$=a(x+h)^2+k$ 的性质吗？请大家课后交流.

评析 从认识二次函数图象的特征、基本方法运用到综合探究能力的展现，学生探究的兴趣正浓…… 让学生体会"纸上得来终觉浅，觉知此事要躬行"，引导学生动手实验，善于观察、思考、总结.新课程倡导教师营造的民主探究气氛的课堂要延伸到课堂外，让学生有兴趣带着探究的欲望在课外继续解决.教师把课堂的主体地位让给学生，学生的积极性得到充分调动，思维能力和学习能力都得到很大的提升.

3 教学反思

3.1 关注学生活动，体现数学本质

新一轮的课程改革核心理念是为了每位学生的发展.在教学过程中，必须激发学生在学习过程中的积极性、主动性和独立性.学生知识的获得，必须通过学生积极思考和实践活动.因此，把课堂还给学生，把学习的主动权交给学生，给学生充分的学习时间，放手让学生自主学习，创设自学的"气氛"，让学生的学习主动性得到充分的发挥，本节课正是本着这样的教学理念开展教学的.

学生的数学学习活动应当是一个生动活泼、主动和富于个性的过程，教师在教学活动组织和内容选择上要合理思考.本课例数学活动的本质是"数形结合"思想，活动的价值体现在"数形"转换的思维过程中，即借助数的特点寻找形的表形，通过抛物线 $y=ax^2 \to y=ax^2+k \to y=a(x-h)^2$ 的变化，列表表示比较位置特征等解释过程，揭示不变的数量关系，提出新问题即如何发现研究二次函数的共性规律，这比解决一个问题更重要.在学生的操作体验和总结经验、积累解决问题策略的过程中优化了学生对函数图象问题研究的方法.本课例教学活动中，教师转换原有角色，不再走在孩子前面，而是放手让学生领头，带着老师一起学，教师做一个积极的引导者，鼓励学生去寻找解决问题的突破口，以思维活动为主线，使不同学生在数学活动中均得到发展，学生既掌握了必要的知识和技能，又获得了方法和能力.

3.2 以学生发展为本，改变教学方法

课堂教学的重点应放在学生的发展上，好的教师不是教给学生数学，而是教会学生怎么学数学，让学生真正成为课堂的主人.本节课从内容入手，在教学中坚持两个原则，即学生能自己说出来的，教师不引；学生能自己学会的，教师不教.课堂教学中，教师将方法教给学生，然后放手让学生自主学习.

本课例引导学生探究二次函数 $y=ax^2+k$ 与 $y=a(x-h)^2$，首先贴近学生的认识思维空间，从探究 $y=ax^2$ 开始，抓住抛物线的对称性和顶点坐标的变化，用新的方法、新的视角审视旧问题，引导学生从列表、描点感性认识入手，去发现图象上某些特殊点的位置变化.把学生易混淆的 $y=2(x-1)^2$ 与 $y=2x^2+1$ 之间的位置关系通过图象的平移揭示出内在特征规律，激发学生内在探究动力，激活学生思维的火花.以开发挖掘学生发展为核心，营造了一个民主、平等、自由的教学环境，使学生的认知结构从"听—记—练"变为"操作—思考—质疑—解惑—再发现—再总结—再探究".教学过程由"给出知识"转向了"引导活动"，由"关注学生学习结果"转向"关注学生学习活动"，变学生客体为主体，从被动变主动.教师放手让学生从单纯的认知学习者变为思维行为学习者，真正改变了学生学习方法，提高了学生学习数学的能力.

3.3 体验数学，让学生唱主角

本节课注重过程教学，培养学生探究的意识和习惯.有关专家认为，青少年有与生俱来的探究需要和获得新体验的需要，这些需要的满足，必须具备一定的环境和适当的方法.在整个教学过程中，我没有把现成的结论交给学生，而是让学生自己去动手、动脑、动口，让学生经历获取知识的思维过程，从而学到知识.

本课例从学生动手列表、描点、画图，借助函数图象的轴对称性和平移变换，以顶点坐标研究为切入点，由 $y=ax^2 \to y=a(x+h)^2 \to y=a(x+h)^2+k$ 探究它们的形状大小和位置关系.引导学生参与二次函数图象及性质的发现、探索、归纳及几何画板验证过程，由浅入深实现基本知识、基本技能的相互转化，既培养了学生对数学的直观能力，启迪了学生的探究灵感，又体现了教学的针对性、活动性、开放性和合作性.在教学过程中教师把观察的时间空间留给学生，把发现的过程给学生，把抽象概括总结的机会给学生，教师真正放开手，让学生在实验探索中探方法、善思考、找规律、体会数形结合和转化等数学思想.课堂上学生的探索活动无限，充满睿智，一串串的探索性问题，把学生的思维推向深处和广处.学生一路走来，体验着学数学的乐趣，风光无限，每一步都有新感觉、新发现，真正唱起了课堂的主角.

基于数学史的数学探究活动设计课例分析*

王　鑫　汪晓勤　（华东师范大学教师教育学院　200062）
岳增成　（华东师范大学数学科学学院　200241）

1　引言

“探究式教学”(inquiry-based teaching) 最早由美国芝加哥大学施瓦布(J.Schwab) 教授在 20 世纪 50 年代的“教育现代化运动”中提出，该理论倡导学生应当像科学家一样去发现问题、分析问题和解决问题，在探究的过程中建构知识[1].2003 年颁布的《普通高中数学课程标准》将“数学探究”列为贯穿于整个高中数学课程始终的重要内容之一[2].自此，数学探究式教学逐渐受到我国数学教育界的关注.2017 年新颁布的《普通高中数学课程标准》仍将“数学探究”作为一条内容主线贯穿于整个高中数学课程中，明确指出：“教师要把教学活动的重心放在促进学生学会学习上，积极探索有利于促进学生学习的多样化教学方式，不仅限于讲授与练习，也包括引导学生阅读自学、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等.”[3] 研究表明，在数学教学中开展探究活动有助于增强学生数学学习的动机，促进学生对数学的理解，同时也有助于培养学生更加积极的数学学习态度和数学信念，加强数学与生活、数学与社会之间的联系[4].

福韦尔(J.Fauvel，1951－2000) 在总结数学史的教育价值时指出，数学史为学生提供了探究机会[5].Tzanakis 和 Arcavi 则指出，通过数学史，教师可以理解“做数学”的创造性过程，认识到数学是一门不断演进、人性化的学科，而非僵化的真理系统[6]，因而数学史可以帮助教师建立动态的数学观.这种动态的数学观，正是数学探究学习的认识论基础[7].美国数学史家和数学教育家 M·克莱因(M. Kline，1908－1992) 曾指出，“数学史是教学的指南”[8].实际上，一个数学主题的发生和发展过程，往往就是前人解决问题的探索和研究过程，因而数学历史为数学探究式教学提供了参照.

近年来，HPM 视角下的数学教学日益受到数学教育界的关注，教学实践中产生了许多 HPM 课例.那么，在这些课例中，教师是如何设计探究活动的？数学史在探究活动中起什么作用？本文试图通过对部分高中 HPM 课例的分析来回答上述问题.

2　分析框架

目前学术界不乏关于数学探究式教学的理论探讨，一般而言，数学探究式教学有以下几个成分[9]：

· 学生对与数学主题(如概念、方法或问题)相关的可能结果进行预测；

· 在没有教师指导的情况下，学生围绕主题进行自由探究；

· 教师通过提问或特定的探究任务，引导学生进行聚焦式探究；

· 数学主题的应用；

· 对学生的学习进行比较、评价和反思；

· 将主题拓展至其他情境或相关主题.

美国哥伦比亚大学的西格尔(M. Siegel) 教授早在 1998 年就提出了数学探究式教学的四阶段模式[10]，该模式涵盖了数学探究式教学的所有上述成分，被广泛应用于有关数学探究的研究中，具体关系见图 1.

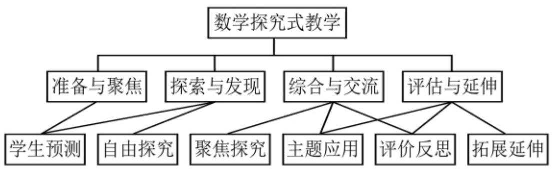

图 1　数学探究式教学四阶段与诸成分之间的关系

以下是四个阶段所涉及的具体活动.

(1) 准备与聚焦：教师对活动进行介绍，唤起学生的初始想法，激活所探究主题之知识基础，并且挑战学生的原始想法，将学生的注意力聚焦在

* 本文是上海市“立德树人”数学教育教学研究基地系列论文之一.

需要讨论的课题上，激发学生的学习动机，确定问题与探究的方向.

(2) 探索与发现：教师鼓励学生猜想、分析、推理与试验，并经讨论后获得初步的结果.

(3) 综合与交流：教师协助学生进行讨论，借由辨析、论证、研讨的过程，获得最后结果.在此过程中，学生阐述自己的想法(如运用表格、图形、证明等)，回应他人的意见，教师适时引导或帮助学生得出结论.

(4) 评估与延伸：教师整理、归纳学生的数学发现，对学生的学习进行比较、评价和反思，利用否定属性策略提出新问题，借以发现其他更系统化的探究问题的方法.

围绕基于数学史开展的数学探究活动，本文选取 4 个高中 HPM 课例[11-13] 作为研究对象，涉及立体几何、解析几何与微积分中的基本概念.这些课例中的数学探究都与相关概念在历史上的发生、发展过程有关，且包含了数学探究式教学的所有四个阶段.我们利用西格尔的四阶段框架，分别对四个课例中的探究环节进行分析.

3　课例分析

3.1　棱柱的概念

数学史上，棱柱定义经历了四个发展阶段[14]：

(1) 欧几里得的静态定义

公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》中最早给出了棱柱的定义："棱柱是由一些平面构成的立体图形，其中有两个面是相对的、相等的、相似且平行的，其余各面均为平行四边形." 该定义只关注了棱柱底面及侧面的特征，在其后的两千多年里，人们一直认为欧氏定义是正确的，未曾有人提出过质疑.

(2) 棱柱的动态定义

18 世纪，法国数学家瓦里格农(P. Varignon，1654－1722)在《数学基础》中首次采用了动态定义："若平面直线形(如 ABF)按照平行于自身的方向从点 A 移动到点 C，则该直线形画出一个界于两个相似且全等的图形 CDE 和 ABF 以及所有以图形 ABF 的边为一边的平行四边形之间的立体 CB，该立体称为棱柱." 如图 2 所示.

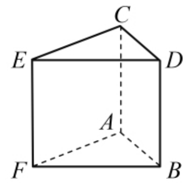

图 2　瓦里格农的棱柱动态定义

(3) 欧氏定义的改进

舒伊勒(A. Schuyler，1828 — 1913)、斯顿(J. C. Stone，1867 — 1940)等进一步关注侧棱的特征，相继对欧氏定义进行了改进，其中，斯顿在其教科书中给出了欧氏定义的反例(如图 3 中的十二面体).

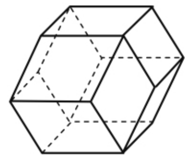

图 3　斯顿的欧氏定义反例

(4) 棱柱定义的多元化

之后，数学家们又相继给出了棱柱的多种定义，如基于棱锥的定义、基于棱的定义、基于棱柱面以及基于棱柱空间的定义，这些定义避免了欧氏定义在侧棱属性上的疏漏.

在课例"棱柱的概念" 中，教师根据棱柱定义的历史设计了如下教学过程：让学生对各种空间几何体进行归类，以加深对棱柱的直观认识；从多个角度观察棱柱，给棱柱下定义；辨析定义的严谨性，必要时举出反例；改进完善并精简定义，提炼出教科书上的静态定义.其中探究环节的具体设置如下：

(1) 准备与聚焦：让学生从点、线、面等角度观察棱柱，尝试用自己的语言来定义棱柱.学生给出的定义大多与欧氏定义如出一辙，如"两个底面是平行且全等的多边形，侧面都是平行四边形的多面体叫做棱柱." 教师针对上述定义提出问题：该定义是否严谨？是否真正刻画了棱柱的本质特征？

(2) 探索与发现：学生对欧氏定义的严谨性进行考察和分析，经过不断尝试，构造出由两个四棱柱"拼接" 而成的十面体(为凹多面体) 反例①，从而证明欧氏定义是不严谨的.

(3) 综合与交流：教师引导学生思考：假如欧几里得来到我们的课堂中，他对上述反例是否感到满意？学生展开激烈辩论，部分学生认为该反例不能让欧几里得感到信服，因为它可以分割成两个棱柱.教师给出斯顿的十二面体反例，学生一

① 最近，在上海某中学实施的棱柱概念教学实验中，一名学生利用磁力片拼出了斯顿的十二面体，这说明在提供教具的情况下，斯顿的反例对于学生来说并非不可企及.

致认为该反例能让欧几里得心服口服.最终,在教师引导下,学生对欧氏定义进行了改进,得到人教版教科书上的静态定义.

(4) 评估与延伸:教师对学生给出的其他定义给予了充分肯定,如个别学生采用了动态定义,教师指出,该定义与法国数学家瓦里格农的定义不谋而合.最后,教师还展示了历史上棱柱的其他若干定义.

图 4 给出了棱柱定义的历史演进过程与课堂上棱柱定义探究过程的对比.

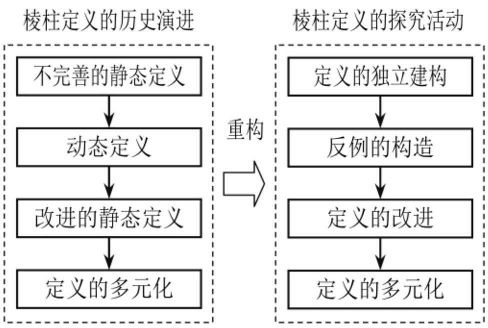

图 4　棱柱定义的历史与探究活动的设计

3.2　椭圆的定义

椭圆的定义经历了以下几个阶段[15][16]:

(1) 截线定义

古希腊数学家最早从圆锥或圆柱的截口上发现了圆锥曲线,梅内克缪斯(Menaechmus,公元前 4 世纪)用垂直于母线的平面去截顶角分别为锐角、直角和钝角的圆锥,相应的得到椭圆、抛物线和双曲线.

(2) 焦半径性质

阿波罗尼斯(Apollonius,公元前 3 世纪)在《圆锥曲线》中将同一圆锥被不同位置的平面所截得的曲线定义为圆锥曲线,并用了 7 个命题才推导出椭圆焦半径之和等于常数这一性质,且已经完全脱离了圆锥.

(3) 轨迹定义

法国数学家和天文学家拉希尔(P. de Lahire,1640－1719)在《圆锥曲线新基础》中抛弃了古希腊人的截线定义,将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹(即椭圆的第一定义).

(4) 截线定义与轨迹定义的统一

1822 年,比利时数学家旦德林(G.P.Dandelin,1794－1847)利用圆锥的两个内切球,直接在圆锥上导出椭圆的焦半径性质,证明了截线定义与轨迹定义的统一性.

在课例"椭圆的定义与方程"中,教师运用发生教学法,重构历史上椭圆定义发展过程中的关键环节,设计了如下教学过程:观察在太阳照射下,球在水平地面上影子轮廓的形状,并用手电筒进行模拟实验,再用几何画板演示,抽象出数学模型;当一点在椭圆上运动时,探究其中不变的等量关系,发现椭圆的焦半径性质,进而得到椭圆的第一定义.其中探究环节的具体设计如下:

(1) 准备与聚焦:教师从"阳光斜照下球在水平地面上的影子具有椭圆形轮廓"这一学生熟悉的现象出发,引导学生将该现象抽象成图 5 中的旦德林单球模型,从而得出"用平面斜截圆柱,得到的截线为椭圆"的结论.图 5 中,P 为椭圆上任意一点,椭圆与平面相切于点 F,点 P 所在母线与球相切于点 Q.教师提出问题:当点 P 在椭圆上运动时,PQ 和 PF 有怎样的关系?如何刻画椭圆的本质特征?

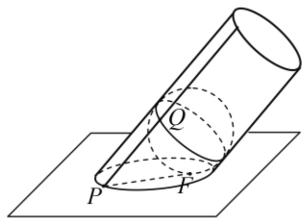

图 5　旦德林单球模型

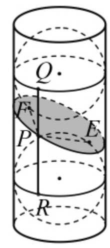

图 6　圆柱内的旦德林双球模型

(2) 探索与发现:学生类比切线长定理,发现 $PQ = PF$.为了探究椭圆的性质,教师将图 5 中圆柱面介于椭圆和球的大圆之间的部分展开成两个对称的平面图形,让学生分组拼图.学生找到三种拼图方案,并由长方形拼图方案联想到椭圆所在平面另一侧的对称的圆柱面,从而得到旦德林双球模型(图 6).类似地有 $PR = FE$.

(3) 综合与交流:教师通过几何画板让学生观察,当点 P 在椭圆上运动时,变中是否含有不变的规律?学生发现 $PF + PE = PQ + PR = QR$ 是一个定值.最后,教师引导学生得到了椭圆的第一定义②.教师指出,椭圆所在平面与旦德林双球的切点正是椭圆的焦点.

② 这里,教师并未试图去解决"满足焦半径性质的点一定在椭圆上"的完备性问题.

(4) 评估与延伸：教师追溯椭圆定义从截线定义到轨迹定义的演进历史，让学生感悟数学概念发展过程的曲折与艰辛；对学生的发现给予积极的评价，称他们在短短 15 分钟时间内跨越了两千年的历史；同时，引导学生比较截线定义和轨迹定义的优劣，让学生理解轨迹定义对于学习解析几何思想的意义.

图 7 给出了椭圆概念的历史与课堂探究活动的对比.

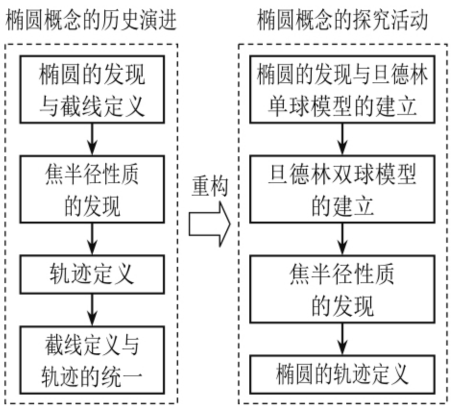

图 7　椭圆概念的历史与探究活动的设计

3.3　导数的概念

从历史上来看，人们对切线的研究促进了导数概念的诞生.古希腊数学家对切线的认识停留在静态阶段，欧几里得、阿波罗尼斯、阿基米德(Archimedes，公元前 287 — 公元前 212) 等都将曲线的切线定义为与曲线只有一个公共点、且落在曲线外的直线.到了 17 世纪，法国数学家费马和笛卡尔将切线看作割线的极限位置，这种“逐渐逼近”的动态定义逐渐被数学家们所认可.洛必达(G. L’Hospital，1661 — 1704) 在《无穷小分析》中将曲线的切线定义为曲线的内接“无穷边形”一边的延长线，便集中反映了这种观点[17].

在课例“导数的概念”中，教师由切线引入导数，让学生沿着数学发展的足迹，展开对切线定义的探索.教学过程如下：阅读章引言，了解微积分的起源及其广泛应用；探索圆和抛物线上一点处的切线定义，展现三次函数和三角函数在某些点处的切线，创造认知冲突，凸显改进切线定义的必要性；通过《几何原本》中的一个命题展现逐渐逼近的思想，得到切线的动态定义；由“形”与“数”引入导数的概念.其中探究环节的具体设置如下：

(1) 准备与聚焦

让学生分组讨论并写出圆和抛物线上一点处的切线的定义，教师当场统计结果.学生的典型答案有“与圆只有一个公共点的直线”、“连结圆心与圆上一点，过该点作垂直于连线的直线”，“与抛物线只有一个交点，且其上任何一个点均不在抛物线内的直线”.教师提出问题：上述切线定义是否适用于更一般的曲线？

(2) 探索与发现

教师让学生聚焦三次曲线和正弦曲线.学生分别在两种曲线的不同点处尝试作切线(图 8)，发现：用“与曲线只有一个公共点的直线”或“位于曲线外部的直线”来定义切线是有局限性的，不能适用于更一般的曲线.也就是说，我们需要寻找曲线切线的更具有普适性的定义.

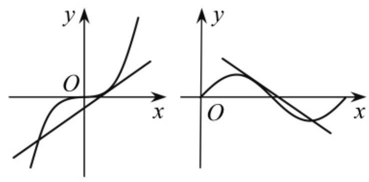

图 8　三次曲线和正弦曲线在某些特殊点处的切线

(3) 综合与交流

教师借助《几何原本》卷三中有关圆的切线命题：“过圆的直径的端点作直线与直径成直角，则该直线落在圆外，且在直线和圆周之间不能再插入别的直线”(命题 16)，结合图形(图 9) 直观地展现逼近思想，引导学生得出圆的切线的动态定义.在此基础上，师生归纳出一般曲线的切线动态定义.

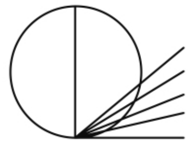

图 9　从欧氏命题到圆的切线的动态定义

(4) 评估与延伸

教师指出，从静态定义到动态定义，切线概念经历了两千年的漫长历史，让学生感悟数学概念发展过程的曲折与艰辛，并感悟数学学习的历史相似性；同时，让学生思考切线静态定义和动态定义之间的差异；最后，教师对学生在探究活动中的表现给予了积极的评价.

图 10 给出了切线概念的历史与课堂探究活动的对比.

4　结语

通过对棱柱、椭圆、导数三个概念的 HPM 课