【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之六）】

HPM 视角下的“十字相乘法”课例研究

邵爱娣[1]，余庆纯[2]，汪晓勤[1]
（1. 华东师范大学 教师教育学院，上海 200062；
2. 华东师范大学 数学科学学院，上海 200241）

【摘 要】近年来，由 HPM 专业学习共同体合作开发的 HPM 课例日益增多，但在已经发表的 HPM 课例中，很多教师看不到课例的形成过程与研究细节。事实上，除了课例的教学过程，课例形成过程和研究细节也是一线教师希望了解的。研究者通过“十字相乘法”课例研究，按照选题与准备、研讨与设计、实施与反馈、整理与写作四个环节展开，为初中 HPM 课例研究和课堂教学提供参考。

【关键词】HPM 课例；十字相乘法；数学思想；史料研究

一、引言

HPM（History and Pedagogy of Mathematics）是数学史与数学教育的简称。HPM 视角下的数学教学，是指借鉴数学知识的发生发展、再现历史上的数学思想方法、采用适当的方式运用数学史料以提升教学的有效性、优化数学教育价值的一种教学方式，由此形成的教学案例简称为 HPM 课例[1]。近年来，由 HPM 专业学习共同体合作开发的 HPM 课例日益增多，但在已经发表的 HPM 课例中，很多教师看不到课例的形成过程与研究细节。事实上，除了课例的教学过程，课例形成过程和研究细节也是一线教师希望了解的。

“十字相乘法”是沪教版数学七年级上册第九章第五节“因式分解”中的内容，强调十字相乘法以及十字交叉线的重要性。在教学实践中，许多教师对“十字相乘法”存在许多困惑。例如十字交叉线是怎么出现的？为什么要引入十字交叉线？如何引导学生理解十字交叉线的重要性？HPM 视角下的初中数学教学能否体现数学史“以史为鉴、以文化人”的教育价值？

为了解决上述问题，HPM 工作室实施了“十字相乘法”课例研究，按照选题与准备、研讨与设计、实施与反馈、整理与写作四个环节展开，以期为初中 HPM 课例研究和课堂教学提供参考。

二、HPM 课例研究

（一）选题与准备

1. 问题聚焦

“十字相乘法”这一课题由 HPM 工作室根据实际教学进度选定。对于本节课，执教者提出两点疑惑：一是课本中直接将多项式相乘的法则 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 反过来，得到 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，这样的引入方式比较突兀，但又找不到比较自然的引入方法；二是对十字相乘法中十字交叉线的由来介绍不是很清楚，课本上只提到可借助十字交叉线来分解因式，并没有做过多的解释与铺垫，而在二次项系数为 1 的情形中，十字相乘法及十字交叉线的必要性并不明显，只要将常数项分解成两个数的乘积，使这两个数的和为一次项系数，即可顺利完成因式分解。鉴于此，我们希望从数学史中寻找十字相

【作者简介】邵爱娣，华东师范大学教师教育学院硕士研究生，主要从事数学史与数学教育研究；余庆纯，华东师范大学数学科学学院博士研究生，主要从事数学史与数学教育研究；汪晓勤，本文通讯作者，华东师范大学教师教育学院教授，博士生导师，主要从事数学史与数学教育研究。

乘法的动因，并将其再现于课堂。

针对十字相乘法的教学现状，工作室成员在充分讨论后，拟在课例研究中聚焦以下问题。

① 十字交叉线在历史上是如何出现的？为什么要引入十字交叉线？

② 学生在初中阶段已经学习了因式分解的提公因式法、公式法、分组分解法等，为什么还要学习十字相乘法？

③ 在因式分解中如何从二次项系数为 1 过渡到系数不为 1？

2. 历史研究

针对执教者的疑惑，研究者查阅了 1830—1930 年间出版的多种美国代数教科书，发现多项式的乘法大多采用竖式运算，例如$(x+a)(x+b)$，其竖式乘法如图 1 所示[2]。这种做法与两位数和两位数相乘的方法类似，每个数的个位都要乘另一个数的十位。

对于二次三项式的因式分解，早期的教科书给出了多种方法，十字相乘法只是其中的一种。对于形如 x^2+px+q 式子，大多数教科书采用试算法，只有极少数教科书将该情形与二次项系数不为 1 的情形统一起来，采用十字相乘法[3]；而对于形如 ax^2+bx+c（$a\neq1$）的二次三项式，大多数教科书采用了十字相乘法。谢尔顿（Sheldon）在其 1888 年出版的代数教科书对 $10x^2+19x+6$ 进行因式分解时指出：$10x^2$ 最可能的因式是 $5x$ 和 $2x$，6 最可能的因数是 2 和 3，需要考虑如何排列，方可使其交叉乘积的代数和为 $19x$，如图 2 所示[4]。而尼科尔森（J. W. Nicholson）在对 $6x^2+5x-4$ 进行因式分解时给出了交叉相乘、乘积相加的过程，如图 3 所示[5]。

$$\begin{array}{ll} x+a & \\ \underline{x+b} & \\ \underline{x^2+ax\qquad\;} & \\ \qquad bx & +ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab & \end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{l} 5x+2, \\ 2x+3. \end{array}$$

图 2

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ \underline{2x-1} \\ 8x \\ \underline{-3x} \\ +5x \end{array}$$

图 3

在我们所考察的美国代数教科书中，吉雷特（J. A. Gillet）最早采用了十字交叉线，在分解 $6x^2+7x-20$ 时，将二次项系数 6 分成 2 和 3 的乘积，常数项 -20 分成 5 和 -4 的乘积，并将它们以十字交叉线连接，如图 4 所示[6]。

e.g. Resolve $6x^2+7x-20$ into binomial factors.
$3\times2=6$, the coefficient of x^2;
$2\times(-4)=-8$;
$3\times5=15$;
$15+(-8)=7$, the coefficient of x;
$5\times(-4)=-20$, the constant term.
Hence $6x^2+7x-20=(2x+5)(3x-4)$.

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & 5 \\ 3 & & -4 \end{array}$$

图 4　吉雷特《初等代数》中的十字相乘法

乔斯林（L. P. Jocelyn）在分解 $10x^2-11x-6$ 时也给出了交叉相乘的过程，同时使用了十字交叉线，如图 5 所示[7]。对于二次项系数为 1 的二次三项式（如 $x^2+2x-48$），作者也采用了十字相乘法，如图 6 所示。霍克斯（H. E. Hawkes）分解 $2x^2+5x+3$ 的例子更明显地说明了十字相乘法与竖式乘法之间的关系，如图 7 所示[8]。大多数教科书在使用十字相乘法时都保留了字母，这与现行沪教版教科书的做法一致。在采用十字相乘法的教科书中，大多数教科书并未使用十字交叉线。

$$\begin{array}{ccc} 2x & - & 3 \\ 5x & + & 2 \\ \hline & & -15x \\ & & \underline{+\;4x} \\ & & -11x \end{array}$$

图 5

$$\begin{array}{ccc} x & + & 8 \\ x & - & 6 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{8x-6x=2x} \end{array}$$

图 6

$$\begin{array}{llll} ?x & + & ? & \\ \underline{?x} & \underline{+} & \underline{?} & \\ 2x^2 & + & ?x & \\ & + & ?x & +3 \\ \hline 2x^2 & + & 5x & +3 \end{array}$$

图 7

对历史上数学教科书的考察表明，十字相乘法和十字交叉线源于多项式的竖式乘法。

3. 教材分析

就国内现行初中教科书来看，只有沪教版教科书明确安排了十字相乘法的内容。人教版数学八年级上册在“整式的乘法与因式分解”章末“阅读与思考”中介绍了形如$x^2+(p+q)x+pq$ 二次三项式的因式分解方法，但并未给出“十字相乘法”之名。江苏科技版教科书设计了一个拼图活动：给出 3 种纸片，即边长为 a 的正方形、边长为 b 的正方形以及长和宽分别为 a 和 b 的长方形，然后通过计算 1 个边长为 a 的正方形、2 个边长

为 b 的正方形以及 3 个长方形拼成的大长方形的面积，从而得出 $a^2+3ab+2b^2=(a+2b)(a+b)$，但同样未给出“十字相乘法”之名。

在教学实践中，教师大致采用两种引入方式：一种是将 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 反过来，直接得到 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$；另一种则是让学生展开一组多项式，观察展开前后一次项系数和常数项的关系，发现规律，从而得出二次三项式的因式分解。这些数学教学设计既没有说明十字交叉线的由来，也没有说明十字交叉线的意义。

4. 初步教学设计

研究者提供相关资料和历史素材，执教者根据材料，结合实践经验初步完成教学设计。

（1） 教学目标

① 理解十字相乘法的概念。

② 能正确并熟练运用十字相乘法将形如 x^2+px+q 二次三项式分解因式。

（2） 教学重难点

① 教学重点：能正确并熟练运用十字相乘法将形如 x^2+px+q 二次三项式分解因式。

② 教学难点：对形如 x^2+px+q 分解因式时，准确找出 a、b，使 $ab=q$，$a+b=p$。

（3） 教学过程

① 复习引入。口答一组多项式乘法，如 $(x+3)(x+5)$；观察积的常数项与两个一次项系数的关系；总结 $(x+a)(x+b)$ 的结果；尝试因式分解 $x^2+(a+b)x+ab$。

② 探索新知。给出十字相乘法的定义，呈现十字交叉线图解，同时用十字交叉线讲评两道习题。首先把常数项分解成两个因数，再看这两个因数之和是否等于一次项的系数。

③ 例题讲解。如因式分解 $x^2-7x+12$，先分解哪一项？怎样分解？为什么这样分解？十字交叉线怎么画？详细讲解十字交叉线图。

④ 课堂练习。学生按例题分析的要求完成 6 道练习题。

⑤ 课堂小结。什么叫十字相乘法？分解的要点是什么？

（二） 研讨与设计

在 HPM 工作室的教学研讨中，首先由高校研究者解读相关的历史素材，接着由执教者介绍初步的教学设计与困惑，最后大家针对教学目标、教学重难点和教学过程的设计展开讨论。执教者的初步教学设计并没有体现数学史的融入，这说明执教者对历史材料的解读不到位。经过讨论，大家达成两个共识，一是引入部分可以借鉴江苏科技版教科书上的拼图活动；二是十字交叉线可以通过多项式竖式乘法引入。

据此，执教者对教学设计做出修正，修正后的教学设计如下。

1. 教学目标

① 学生通过探究、小组讨论，探索形如 x^2+px+q 二次三项式因式分解的基本方法（十字相乘法）。

② 学生通过自行尝试和小组互助的形式，探究运用十字相乘法进行因式分解的步骤和注意要点。

③ 通过数字教材和 HPM 的融入，进一步培养学生提出问题、解决问题的能力，形成从特殊到一般、从具体到抽象的思维品质。

2. 教学重难点

① 教学重点：正确使用十字相乘法进行因式分解。

② 教学难点：运用十字相乘法进行因式分解的步骤和注意要点。

3. 教学过程

教学过程仍然分成五个部分，并借助 AiSchool 平台来完成。

① 拼图活动。课前每个小组用一张面积为 x^2（$x\neq1$）的正方形纸片，若干张面积为 x 的长方形纸片以及若干张面积为 1 的正方形纸片拼接成一个大的长方形。同时阅读十字相乘法相关的文献。

② 探究活动。由拼图活动建立一些等式，利用多项式乘法进行竖式验证。提出问题：p 和 q 满足什么条件时，形如 x^2+px+q（p 和 q 为整数）二次三项式可以分解为两个一次因式的乘积？教师播放笛卡儿和待定系数法的数学小视频，让学生展示 x^2-5x+6 的因式分解。教师收集学生的解

题过程并介绍数学史上的几种分解方法。

③ 归纳整理。对 x^2+px+q (p 和 q 为整数) 进行因式分解，关键是将 q 分解为两个整数 a 和 b，使 $(x+a)(x+b)$ 一次项的和恰好是 px，可以通过以下方式验证一次项 (如图 8)。由此引出十字相乘法，再对 x^2+px+q 进行因式分解，强调方法、符号和书写格式。

$$\begin{array}{l} x \qquad +a \\ x \qquad +b \\ \hline bx+ax=(a+b)x \end{array}$$

图 8

④ 运用知识。每组编制四个形如 x^2+px+q (p 和 q 为整数) 二次三项式。拓展问题：先填空，再分解 (尽可能多的)。$x^2+(\qquad)x+60=$ ____________。

⑤ 课堂小结。学生针对本节课的内容提出问题，教师对十字相乘法的特征和方法加以总结。

(三) 实施与反馈

1. 第一轮教学

执教者在同一年级的一个班级进行了试教。课后，HPM 工作室部分研究者与执教者进行了研讨。针对“为什么要用十字交叉线”问题，研究者课后随机访谈了几名学生，其中 1 名学生回答“为了好看”，1 名学生认为“不需要十字交叉线”，1 名学生说“为了计算更精确”。由此可见，学生并不能理解使用十字交叉线的意义。事实上，前文已提及，对于形如 x^2+px+q 式子，十字相乘法的必要性并不明显。研究者建议增加二次项不为 1 的情形，让学生体会十字交叉线的作用。此外，研究者建议对视频内容做适当调整，因为播放微视频的目的主要是让学生了解待定系数法。

根据研讨结果，执教者决定从以下几个方面修改教学设计。

① 探究活动部分要求学生利用多项式乘法进行竖式验证 (为教学十字交叉线做铺垫)。

② 微视频播放的时间偏长，缩短叙述故事的部分内容。

③ 十字交叉线的引入部分增加讲解时间，让学生有充分的时间吸收。

④ 将运用知识部分的拓展问题更换为一道二次项系数不为 1 的题目。

基于试讲的情况以及研究者提出的建议，执教者再次对教学设计进行了修正，主要集中在以下几个方面。

① 教学过程由原来五个部分增为六个部分：发现问题—提出问题—解决问题—归纳整理—运用知识—课堂小结。

② 提出问题部分，学生通过课前阅读文献得到 x^2+6x+8 的因式分解方法。

③ 解决问题部分，增加了一个环节，因式分解 x^2-5x+6，学生利用待定系数法得到 $p=a+b$，$q=ab$ 的关系，尝试将一次项系数 -5 分解为两个数的和，常数项 6 分解为同样两个数的积。教师利用 PPT 演示，通过多项式竖式乘法，一步步引出十字交叉线。

④ 运用知识部分，将拓展问题改为：分解因式 $3x^2+10x-8$。

2. 第二轮教学

首先，教师让学生展示课前拼好的长方形，分别写出长方形的长、宽以及面积，这样就得出了一组形如 x^2+px+q 式子的因式分解。由此引出问题：形如 x^2+px+q (p 和 q 为整数) 二次三项式，如果不能直接利用完全平方公式来分解因式，那么该如何分解？接着，教师让学生展示课前阅读文献得到 x^2+6x+8 的因式分解方法，包括配方法、分组分解法和十字相乘法三种。最后，教师进行点评，让学生体会数学史上二次三项式因式分解方法的多样性和灵活性。

一组学生发现，利用他们手头的纸片，无法拼出一个长方形。教师顺势提出问题：p 和 q 满足什么条件时，x^2+px+q (p 和 q 为整数) 可以分解为两个一次因式的乘积？教师通过播放笛卡儿和待定系数法的数学小视频启发学生。大部分学生利用待定系数法，得到 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$，其中 $p=a+b$，$q=ab$。有些学生选择竖式乘法，也得出同样的结果。

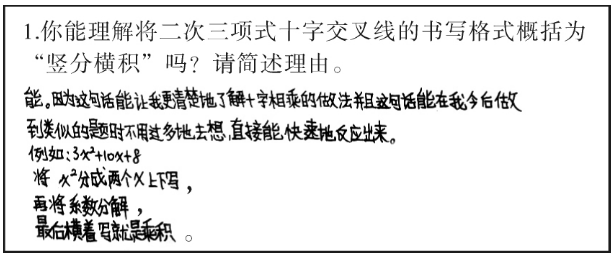
随后，学生利用待定系数法得到 $p=a+b$，

$q=ab$，尝试分解x^2-5x+6。在教师的引导下，学生总结：应该把常数项 6 分解为两个整数的乘积，因为整数分解为两个整数乘积的情形相对会少一些。教师总结因式分解的步骤：拆分常数项，验证一次项；根据多项式竖式乘法，通过“交叉相乘再相加”验证，故需引入十字交叉线。教师在书写结果时，引导学生要“竖分横积”。至此，十字相乘法应运而生。在练习巩固环节，教师设计了四个二次三项式的因式分解练习题。

课堂小结部分，教师让学生总结本节课所学内容。整节课数学史融入非常自然，顺利解决了执教者之前的困惑。

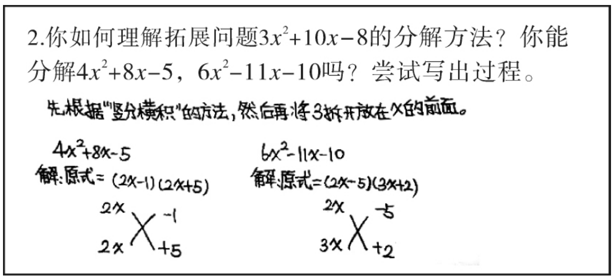
3. 学生反馈

课后，研究者对全班 36 名学生进行了问卷调查，并对其中 4 名学生进行了半结构式访谈。在问卷调查中，约 81%的学生认为，拼图活动有助于他们思考形如 x^2+px+q 二次三项式的因式分解问题。约 78%的学生理解了十字相乘法的重要性，约 72%的学生能正确理解十字交叉线的书写格式及意义（如图 9），认为十字交叉线是用来检验因式分解结果的正确性。对于因式分解中二次项系数不为 1 的测试题，学生的正确率约为 42%，可见对于二次项系数不为 1 的因式分解等教学难点，学生是有潜力突破的（如图 10）。


1.你能理解将二次三项式十字交叉线的书写格式概括为“竖分横积”吗？请简述理由。

能。因为这句话能让我更清楚地了解十字相乘的做法并且这句话能在我今后做到类似的题时不用过多地去想，直接能快速地反应出来。
例如：$3x^2+10x+8$
将 x^2分成两个x上下写，
再将系数分解，
最后横着写就是乘积 。

图 9


2.你如何理解拓展问题$3x^2+10x-8$的分解方法？你能分解$4x^2+8x-5$，$6x^2-11x-10$吗？尝试写出过程。

先根据“竖分横积”的方法，然后再将3拆开放在x的前面。

$4x^2+8x-5$
解：原式$=(2x-1)(2x+5)$

$6x^2-11x-10$
解：原式$=(2x-5)(3x+2)$

图 10

在半结构式访谈中，多名学生提到，虽然已经学习了因式分解的提公因式法、公式法、分组分解法等，但是十字相乘法能够化繁为简，更简便地进行因式分解；同时，利用十字交叉线进行相乘再相加，便于验算。不少学生提到，他们对利用微视频讲解数学家的故事与思想方法印象深刻，有助于他们了解十字相乘法的由来与用法，生动有趣。同时，十字相乘法帮助他们关注因式分解中二次项系数、一次项系数、常数项之间的联系，启发理性思考，从多角度看待事物之间的联系。

4. 同行评议

课后，研究者和执教者一起进行了深入研讨。研究者指出了本节课的一些优点：首先是前置的两个学习活动，一是拼图活动，让学生有充分的时间动手操作；二是阅读历史文献，能够拓宽学生眼界。其次是能够将十字相乘法和之前学过的完全平方公式法及后面的分组分解法联系起来，体现数学知识之间的联系。最后是使用微视频，能够清楚地向学生介绍待定系数法，渗透数学思想。

从整个教学过程来看，数学史的运用方式有附加式、复制式和顺应式。其中，附加式用于通过微视频介绍笛卡儿的生平；复制式用于待定系数法的使用以及课堂上展示历史文献中对于二次三项式的因式分解方法；顺应式用于类比两位数乘法的竖式计算，对多项式竖式乘法进行适当的改变，便于学生理解。

本节课体现了数学史的以下价值。一是知识之谐。学生经历从两位数的竖式乘法到二项式的竖式乘法，再到十字相乘法的过程，使十字相乘法和十字交叉线的出现自然而然。二是方法之美。学生阅读历史文献，感受历史上因式分解方法的多样性；让学生了解待定系数法，并利用它探究形如 x^2+px+q 二次三项式可分解的条件。三是能力之助。课前阅读历史文献，有助于培养学生的阅读能力和归纳能力。四是文化之魅。利用微视频让学生了解因式分解的历史和数学家笛卡儿的思想。五是德育之效。激发学生的兴趣，让学生感悟数学背后的人文精神。

本节课也存在不足之处，如没有对十字相乘法与配方法、分组拆分法等进行对比，从中得出不同方法的优劣性和选择的适切性。

（四）整理与写作

1. 教学反思

第二轮教学后，执教者围绕“十字相乘法”的教学，进行了以下几个方面的反思。

① 拼图活动引导学生思考一类二次三项式的分解问题，符合学生的认知规律；借助待定系数法引出十字相乘法，通过竖式乘法解释十字交叉线，过程均比较自然。

② 经过本次教学，真正借鉴和重构历史，引导学生从二次项系数为1逐步过渡到二次项系数不为1的因式分解。

③ 在课堂教学融合数字教材讲解、微视频播放、AiSchool平台讲解习题等内容，带动教学内容的数字化呈现，提高课堂教学效率。

④ HPM视角下的数学教学，带领学生走进历史、走进数学，帮助学生理解数学知识和数学方法，获得“做数学”的乐趣，感悟数学家的理性精神。

2. 课例呈现

课例由教师和研究者共同撰写，共分为五个部分：一是引言，说明选题的重要性和必要性；二是史料的选取，交代与教学内容密切相关的史料和课堂上的运用方式；三是教学设计与实施，按照教学环节展开；四是学生反馈，对问卷调查的结果进行统计和分析；五是结语，说明本节课中数学史对学生的教育价值、教师的收获和反思。

三、教学启示

“十字相乘法”课例经历了选题与准备、研讨与设计、实施与反馈、整理与写作四个环节，最终形成一个HPM课例。从课例研究中，我们得到以下启示。

1. 注重教育取向，深入史料研究

数学史揭示了知识发生和发展的动因，为师生解决疑难问题提供了答案，为教学设计提供了思想的启迪。因此，教育取向的数学史研究是HPM课例开发的基础，没有对历史的深刻理解，就无法产生高水准的HPM课例。

2. 注重教育实际，立足课堂教学

HPM课例研究扎根于一线教学实践，关注数学史与课堂教学的有效融合。课堂教学应以学生为本，因此，教师在进行教学设计与研讨时，应该将学生心理发展顺序与知识的历史顺序、逻辑顺序相互统一。同时，教师需要考虑在有限的课堂教学时空里最优化地呈现数学史与数学教学的相关内容，可以根据史料编制数学例题，也可以借助微视频辅助拓展新知识。

3. 注重师生反馈，加强交流合作

在课例试讲、正式授课过程中，教师需要关注学生的课堂表现与课堂前后的反馈，如对学生进行问卷调查与访谈，能够及时了解学生的基本情况，便于教师有效地调整教学。同时，教师需要关注在每个研究阶段的行动与反思，如教学观摩与研讨、分析教学反思等，能够及时了解他们在知识、信念与能力三个维度上的发展。最后，HPM课例研究需要加强HPM学习共同体的交流与合作，促进研讨与设计、实施与评价两个环节的良性互动。

参考文献：

[1] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育［M］. 北京：科学出版社，2017.

[2] EUGENE SMITH D，WENTWORTH G. Academic algebra［M］. Boston：Ginn & Co.，1913.

[3] 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的“因式分解”内容［J］. 中学数学月刊，2016（11）：36-39.

[4] SHELDON. Complete algebra［M］. New York：Sheldon & Co.，1888.

[5] NICHOLSON J W. An elementary algebra［M］. New Orleans：F. F. Hansell & Brothers，1888.

[6] GILLET J A. Elementary algebra［M］. New York：Henry Holt & Co.，1896.

[7] JOCELYN L P. An algebra for high schools and academies［M］. Philadelphia：Sheldon & Co.，1902.

[8] HAWKES H E. Complete school algebra［M］. Boston：Ginn & Co.，1919.