原有数系的运算律如下。

① $0+a=a, 0 \cdot a=0$

② 交换律: $a+b=b+a; a \cdot b=b \cdot a$



③ 结合律: $a+(b+c)=(a+b)+c; a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

④ 分配律: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

这些运算律在正数计算中起着非常重要的作用,当数集扩充到有理数集时,要保证它们依然成立,即运算律的无矛盾性。依据上述运算律,可以得到下面的算式。

$$\begin{aligned} & (-1) \times (-1) \\ &= (-1) \times (-1) + 0 \times 1 \\ &= (-1) \times (-1) + [(-1) + 1] \times 1 \\ &= (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 1 \\ &= (-1) \times [(-1) + 1] + 1 \times 1 \\ &= (-1) \times 0 + 1 \times 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

从上述过程来看,要使运算律在有理数集中成立,“负负得正”必须成立。总之,“负负得正”从现实模型中产生,最终又回到数学抽象。

教师和学生一起总结本节课的内容:有理数乘法法则无法被证明,是一种“规定”,给出这种“规定”的原则是使原有的运算律保持不变,只有这样才能使数学的发展建立在原有的基础上。

四、课后问卷调查

课后教师对31名听课学生进行了问卷调查。对于“你以前了解为什么‘负负得正’吗?”这个问题,有18名学生知道“负负得正”,但不知道原因,没有深入想过,也没有质疑过对错,只是接受了这个结论;其中有的学生认为教师教的都是对的,“负负得正”是公理,是严谨而准确的,没必要质疑。有12名学生表示了解过,了解的途径有实际生活、有关资料、父母讲解等。有1名学生表示了解过,也质疑过,但最终认为“负负得正”是一个“定义”,记住即可。

学生认为,从现实模型与数学逻辑两个角度明确“负负得正”,与单纯地用“规定”来说明“负负得正”相比有以下好处:现实模型更形象,逻辑语言更严谨;让大家理解“负负得正”的根本原因;让人心服口服,而不是把知识强加于人;不仅对知识的理解更深刻,记忆更清晰,还能给人以启示,让我们更加热爱数学;拓宽视野;等等。

对于“作家司汤达的故事给你什么启示”这个问题,有22名学生提到了司汤达的质疑精神很值得学习,但质疑后应该有探究问题的精神和能力。也有学生说,思考问题时一个人是不够的,需要团队合作讨论才能解决;理解问题时要有层次感。

对于印象最深的环节,有的学生对大家一起讨论用各种现实生活的例子来解释“负负得正”印象最深,认为话题开放,大家思维踊跃,理解问题的角度多样,让人更好地理解并记住这个法则,感受到了数学的奥妙。有的学生对司汤达的故事印象深刻,认为故事很有趣,让自己知道不懂就要问,做题时要注意细节,而且如果司汤达注意到单位问题,说不定就可以解决困惑了。有的学生认为,司汤达的困惑很让人震惊,乍一看好像是对的,但引人深思。有的学生对用逻辑运算解释“负负得正”印象深刻,认为只有在这个环节才真正地从数学的角度理解该法则,感受到数学的美妙,显示了数学的理性表达。还有的学生对教师关于“负负得正”思路的引导和用画数轴解释印象深刻。

五、教学反思

“负负得正”这一符号法则是数学上为了在数系扩充时保持运算律一致性而做出的合理规定,它本身并不能被证明,但其合理性可以借助现实模型加以解释。在课堂教学中,教师往往不重视“负负得正”法则的由来,也很少给予学生机会去探究为什么“负负得正”。究其原因,一是教师对该法则缺乏深刻的理解;二是教师往往认为,学生只要记住该法则并会运用于有理数的运算即可。

在本节课中,教师从司汤达的故事入手,引导学生对“负负得正”进行探究,除了让学生更深刻地理解这一法则,还体现了多个方面的教育价值。

第一,质疑与探究。学生已经知道“负负得正”,但将其视为理所当然。司汤达的故事不仅让学生感悟质疑的精神,而且让他们明白处处留心皆学问的道理。

第二,说理与求真。“负负得正”是数学上的一种人为规定,但这种规定并非数学家随心所欲做出的,而是有其合理性。探究规定背后的合



理性，可以让学生体会说理的重要性，感悟求真的科学精神。

第三，倾听与交流。课堂上，每一位学生都对“负负得正”做出自己的解释，每一位学生又都是倾听者，他们都能从他人的解释中获得思想的启迪，从而体会到交流、合作的重要意义。

第四，困难与困惑。历史名人司马迁在学习数学的过程中亦遇到困惑，这个史实告诉学生，人非圣贤，孰能无惑，从而让他们学会客观地看

待自己学习过程中所遇到的困难与困惑。

参考文献:

[1] 克莱因 F. 高观点下的初等数学 (第1卷) [M]. 舒湘芹, 陈义章, 杨钦梁, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2008.

[2] KLINE M. Logic versus pedagogy [J]. American mathematical monthly, 1970 (3): 264-282.

[3] 斯丹达尔. 斯丹达尔自传 [M]. 周光怡, 译. 南京: 江苏文艺出版社, 1998.

(上接第9页)

鼓励质疑。课堂教学是师生对话、生生对话、与作者对话、与编者对话的过程。所谓对话，就意味着思想的交流，同时也意味着对话者双方地位的平等。

比如，学习“角的认识”时，学生可能会对“延长角的两条射线，而这个角的大小不变”产生疑惑。教师要鼓励学生把心中的疑惑表述出来，进而指出“角的大小指向的是张开的角度大小，与边的长短无关”。教学苏教版语文三年级下册的《恐龙》一课中有关“梁龙”的一句，“梁龙的身体很长，从头到尾足有二十多米，走起路来，好像是一架移动的吊桥”。教师要采用对比的方法，让学生体会在数字法说明以后，为何还要采用打比方的方法进一步说明，并由此引申，让学生自主发现文中类似的强调说明的写法。

创意地学依赖于创意地教。作为以上三项原则的必要延伸，笔者提出以下开展创意学习的三点具体建议。

一要大力开展绘本阅读教学，充分发挥绘本在培养学生想象力，提供创意学习空间上的独有之用。绘本是用图画和文字讲述故事的儿童文学形式，语言简洁生动，浅显易懂，有助于提高学生的语言表达能力，提升学生的语言运用能力。它的内容不仅蕴含思想的美、形式的美、语言的美，更有情感上的美，为儿童文学素养的提升，创意学习品质的形成，提供广阔的平台。

二要十分重视综合实践活动课程的教学工作。新课程改革最大的亮点之一，就是在国家层面开设综合实践课程。综合实践课程小学阶段的四大具体目标之一就是“创意物化”。这一目标蕴含了丰富的创意学习的元素。

三要关注童诗教学。有计划地把童诗教学纳入校本教材的规划当中，充分发挥诗歌对于儿童情感熏陶、想象力的培养，以及在创意学习上的重要作用。

以上三点具体建议，特别是第一点和第三点，要在校本课程中加以落实。要在创意学习理念的指引下充分整合创意活动课程，坚持“学”为第一、“教”是为了“学”的儿童主体思想，以此促进儿童创意学习素养的发展。

总而言之，儿童是创意学习的主体和目标，儿童的创意学习素养要在创意教学活动中渐次培养，要把创意教育的理念和顺应小学生身心发展的教育实践有机融合。开展创意学习需要我们在思想上有充分的认识，在行动上扎实的推进。基于儿童立场是我们的最佳路径和必然选择。

参考文献:

[1] 吴清山. 台湾: 创意教学的重要理念 [J]. 基础教育参考, 2003 (12): 43-44.

[2] 谢英. 儿童致远 创意世界: 支持儿童创意学习的课程建构 [J]. 江苏教育, 2017 (42): 7-8.

[3] 黄蕙吟. 创意学习课程 [M]. 北京: 现代出版社, 2010.