【编者按】本刊自2014年起陆续刊登了华东师范大学汪晓勤教授团队开发的38个中学HPM课例,引起了积极、热烈的反响。本期继续呈现刘志霞等老师开发的课例。希望有更多的教师加入HPM的研究中来,可以开发新的课例,也可以对已有的课例进行分析、评价与改进——之前的课例以新授课(概念课或命题课)、单一课时设计为主,接下来希望有更多的复习课(习题课)、多个课时(单元整体)设计。

“向量的坐标表示及其运算”:以重构式融入数学史*

刘志霞[1],刘思璐[2],沈中宇[3]

(1.上海交通大学附属中学闵行分校,200240;2.华东师范大学教师教育学院,200062;3.华东师范大学数学系,200241)

摘　要:向量的坐标表示及其运算的发展经历了漫长的历史过程,可以将其分为“速度的平行四边形法则”“力的合成与分解”“运动的直角坐标表示”“向量坐标表示的出现”“向量坐标表示的完善”五个阶段。这一内容的教学,可以采用重构的方式对以上历史阶段进行改编,让学生自然地经历向量的坐标表示及其运算出现的过程;同时,利用附加式的HPM微视频渗透数学文化。课后反馈表明,这样的教学实现了“知识之谐”“探究之乐”“能力之助”“文化之魅”“德育之效”等教育价值。

关键词:HPM　向量的坐标表示　向量的坐标运算　重构式

向量理论具有深刻的数学内涵和丰富的物理背景,既是代数研究对象,也是几何研究对象,是沟通几何与代数的桥梁。学生通过对向量的学习,不仅能掌握解决几何问题的有力工具,而且能发展对数量和运算关系的认识,为将来高等数学中线性代数的学习提供直观模型。

“向量的坐标表示及其运算”是沪教版高中数学二年级第一学期第8章“平面向量的坐标表示”第1节的内容。教材首先介绍基本单位向量;然后给出位置向量的正交分解;接着给出任意向量的正交分解,从而定义任

意向量的坐标表示；最后讲解向量的坐标表示及其运算。本节课的教学，需要引导学生从“形”的角度过渡到“数”的角度对向量进行研究，充分体现向量集“数”和“形”于一身的特点。如何让学生自然地完成过渡，是本节课教学的重难点之一。

英国数学史家福韦尔（J. Fauvel，1951—2000）总结了数学教学中运用数学史的各种原因，其中包括增加学生的学习动机，提供探究的机会，给数学以人文的一面，改变学生的数学观等。实践表明，数学史融入数学教学具有“知识之谐”“探究之乐”“方法之美”“能力之助”“文化之魅”“德育之效”等多元的教育价值。因此，我们可以从 HPM 的视角来设计和实施“向量的坐标表示及其运算”的教学，借鉴历史上向量的坐标表示及其运算的发展过程，通过重构历史，让学生自然地经历向量的坐标表示及其运算的形成过程，在富有文化的课堂氛围中自主探究。

据此，我们拟定了如下教学目标：(1)了解单位向量、向量的正交分解及坐标表示，理解向量的坐标概念，理解向量的坐标表示与正交分解之间的关系；(2)会用坐标表示向量，掌握向量的坐标运算并会初步应用，感受向量坐标的意义，体会数形结合的数学思想；(3)了解向量坐标表示的发展历史以及不同时空数学家的贡献，形成动态的数学观。

一、历史材料梳理

向量的坐标表示及其运算的发展经历了漫长的历史过程，可以将其分为如下五个阶段：

（一）古希腊时期：速度的平行四边形法则

速度的平行四边形法则是向量理论的重要起源。古希腊的亚里士多德（Aristotle，公元前 384—前 322）是第一个具有向量意识的人，在其《物理学》一书中给出了速度的平行四边形法则：“一个物体以一定比率移动时，该物体一定沿一条直线运动，这条直线是由两条给定比率的直线形成的平行四边形的对角线。”在同一时代，亚历山大的海伦（Heron，约 10—75）对亚里士多德的上述观点给出了相关的几何证明。但是，当时只有向量的合成，并没有出现向量合成的逆运算——向量的分解。因此尚不具备向量坐标表示的基础。

（二）16 世纪—17 世纪：力的合成与分解

到了 16、17 世纪，平行四边形法则的观点有了详细明确的总结。荷兰数学家斯蒂文（Stevin，1548—1620）在静力学问题中应用了平行四边形法则，伽利略（Galileo，1564—1642）也清楚地叙述了这个定律。之后，牛顿（Newton，1643—1727）在其《自然哲学之数学原理》一书中给出并证明了有关力的合成与分解，从而标志着向量分解的出现，向向量的坐标表示迈出了一步。尽管牛顿经常在他的力学著作中使用力的平行四边形法则，但他并没有真正意识到自己是在做“向量的加法”运算，没有把这种力学中的具体运算抽象成数学概念。因此，在他的思想中可能并没有形成代数运算的观念。

（三）18 世纪：运动的直角坐标表示

18 世纪之前，向量都是作为物理量出现的。在研究物体的运动规律时，为了简便运算，欧拉（Euler，1707—1783）首次将向量的分解放入笛卡儿坐标系中考虑。在研究刚体的运动规律时，欧拉明确指出利用笛卡儿直角坐标系来表达运动所起的关键作用：“一个运动总可以用无穷小的方式分解为三种运动，它们中的每一个都有自己的速度。总起来，不仅考虑这点的速度大小，而且有它的方向。

这在计算中是最有用的,因为对不在一个平面上的运动,由此可以减轻关于点的轨迹的曲率的大量烦人的计算……”他认为,笛卡儿直角坐标是处理向量的最自然的工具。可以看出,在欧拉所在的时代,用点的坐标表示空间向量的观念已经存在。

(四)18 世纪末—19 世纪:向量坐标表示的出现

到了 19 世纪,向量迅速发展。韦塞尔(Wessel,1745—1818)为了解析地表示有向线段的方向,在其著名的文章《方向的解析表示》中写道:“这个表示试图处理我们怎样解析地表示方向这个问题,即怎样在一个包含未知线段和另外已知线段的方程里,使得未知线段的长度和方向可以同时表示出来。”可见,韦塞尔的主要兴趣是几何方法的创造,即怎样把平面上的有向线段(平面上的向量)用代数的形式解析地表示出来。他通过引入两个正交的单位向量来研究平面中的向量,使向量就这样自然地进入了数学中。之后,哈密顿(Hamilton,1805—1865)发明了四元数,用以表示空间向量。他也是第一个用“向量”这个词表示有向线段的数学家,第一次赋予了“向量”这个词更一般的意义。

(五)20 世纪:向量坐标表示的完善

进入 20 世纪之后,吉布斯(Gibbs,1839—1903)和威尔逊(E. B. Wilson,1879—1964)创立了现代的向量系统。1913 年,随着威尔逊的《向量分析》这一较早专门论述向量理论的教科书的正式出版,完善的向量分析系统开始出现,向量的分解定理也进一步完善,成为向量坐标表示及其运算的基础。

二、教学设计与实施

本节课主要采用重构的方式对以上历史阶段进行改编,让学生自然地经历向量的坐标表示及其运算出现的过程;同时,利用附加式的 HPM 微视频渗透数学文化。

(一)引入实例,激发冲突

学生尝试解决以下探究任务:

学校组织在公园进行定向越野活动,设定若干关卡。每个同学都需要按照指令到达指定地点,以完成任务。如图 1,若甲同学得到的指令为:从集合地点 O 出发,先沿北偏东 30° 方向走 30 米至点 A,再沿正东南方向走 40 米至点 B,最后沿北偏东 60° 方向走 10 米至点 C。则该同学的最终位置 C 在哪里?

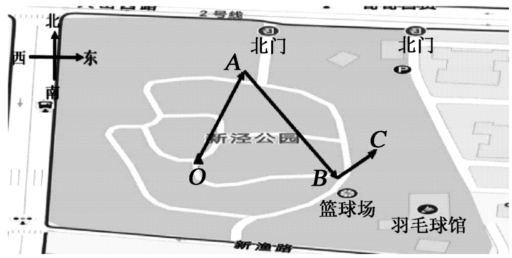

图 1

绝大部分学生在解决这一任务时遇到了困难。

[**设计意图**:历史上,向量主要作为物理量出现。在研究物体的运动规律时,为了简便运算,欧拉才将其放入坐标系中考虑。本环节基于这段历史,从简便运算的角度出发,考虑学生的认知基础,设置定向越野的问题情境,引出向量坐标表示的必要性。]

(二)探究实例,尝试定义

教师先带领学生回忆物理中的向量,指出向量起源于物理;然后带领学生回忆初中所学的向量相关内容;接着回到“定向越野”任务中,带领学生进行探究——

师 求甲同学的最终位置 C,即确定位移$\overrightarrow{OC}$。$\overrightarrow{OC}$可以看成哪几个向量加法运算的结果?

生 位移$\overrightarrow{OC}$可以看成位移$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$的和向量。

师 那我们一个个来研究。先研究位移$\overrightarrow{OA}$。

在物理学中，我们常把位移$\overrightarrow{OA}$正交分解。如何正交分解？

生 （出示图2）位移$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$。

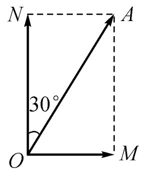

图 2

师 位移$\overrightarrow{OA}$正交分解为水平向右的位移$\overrightarrow{OM}$和竖直向上的位移$\overrightarrow{ON}$。这两个位移有公共起点O，并且方向互相垂直。为了简便计算，你想到了什么？

生 以O为原点建立平面直角坐标系，放入平面直角坐标系中研究。

师 很好！那么位移$\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$的大小分别是多少呢？

生 $|\overrightarrow{OM}|=15$，$|\overrightarrow{ON}|=15\sqrt{3}$。

师 $\overrightarrow{OM}$代表向右走了15米，$\overrightarrow{ON}$代表向上走了$15\sqrt{3}$米。位移的大小是15米，代表15个单位长度。那么，位移的方向怎么表示呢？能否引进一个既有大小又有方向的单位来表示$\overrightarrow{OM}$呢？

生 引入x轴正方向上的基本单位向量$\boldsymbol{i}$，则$\overrightarrow{OM}=15\boldsymbol{i}$；引入$y$轴正方向上的基本单位向量$\boldsymbol{j}$，则$\overrightarrow{ON}=15\sqrt{3}\boldsymbol{j}$。

师 这样，就有位移$\overrightarrow{OA}=15\boldsymbol{i}+15\sqrt{3}\boldsymbol{j}$。它的系数可以表示成一对有序实数对$(15,15\sqrt{3})$，这个有序实数对就是直角坐标系下终点$A$的坐标。我们能否把这个坐标定义为向量的坐标呢？

生 应该可以。

师 那么，接下来我们学习如何严格地定义向量的坐标表示。

［**设计意图：**历史上，向量的坐标表示基于牛顿对力的合成与分解的研究；在其基础上，欧拉将其与直角坐标系相联系；之后，韦塞尔引入了单位向量，使得向量的坐标表示得以完成。本环节基于这段历史，从向量的正交分解出发，与直角坐标系建立联系，由单位长度类比推出单位向量，最终自然引出向量的坐标表示。］

（三）重构历史，生成定义

教师引导学生将刚刚研究的特殊情形推广到一般——

师 （同步板书：位置向量）对平面中的任意一个向量，我们把它的起点放到坐标原点，把这个向量称为位置向量。任何一个位置向量$\overrightarrow{OA}$都可以通过正交分解，变为水平方向的向量$\overrightarrow{OM}$和竖直方向的向量$\overrightarrow{ON}$。（同步板书：基本单位向量）在平面直角坐标系内，方向分别与x轴和y轴的正方向相同的两个单位向量叫作基本单位向量，分别记为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$。从而$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，即向量$\overrightarrow{OA}$能够表示成两个相互垂直的向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$分别乘以实数后组成的和式，该和式称为$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$的线性组合。（同步板书：向量的正交分解）这种向量的表示方法叫作向量的正交分解。任意一个位置向量$\overrightarrow{OA}$在正交分解之后，系数构成的有序实数对(x,y)就是位置向量$\overrightarrow{OA}$的终点A的坐标。（同步板书：向量的坐标）我们就把这个有序实数对(x,y)定义为位置向量$\overrightarrow{OA}$的坐标，记作$\overrightarrow{OA}=(x,y)$。向量坐标的定义合理吗？

（学生迟疑。）

师 考虑向量的坐标表示是否合理，首先要看它是否存在，其次要看它是否唯一，即一个向量和它的坐标是否一一对应。首先，向量的坐标存在吗？

生 根据平行四边形法则可以正交分解，因

此是存在的。

师 其次，这个有序实数对唯一吗？一个向量会不会有两个不同的坐标？

生 不会。

师 为什么不会？

生 可以反证。已知$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，不妨再设$\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$（$x_1$与$x$，$y_1$与$y$不全相等），则有$(x_1-x)\boldsymbol{i}+(y_1-y)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$。若$x_1-x\neq0$，则$\boldsymbol{i}=-\dfrac{y_1-y}{x_1-x}\boldsymbol{j}$，这与$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$矛盾。

师 经过严格的数学推理证明，向量的正交分解是唯一的，因此正交分解的系数是唯一的，所以它的坐标是唯一的。所以这个定义，我们可以大胆地给出。（再出示上文图1）那么，“定向越野”问题中向量$\overrightarrow{AB}$是位置向量吗？

生 不是。

师 那我们该如何用坐标表示它？

生 以A为原点建立平面直角坐标系。

生 把向量$\overrightarrow{AB}$平移到以原点O为起点。

师 前一位同学的做法是可行的，但是建立了两个坐标系，比较复杂。后一位同学的想法很好：向量是自由向量，和它的起点在哪里没有关系，所以，平面里的任意向量都能平移为一个位置向量。因此，大家可以猜一猜：任意向量的坐标怎么定义呢？

生 因为位置向量的坐标存在且唯一，而平面内任一向量$\boldsymbol{a}$都有与它相等的位置向量$\overrightarrow{OA}$，所以$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，有序实数对$(x,y)$就称为向量$\boldsymbol{a}$的坐标，记作$\boldsymbol{a}=(x,y)$。

师 本节课，我们用了15分钟的时间给出了向量的坐标表示。但是，在数学历史长河中，几代数学家不懈地努力了近两千年，才有了我们今天熟悉的向量理论。下面我们来看一个微视频，欣赏向量坐标表示的历史。

（教师播放微视频，主要内容如图3。）

师 我们应该珍惜自己生在这个美好的时代，坐在宽敞明亮的教室里，手里有一个计算器，领略着古人几千年的研究成果。我们不仅仅要好好学习这些理论知识，而且要向这些数学家们学习，学习他们探索、钻研的精神。

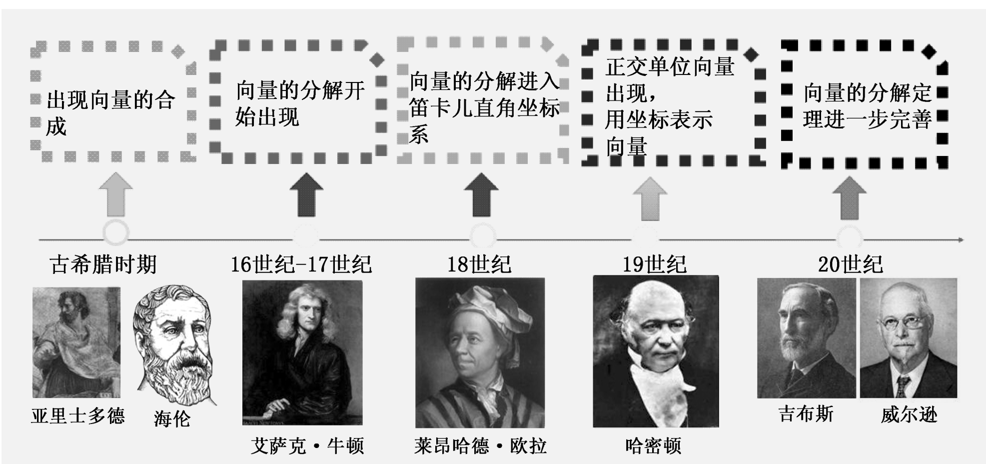

图3

[**设计意图**:历史上,进入20世纪之后,数学家们开始讨论向量的分解定理,向量的坐标表示才趋于完善。本环节基于这段历史,引发学生讨论向量坐标表示的存在性和唯一性,进一步将向量的坐标表示建立在严谨的数学基础之上;同时,利用微视频让学生了解向量坐标表示的发展历史,感知向量坐标化的意义及数学发展的规律。]

(四)解决实例,探究运算

教师带领学生根据向量的坐标表示继续解决"定向越野"任务,并在且引导学生进一步探究坐标表示下的向量运算——

师 我们继续回到刚才的"定向越野"问题。首先,请大家给出向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$的坐标。

生 $\overrightarrow{OA}=(15,15\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AB}=(20\sqrt{2},-20\sqrt{2})$,$\overrightarrow{BC}=(5\sqrt{3},5)$。

师 其次,向量$\overrightarrow{OC}$是这三个向量的和向量,那么能由这三个向量的坐标给出向量$\overrightarrow{OC}$的坐标吗?

生 能!只要把向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$坐标的对应分量相加就可以了。

师 你有很好的数学直觉!请问如何推理?

生 刚才我们的向量坐标是从向量的正交分解得到的,所以,可以回到向量的正交分解:$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$,则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}$,是$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的正交分解,我们可以把系数$(x_1+x_2,y_1+y_2)$定义为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的坐标。

师 很好,我们给他鼓鼓掌,他有很好的数学直觉和逻辑推理能力!我们知道,在初中,向量的加法运算是通过什么法则得出来的?

生 通过平行四边形法则或三角形法则,作图得出来的。

师 那么,在学习了向量的坐标表示之后,向量的加法运算就能写成对应的坐标的运算,使向量运算完全代数化,将数与形紧密结合起来。而学习了向量的坐标表示及其运算之后,我们也顺利解决了本节课一开始提出的"定向越野"问题。

(教师进一步带领学生总结向量的减法、数乘运算的坐标表示。)

[**设计意图**:历史上,随着完善的向量分析系统的建立,向量的运算也进一步实现了解析化。本环节基于这段历史,首尾呼应,在向量概念解析化的基础上,将向量的运算也解析化,完成向量分析系统的建立。]

(五)练习巩固,小试牛刀

教师通过如下两个练习,让学生进一步熟悉向量的坐标表示及其运算。

例1 如图4,通过多种方法写出向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的坐标。

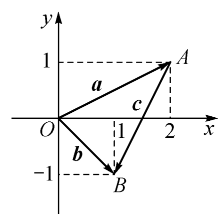

图4

例2 已知点O、A、B的坐标分别为$(0,0)$、$(1,2)$、$(4,5)$。

(1)如果四边形$OABC$是平行四边形,求点C的坐标。

(2)如果$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$,四边形$OABP$能否为平行四边形?若能,求出相应的$t$值;若不能,请说明理由。

[**设计意图**:这一环节的两个练习分别强调向量从形到数和从数到形的转化,让学生认识到,在将向量解析化的同时,也要注重向量的直观性,强化数形结合的思想。]

（六）总结提升，探讨意义

教师引导学生总结本节课的内容，并交流学习心得：在知识方面，这节课通过对向量的坐标表示及其运算的探究性学习，对向量的表示从“有向线段”走向“坐标”，对向量的运算从“几何运算”走向“代数运算”，对向量的认识从“形”走向“数”。在情感方面，认识到了向量的坐标表示及其运算是几千年来数学一步步发展和抽象的结果。这样的发展和抽象，扩大了向量解决问题的范围，并由此建立起向量与代数、几何、三角的紧密联系，为后续学习解析几何打下了基础。

最后，教师让学生读一首小诗《我的向量》（大罕），感受向量集数与形于一身的魅力：

给你一个方向，你就成为我的向量。给你一个坐标系，你就在我心空飞翔。繁复的几何关系，变成纯代数的情殇。优美的动态结构，没有人情冷暖世态炎凉。哪怕山高路远，哪怕风雨苍茫，不管起点在哪儿，你始终“在水一方”。啊，我的向量，你是一股力量，融进了我的身体，在我的血管里，静静地流淌！

［**设计意图**：历史上，随着向量分析系统的建立，向量逐渐成为解决各类数学问题的有力工具。本环节从向量的特点出发，将向量与各个数学分支相联系，为其后向量在数学学习中的应用埋下伏笔。］

三、学生反馈

课后，我们搜集全班44名学生对本节课的反馈信息——

86.4％的学生听懂了本节课的内容，95.5％的学生喜欢本节课中数学史的融入方式。

学完本节课后，有关“向量”，学生会想到的关键词有“力”“速度”“坐标系”“正交分解”“单位向量”等。

对于为什么要将向量放到坐标系中研究，52.3％的学生认为方便计算，13.6％的学生认为便于学习研究，11.4％的学生认为体现了从形到数，其余学生的回答有“可以更加直观地看出向量的变化”“数形结合”等。

关于本节课中向量坐标表示的历史对学习的帮助和启示，学生的典型回答有：今天一节课的内容是古人几千年智慧的结晶；学习数学家刻苦钻研、求真务实的精神；应该多提一些关于数学的历史，从古代数学家的视角来理解，扩充背景知识与思想；让数学变得有意思。

对于这节课中印象最深的内容，学生的典型回答有：《我的向量》这首诗充满文艺气息，感情至深，新颖有趣；向量的历史是古人智慧的结晶，体现了数学发展史上数学家的不易与艰辛；向量坐标表示后运算方便；用坐标表示向量，完成由形到数的转化。

课后访谈表明，学生对于第一次在数学课堂中深入接触数学史，感觉到比较新鲜，知道了向量坐标表示的源头；通过对数学发展史的了解，感受到其对学习的帮助，并且认为数学史的融入活跃了课堂的气氛。

四、教学反思

本节课主要采用重构式并辅以附加式融数学史于课堂教学中。通过重构式设计整节课的探究活动，根据向量坐标表示的历史引导学生从初中的几何角度学习向量，转为高中的代数角度探究向量，让学生亲身经历向量从正交分解到进入直角坐标系再到坐标表示的过程。通过附加式对之前探究过程中蕴含的数学史知识和思想进行总结和概括，让学生清晰地看到向量坐标表示及其运算的历

史发展脉络。

从数学史的多元教育价值来看，本节课从学生的已有认知出发，引导他们经历不同阶段向量发展的过程，从中逐步抽象出向量的坐标表示，领略向量坐标表示及其运算的必要性和合理性，构建了“知识之谐”。通过重构历史的发展过程，引导学生探求如何进行向量的坐标表示并证明其唯一性，再带领学生解决实例和例题，让学生感受向量坐标表示的意义和价值，成为课堂的主人，营造了“探究之乐”。从具体情境引入，引导学生逐步抽象出数学问题，并通过推理和计算解决问题，培养了学生的数学抽象、逻辑推理、数学计算等素养，达成了“能力之助”。播放关于向量坐标表示历史的微视频，让学生了解不同时空数学家的贡献，凸显人文元素，展示了“文化之魅”。让学生明白向量的坐标表示经过历史上几千年的发展，是不同数学家不懈努力的智慧成果，激励其在今后的学习中勇于探索数学真理，培养动态的数学观，彰显了“德育之效”。

---

* 本文系汪晓勤教授团队开发的 HPM 案例之一，也是华东师范大学 HPM 工作室开发的系列课例之一。

参考文献：

[1] 李振雷. 平面向量中几个概念的教学引入[J]. 数学通报，2014(3).

[2] 陶可. 思维的全新视角 教学的最佳契机——“平面向量”教学之思考[J]. 中学数学教学参考，2002(7).

[3] 章建跃，陶维林. 概念教学必须体现概念的形成过程——“平面向量的概念”的教学与反思[J]. 数学通报，2010(1).

[4] 徐新民. “平面向量的坐标运算(1)”教学设计与反思[J]. 中学数学月刊，2010(10).

[5] Fauvel, J. Using History in Mathematics Education[J]. For the Learning of Mathematics, 1991(2).

[6] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics[J]. Science & Education, 2017(7—9).

[7] Heath, T. L. A History of Greek Mathematics[M]. Oxford: Clarendon Press, 1921.

[8] 〔英〕伊萨克·牛顿. 自然哲学之数学原理[M]. 王克迪，译. 西安：陕西人民出版社，2001.

[9] Euler, L., Röse, A. F., Karsten, W., Johann Gustav. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus qui in huiusmodi corpora cadere possunt accommodata[M]. Rostochii: Litteris et impensis A. F. Röse, 1765.

[10] Wessel, C. On the Analytical Representation of Direction[M]. Copenhagen: C. A. Reitzels Forlag, 1999.

[11] Gibbs, J. W., Wilson, E. B. Vector Analysis[M]. New York: C. Scribner's Sons, 1913.