第30卷第1期
2003年1月
浙 江 大 学 学 报(理学版)
Journal of Zhejiang University(Science Edition)
Vol. 30 No. 1
Jan. 2003

17～19世纪法国数学家的圆周率初等研究与刘徽的割圆术

汪晓勤
(华东师范大学 数学系 上海 200062)

摘 要:17～19世纪法国数学家发展了圆周率的古典计算方法,给出了等周法、等积法、圆周法、面积法,4种方法无一例外地从两边逼近圆周率.从中未能获得圆周率的加速方法;而刘徽利用了只从一侧逼近的割圆术获得了超越时代的加速方法.因此割圆术更具优越性.另一方面,利用法国数学家的结果,可以简易地给出刘徽加速方法的证明.本文研究的目的是证明这样一个事实:中西数学的交流是互惠互利的.

关 键 词:圆周率;等周法;等积法;周长法;面积法;割圆术
中图分类号:O11 **文献标识码**:A **文章编号**:1008-9197(2003)01-001-06

WANG Xiao-qin(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)
Elementary studies on π in France in the 17th-19th centuries and LIU Hui's cyclotomic rule. Journal of Zhejiang University(Science Edition), 2003,30(1):1～6
Abstract: In the 17th-19th centuries, French mathematicians set forth four elementary methods of computing the number π: methods of perimeters, of areas, of isoperimeters and of equal areas, all of which approximate π from two sides. Compared with these methods, LIU Hui's cyclotomic rule, which approximates π from one side, can lead us to the extrapolate method, and so is superior. The studies made in this paper conclude that mathematical exchange between China and the West is mutually beneficial.

Key words: The ratio of the circumference to the diameter; method of perimeters; method of areas; method of isoperimeters; method of equal areas; cyclotomic rule

众所周知,化圆为方(即求圆面积)是一个十分古老的问题,它等价于求圆周长与直径的比值——圆周率.一般地,数学史家将计算机出现之前的圆周率历史分为3个时期[1]:牛顿发明微积分(1666年)之前的初等几何方法时期、微积分产生后到兰伯特(J. H. Lambert, 1728～1777)证明π为无理数(1767年)之前的分析方法时期、兰伯特之后对π性质的研究时期.上述分期似乎意味着第2时期的分析方法出现之后,古典方法退出了历史舞台.实际上,在有关数学史著作的圆周率史专题里,几乎未见有对初等方法在17～19世纪发展状况的介绍[2,3].然而,历史并非如此.17～19世纪,古典方法仍然为欧洲数学家们,特别是法国数学家们所普遍关注,并为他们所进一步发展.

1 法国数学家对古典方法的发展

17世纪以前,计算π的初等几何方法有两种.一种是直接利用圆周长公式$C=2\pi R$,求圆内接和外切正多边形边数倍增时的周长(圆的直径常常取为1);另一种则是直接利用圆面积公式$S=\pi R^2$,求圆内接和外切正多边形边数倍增时的面积(圆的半径常常取为1).古希腊数学家阿基米德(Archimedes,前287～212)用前一方法获得著名结果$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$,而中国数学家刘徽(公元3世纪)则用后一方法获得$\pi=\frac{157}{50}$和$\pi=\frac{3927}{1250}$,但他只利用了圆内接正多边形,并使用了超越时代的加速

收稿日期:2001-05-31.
基金项目:上海市重点学科建设项目;中国博士后科学基金资助项目.
作者简介:汪晓勤(1966-),男,浙江大学数学系博士后,现为华东师范大学数学系副教授,主要从事数学史和中西数学交流史研究.

技术.

17世纪,法国著名数学家笛卡儿(R. Descartes,1596～1650)提出逼近圆周率的等周正多边形方法,这个方法基于

定理1(等周法) 设R_n和r_n分别为正n边形的外接圆和内切圆半径,R_{2n}和r_{2n}为等周的正$2n$边形的外接圆和内切圆半径,则有$r_{2n}=\dfrac{R_n+r_n}{2}$,$R_{2n}^2=R_n\cdot r_{2n}$.

而等周圆的半径为$R=\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$,因而可得圆周率值.笛卡儿没有给出上述定理的证明,事实上,如图1所示,设AB是正n边形的一条边,$OA=R_n$,$OD=r_n$,EF是等周的正$2n$边形的一条边,$OE=R_{2n}$,$OG=r_{2n}$.则$EF=\dfrac{1}{2}AB=AD$,$\angle AOC=\angle EOF=\dfrac{\pi}{n}$,$\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{AD}{R_n}$,$\cos\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{r_n}{R_n}$,$\sin\dfrac{\pi}{2n}=\dfrac{EF}{2R_{2n}}$,$\cos\dfrac{\pi}{2n}=\dfrac{r_{2n}}{R_{2n}}$.故利用正、余弦倍角公式

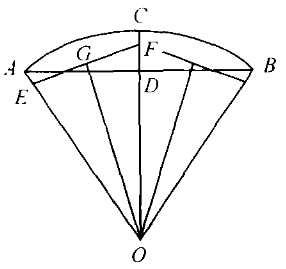

图1

Fig.1

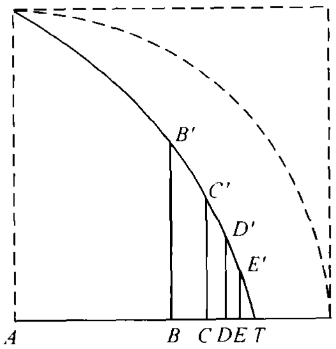

图2

Fig 2

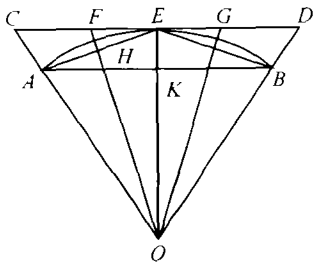

图3

Fig.3

$$\sin\frac{\pi}{n}=2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n},$$

$$\cos\frac{\pi}{n}=2\cos^2\frac{\pi}{2n}-1.$$

即得定理1.

19世纪初,上述方法已被欧洲数学家们遗忘.1813年,德国数学家许瓦茨(J. Schwarz,?～1813)在其几何著作中重新提出该方法,自此被称作许瓦兹方法.直到25年后,法国数学家泰尔凯(O. Terquem,1782～1862)才发现上述方法并非许瓦茨首创.实际上,欧拉(L. Euler,1707～1783)早在1763年的一篇论文中已经介绍过笛卡儿的发现[4].欧拉在论文中还对笛卡儿的方法作了一个注解,给出定理1的

推论 如图2所示.设AB、AC、AD、AE、…分别是等周正四边形、正八边形、正十六边形、正三十二边形、…的内切圆半径,在B、C、D、E、…上引垂线BB'、CC'、DD'、EE'、…,长度分别等于相应正多边形边长之半.则B'、C'、D'、E'、…在同一割圆曲线上,设该曲线与AB的交点为T,则AT就是等周圆的半径.

事实上,若正四边形边长为1,则易知推论中的割圆曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{2\theta}{\pi\sin\theta},$$

因此

$$AT=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta}{\pi\sin\theta}=\frac{2}{\pi}.$$

17世纪欧洲数学家们对于圆内接和外切正多边形逼近圆面积的做法并不陌生,但没有人对圆内接和外切正多边形以及二倍边数的相应两个正多边形之间的面积关系进行探求.这个关系是18世纪法国数学家邵林(J. Saurin,1655～1737)发现的.1723年,他在法国科学院院刊上发表了

定理2(面积法) 若S_n和S'_n分别为圆内接和外切正n边形的面积,则有$S_{2n}=\sqrt{S_n\cdot S'_n}$,$S'_{2n}=\dfrac{2S_nS'_n}{S_n+S_{2n}}$.

如图3所示,AB和AE分别是圆内接正n边形和正$2n$边形的一条边,CD和FG分别是圆外切正n边形和正$2n$边形的一边.易知

$$\frac{S_n}{S_{2n}}=\frac{n\left(\frac{1}{2}AB\cdot OK\right)}{2n\left(\frac{1}{2}AE\cdot OH\right)}=\frac{AK\cdot OK}{AE\cdot OH}=\frac{OH}{OE}\cdot\frac{OK}{OH}=$$

$$\frac{OK}{OE}=\frac{AK}{CE}=\frac{2n\left(\frac{1}{2}AK\cdot OE\right)}{n\left(\frac{1}{2}CD\cdot OE\right)}=\frac{S_{2n}}{S'_n},$$

$$\frac{S'_n}{S'_{2n}}=\frac{n\left(\frac{1}{2}CD\cdot OE\right)}{2n\left(\frac{1}{2}FG\cdot OE\right)}=\frac{CE}{2FE},$$

$$\frac{2S'_n-S'_{2n}}{S'_{2n}}=\frac{CF}{FE}=\frac{OC}{OE}=\frac{OA}{OK}=\frac{OE}{OK}=\frac{S_{2n}}{S_n}.$$

故得定理 2.

与邵林的递推公式相类似，19 世纪法国数学家利奥内(Lionnet)、西罗德(P. -L. Cirodde，1794～1849)和于埃(Huet)各自证得[5]

定理 3(周长法)　若 C_n 和 C'_n 分别为圆内接和外切正 n 边形的周长，则有

$$C_{2n}=\sqrt{C_n\cdot C'_{2n}},\quad C'_{2n}=\frac{2C_nC'_n}{C_n+C'_n}.$$

事实上，

$$\frac{C_n}{C_{2n}}=\frac{AK}{AE}=\frac{HE}{FE}=\frac{AE}{FG}=\frac{C_{2n}}{C'_{2n}},$$

$$\frac{C'_n}{C'_{2n}}=\frac{CE}{FG}=\frac{CE}{2FE},$$

$$\frac{2C'_n-C'_{2n}}{C'_{2n}}=\frac{CF}{FE}=\frac{OC}{OE}=\frac{OE}{OK}=\frac{CE}{AK}=\frac{CD}{AB}=\frac{C'_n}{C_n}.$$

受等周方法的启发，18 世纪法国著名数学家勒让德(A. M. Legendre，1752～1833)获得了等积正多边形法，他的结果是

定理 4(等积法)　设 R_n 和 r_n 分别为正 n 边形的外接圆和内切圆半径，R_{2n} 和 r_{2n} 为等积的正 $2n$ 边形的外接圆和内切圆半径，则有 $R_{2n}=\sqrt{R_n\cdot r_n}$，$r_{2n}=\sqrt{r_n\cdot\frac{R_n+r_n}{2}}$.

如图 1 所示，定理可由 $n\cdot\frac{1}{2}R_n^2\sin\frac{2\pi}{n}=2n\cdot\frac{1}{2}R_{2n}^2\sin\frac{\pi}{n}$，$\cos\frac{\pi}{n}=\frac{r_n}{R_n}$，$\cos\frac{\pi}{2n}=\frac{r_{2n}}{R_{2n}}$，以及倍角公式推得. 等积圆半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$，因而可得圆周率值.

2　4 种方法的一致性

由定理 1～4，可以分别推导出关于 S_n，C_n，R_n 和 R_n^2 的递推公式，并推得圆周率的表达式. 如由定理 2，易得关于 S_n 的递推公式

$$S_{4n}^2=\frac{2S_{2n}^3}{S_{2n}+S_n}. \tag{1}$$

比利时数学家卡塔兰(E. C. Catalan，1814～1894)获得了上述公式[6]. 若取圆半径 $R=\sqrt{2}/2$，并从圆内接正四边形(此时 $a_4=1$)开始，易知 $S_4=1$，$S_8=\sqrt{2}$. 对(1)作变形，可得

$$\left(\frac{S_{2n}}{S_{4n}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{S_n}{S_{2n}}\right)+\frac{1}{2},\quad \frac{S_4}{S_8}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{2}$$

于是

$$\frac{S_8}{S_{16}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \frac{S_{16}}{S_{32}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\cdots,$$

$$\frac{S_{4\cdot 2^{n-1}}}{S_{4\times 2^n}}=\frac{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}}{2}.$$

因而得到

$$S_{4\cdot 2^n}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\cdots\times\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}}. \tag{3}$$

由此获得 π 的无穷乘积表达式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\times\cdots. \tag{4}$$

这就是著名的韦达公式. 卡塔兰还推得圆周率的另一个表达式. 直接应用(1)以及 $S_4=1$，$S_8=\sqrt{2}$ 可得

$$S_{4\cdot 2^n}=2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}\ (n=0,1,2,\cdots). \tag{5}$$

故得

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}. \tag{6}$$

易证，(4)式与(6)式是等价的.

类似地，在周长法、等周法和等积法中，分别可得关于 $\frac{C_{2n}}{C_{4n}}$、$\frac{R_{4n}}{R_{2n}}$ 和 $\frac{R_{2n}^2}{R_{4n}^2}$ 的递推关系. 利用这些关系，选取适当的初值，分别可得 $C_{4\times 2^{n-1}}$、$1/R_{4\times 2^{n-1}}$ 和 $1/R_{4\cdot 2^n}^2$ 的与(3)式右边相同的乘积表达式. 只要在周长法中，取圆半径 $R=1/4$，并从圆内接正四边形(初值为 $C_4=\sqrt{2}$)开始，在等周法中，从边长为 $a_4=1$ 的正四边形开始(初值为 $1/R_4=\sqrt{2}$)，在等积法中，从边长为 $a_4=\sqrt{2}$ 的正四边形开始(初值为 $1/R_4^2=1$)即可.

定理 1 表明，在数列 r_n，R_n，r_{2n}，R_{2n} 中，第 3 项和第 4 项分别是前 2 项的等差中项和等比中项. 19 世纪法国数学家文森特(A. Vincent，1797～1868)据

此得出[7]

定理5 如果一个数列的前两项为0和1,自第3项起,交替为前两项的算术中项和几何中项,那么该数列的极限为$\pi/2$.

事实上,只要从边长为1的正方形开始,根据定理1依次求出等周正八边形、正十六边形、正三十二边形、正六十四边形…的边心距和半径,即得数列

$$\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{4},\cdots. \tag{7}$$

其极限为$\pi/2$.添上0和1两项,即得定理5中的数列.

同时期法国数学家法尔西(A. Farcy)很快发现,从定理2~4也同样能得出定理5.在定理2中,S'_{2n}又可写成$S'_{2n}=\frac{2S'_nS_{2n}}{S'_n+S_{2n}}$,因而在数列$\frac{1}{S_n}$、$\frac{1}{S'_n}$、$\frac{1}{S_{2n}}$、$\frac{1}{S'_{2n}}$中,第3和第4项分别是前两项的几何中项和算术中项.因此,从边长为1的圆内接正方形开始(此时圆半径为$1/\sqrt{2}$,面积为$\pi/2$,外切正方形面积为2),依次求出边数倍增的圆内接和外切正多边形的面积,它们的倒数序列为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}+1}{4},\cdots \tag{8}$$

其极限为$\frac{2}{\pi}$.第1项前添一项0,即得定理5.在定理3中,数列$\frac{1}{C'_n}$、$\frac{1}{C_n}$、$\frac{1}{C'_{2n}}$、$\frac{1}{C_{2n}}$满足类似条件.若从边长为1/2的圆外切正方形开始(此时圆半径为1/4,周长为$\pi/2$,内接正方形周长为$\sqrt{2}$)依次求出边数倍增的圆外切和内接正多边形的周长,它们的倒数构成数列(7),极限为$\pi/2$.在定理4中,数列R_n^2、r_n^2、R_{2n}^2、r_{2n}^2满足类似性质,从边长为$\sqrt{2}$的正方形(外接圆和内切圆半径分别为1和$1/\sqrt{2}$)开始,依次求出边数倍增的等积正多边形的外接圆和内切圆半径,即得数列(8).这样,4种方法就统一于定理5.

3 4种方法的精度与速度

19世纪法国数学家对4种方法的精度也作了对比研究.这些研究基于

定理6 在周长、面积、等周和等积法中,分别成立不等式:(i) $C'_{2n}-C_{2n}<\frac{1}{4}(C'_n-C_n)$;(ii) $S'_{2n}-S_{2n}<\frac{1}{4}(S'_n-S_n)$;(iii) $R_{2n}-r_{2n}<\frac{1}{4}(R_n-r_n)$;(iv) $R_{2n}^2-r_{2n}^2<\frac{1}{4}(R_n^2-r_n^2)$.

事实上,4个不等式可分别由定理3、定理2、定理1和定理4推出.其中第1个不等式由于埃给出.于埃利用它对给定圆周率精度所需的计算量进行估计.不妨从直径为1的圆内接正六边形开始,$C_6=3$,$C'_6=2\sqrt{3}$.于是由定理6得

$$C'_{6\cdot 2^n}-C_{6\cdot 2^n}<\frac{1}{4^n}(2\sqrt{3}-3).$$

要使π的精度为10^{-N},只须使

$$n\geqslant\frac{N+\lg(2\sqrt{3}-3)}{\lg 4}. \tag{9}$$

如$N=7$时,$n\leqslant 11$.由此可知,必须计算到圆内接正6×2^{11}边形的周长,才能获得祖冲之(429~500)的著名结果.类似地,在面积法中,要得到同样精度,须使

$$n\geqslant\frac{N+\lg(\sqrt{3}/2)}{\lg 4}. \tag{10}$$

比较(9)和(10)式易知,面积法比周长法的速度稍慢些.如要达到祖冲之的精度,必须计算到圆内接正6×2^{12}边形的面积.

在等周法中[8,9],若从边长为1的正六边形开始,则由定理6易证

$$\frac{3}{r_{6\cdot 2^n}}-\frac{3}{R_{6\cdot 2^n}}<\frac{3}{r_6^2}\frac{1}{4^n}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4-2\sqrt{3}}{4^n}.$$

若使圆周率$\pi=3/R$的精度为10^{-N},只须使

$$n\geqslant\frac{N+\lg(4-2\sqrt{3})}{\lg 4}. \tag{11}$$

因此等周法的速度介于面积和周长法之间.类似地,在等积法中[10],若从面积为3的正六边形开始,要达到同样的精度,须使

$$n\geqslant\frac{N+\lg(2\sqrt{3}/3)}{\lg 4}. \tag{12}$$

因而等积法较面积法稍慢一些.

易见,4种方法的收敛速度都较缓慢,计算量都很大,其实际应用并非易事.19世纪法国数学家施罗米尔奇(O. Schlömilch,1823~1901)根据定理2建立近似公式[11]

$$\pi\approx\frac{3S_nS'_n}{2S_n+S'_n}, \tag{13}$$

从而大大提高了速度.其理论依据是用α和$\alpha+\delta$(α和δ为任意正数)的等差中项来代替它们的等比中项时,误差小于$\frac{\delta^2}{8\alpha}$.因此若设$\frac{1}{S'_n}=\alpha$,$\frac{1}{S_n}=\alpha+\delta$,于是可得数列$\frac{1}{S_{2n}}\approx\alpha+\frac{1}{2}\delta$,$\frac{1}{S'_{2n}}\approx\alpha+\frac{1}{4}\delta$,$\frac{1}{S_{4n}}\approx\alpha+\frac{1}{4}\delta+\frac{1}{8}\delta$,$\frac{1}{S'_{4n}}\approx\alpha+\frac{1}{4}\delta+\frac{1}{16}\delta$,….因而得近似公式

$$\frac{1}{\pi}\approx\alpha+\frac{1}{4}\delta+\frac{1}{16}\delta+\frac{1}{64}\delta+\frac{1}{256}\delta+\cdots=\alpha+\frac{1}{3}\delta.$$

这就是(13)式. 易证其误差小于$\frac{1}{40}(S'_n-S_n)^2$. 施罗米尔奇的近似公式无意中与后世的 Richardson 外推加速法相合.

4 从刘徽的割圆术看法国数学家的4种方法

刘徽割圆术的主要内容是,首先利用半径为1的圆内接正多边形边长递推公式

$$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-(a_n)^2}}\tag{14}$$

以及面积公式

$$S_{2n}=\frac{1}{2}na_n,\tag{15}$$

依次求得 S_6, S_{12}, S_{24}, S_{48}, S_{96}和 S_{192},利用不等式(刘徽不等式)

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n),\tag{16}$$

求得圆周率近似值157/50;其次,利用"组合加速技术"[12]得加速公式

$$S=S_{2n}+\frac{1}{3}(S_{2n}-S_n),\tag{17}$$

求得圆周率的近似值3927/1250. 利用(14)式及 $a_4=\sqrt{2}$ 可得

$$a_{4\cdot2^n}=\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n+1\text{个根号}}.$$

利用(14)式即得(5)式及圆周率表达式(6)式.

在阿基米德思想的深刻影响下,17～19世纪西方数学家在运用初等几何方法求圆周率时几乎形成了思维定势——同时考虑圆内接和外切正多边形的周长或面积. 19世纪法国著名数学家拉克洛瓦(S. F. Lacroix, 1765～1843)似乎是个例外. 他直接利用直径为1的圆内接正多边形的倍边公式

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4-(2a_n)^2}}$$

得

$$p_{6\cdot2^n}=6\cdot2^{n-1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{n+1\text{个根号}}$$

和圆周率表达式

$$\pi=\lim_{n\to\infty}6\cdot2^{n-1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{n+1\text{个根号}}.\tag{18}$$

法国数学家法尼安(A. Fanien)认为,面积法、周长法、等周法和等积法都不过是拉克洛瓦方法的变形而已[13],而这种方法与刘徽割圆术的不同之处在于它计算的是周长而非面积.

实际上,利用刘徽的(14)和(15)式可得

$$S_{4n}^4=4n^2(S_{4n}^2-S_{2n}^2).\tag{19}$$

以 n 代替 $2n$,得

$$S_{2n}^4=n^2(S_{2n}^2-S_n^2).\tag{20}$$

从(19)和(20)式消去 n,并解出 S_{4n}^2即得递推公式(1);类似地,从(14)式也可推出周长法中关于 C_n 的递推公式.

另一方面,由双侧递推公式导出的单侧递推公式(1)为刘徽的"率消息"提供了简单的证明. 由(1)式得

$$S_{4n}^2-S_{2n}^2=\left(\frac{S_{2n}-S_n}{S_{2n}+S_n}\right)S_{2n}^2,$$

于是

$$\frac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}^2}{(S_n+S_{2n})(S_{2n}+S_{4n})}.\tag{21}$$

另外,从定理2可得

$$S_n+S_{2n}=\frac{2S_{2n}^2}{S'_{2n}},\quad S_{2n}+S_{4n}=\frac{2S_{4n}^2}{S'_{4n}},$$

$$(S_n+S_{2n})(S_{2n}+S_{4n})=\frac{S_{2n}}{S'_{4n}}\cdot4S_{2n}^2.$$

故由(21)式得

$$\frac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\frac{S'_{4n}}{4S_{2n}}.\tag{22}$$

在周长法、等周法和等积法中有类似结果. 于是有

定理7　面积、周长、等周和等积方法中所获得的4个数列的子列$\{S_n\}$, $\{C_n\}$, $\{R_n\}$和$\{R_{2n}\}$分别满足:(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\frac{1}{4}$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{4n}-C_{2n}}{C_{2n}-C_n}=\frac{1}{4}$; (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R_{4n}-R_{2n}}{R_{2n}-R_n}=\frac{1}{4}$; (iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R_{4n}^2-R_{2n}^2}{R_{2n}^2-R_{2n}^2}=\frac{1}{4}$,并且前两个比值序列单调递减,后两个比值序列单调递增.

由定理7,可得类似于(17)的加速公式

$$C=C_{2n}+\frac{1}{3}(C_{2n}-C_n);$$

$$R=R_{2n}+\frac{1}{3}(R_{2n}-R_n);$$

$$R^2=R_{2n}^2+\frac{1}{3}(R_{2n}^2-R_n^2).$$

从第1式可得 $\pi/2$ 的近似值,从第2,3两式可得$2/\pi$的近似值.

5 结　语

17～19世纪的法国数学家所提出的4种初等

几何方法是对阿基米德方法的发展.但囿于阿基米德的思想传统,4种方法无一例外都是从两侧逼近圆周率.4种方法分别获得的数列 $r_n, R_n, r_{2n}, R_{2n}, \cdots; \frac{1}{S_n}, \frac{1}{S'_n}, \frac{1}{S_{2n}}, \frac{1}{S'_{2n}}, \cdots; \frac{1}{C'_n}, \frac{1}{C_n}, \frac{1}{C'_{2n}}, \frac{1}{C_{2n}}, \cdots$ 以及 $R_n^2, r_n^2, R_{2n}^2, r_{2n}^2, \cdots$ 都包含一个递增子列和一个递减子列,显然,人们不易从相邻两项差的比值中找到规律,因而难以得出加速的方法.尽管施罗米尔奇利用算术中项来代替几何中项的方法获得了同样的加速效果,但这种方法只能适用于具有类似性质——从第3项开始,诸项交替为前两项的算术(几何)中项和几何(算术)中项的特殊收敛数列,而刘徽的割圆术却能适用于一般的收敛数列,具有更广的应用价值.因此,刘徽割圆术的优势显然不仅仅在计算量方面,加速捷径的发现更显示出它的技高一筹.

由于东西方之间的隔阂,19世纪中叶以前西方人对中国数学几乎一无所知.1752年,法国著名数学史家蒙蒂克拉(J. E. Montucla, 1725~1799)出版《化圆为方的历史》,书中将355/113归功于荷兰数学家安托尼兹(A. Anthonisz, 1543~1620),而只字未提中国数学家的有关结果[14];直到1850年末,法国人所知道的圆周率历史年表中,在从阿基米德到德国数学家雷格蒙塔努斯(Regiomontanus, 1436~1476)的1700年间,只含印度数学家的结果(且这个结果也不正确)[15].虽然法国数学家发展了圆周率初等方法,但他们不仅部分重复了,而且还逊色于1600年以前中国数学家的工作.作者的研究也证明:东西方科学的交流必将是互利互惠的.

参考文献:

[1] SMITH D E. **A History of π and Its Transcendence** [M]. Translated by ZHENG Tai-pu. Shanghai: Shang Wu Printing Office, 1935.

[2] CAJORI F. **A History of Elementary Mathematics** [M]. New York: Macmillan, 1907. 241-243.

[3] EVES H. **An Introduction to the History of Mathematics** [M]. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1983. 85-89.

[4] TERQUEM O. Note historiques sur la methode des polygones reguliers isoperimetres [J]. **J de Mathématiques Pures et Appliquées**, 1838, 3: 98-99.

[5] HEUT. Note sur la détermination du rapport π de la circonférence au diamètre, par la methode des périmètres [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1845, 4: 154-160.

[6] CATALAN E. Note sur la rapport de la circonférence au diamètre [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1842, 1: 190-196.

[7] FARCY A. Note sur la recherche élèmentaire du nombre π[J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1844, 3: 582-585.

[8] JUBÉ E. Note sur la détermination du rapport de la circonference au diamètre, par la methode des isoperimetres [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1846, 5: 42-44.

[9] HERMANN A. Note sur l'erreur comme dans le calcul de π par la methode des isopérimètres [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques, 2ᵉ sér**, 1866, 5: 509-510.

[10] JUBÉ E. Note sur le rapport de la circonference au diamètre, par la méthode des surfaces équivalentes [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1848, 7: 366-368.

[11] SCHLOMILCH O. Note sur la quadrature elementaire du cercle [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1855, 14: 462-464.

[12] 王能超.千古绝技"割圆术"[J].**数学的实践与认识**,1996,26(4):315-321.
WANG Neng-chao. The admirable Cyclotomic rule [J]. **Theory and Practice in Mathematics**, 1996, 26(4): 315-321.

[13] FANIEN A. Sur le calcul de π[J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1850, 9: 190-192.

[14] TERQUEM O. Sur la quadrature du cercle [J]. **Nouvelles Annales de Mathématiques**, 1853, 12: 298-302.

[15] TERQUEM O. Note historique supplementaire sur le calcul de π [J]. **Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques**, 1859, 5: 46-49.

[16] 汪晓勤.关于《代微积拾级》的一个注记[J].**浙江大学学报(理学版)**,2001,28(4):384-393.
WANG Xiao-qin. A remark on the first calculus textbook in China [J]. **J of Zhejiang University (Science Edition)**, 2001, 28(4): 384-393.

(责任编辑 寿彩丽)