“奇、偶函数”考源

汪晓勤

（华东师范大学数学系　200241）

很多年以前，曾经有位中学教师问笔者：为什么具有性质 $f(-x)=f(x)$ 的函数 $f(x)$ 叫“偶函数”，具有性质 $f(-x)=-f(x)$ 的函数 $f(x)$ 叫“奇函数”？笔者的第一反应是，应该从函数图像的对称性上去解释．结果，那位教师觉得这样的解释并不令人信服．

事实上，笔者的解释确实是错误的，错误的原因是把那位教师的问题当作“逻辑上的为什么”(logical why)而不是“历史上的为什么”(historical why)来考虑了．认识到这一点也就能明白：两个术语的历史考源成了回答问题的唯一途径．

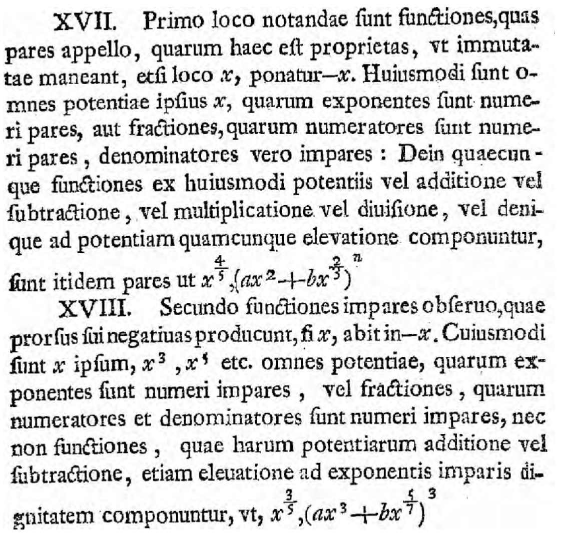
那么，是谁最早引入“偶函数”和“奇函数”这两个名称？命名的依据是什么？早期数学家在讨论奇、偶函数性质时遇到怎样的困惑？两个名词有着怎样的传播路径？迄今，这些问题似乎并没有清晰的答案．本文试图对它们作出回答，并得出历史研究的教学启示．

1　最早的奇、偶函数定义

1727 年，年轻的瑞士数学家欧拉(L. Euler, 1707－1783)在提交给圣彼得堡科学院的旨在解决“反弹道问题”[1] 的一篇论文（原文为拉丁文）中，首次提出了奇、偶函数的概念．

若用 $-x$ 代替 x，函数保持不变，则称这样的函数为偶函数（拉丁文 functiones pares）．欧拉列举了三类偶函数：

- $f(x)=x^{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；
- $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$（m 为偶数，n 为大于 1 的奇数）；
- 上面两类幂函数经过加、减、乘、除、乘方运算所得到的函数及其任意次幂，如 $f(x)=(ax^2+bx^{\frac{2}{3}})^n$（$a,b$ 为常数，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）．



XVII.　Primo loco notandae ſunt functiones, quas pares appello, quarum haec eſt proprietas, vt immutatae maneant, etſi loco x, ponatur $-x$. Huiusmodi ſunt omnes potentiae ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri pares, aut fractiones, quarum numeratores ſunt numeri pares, denominatores vero impares: Dein quaecunque functiones ex huiusmodi potentiis vel additione vel ſubtractione, vel multiplicatione vel diuiſione, vel denique ad potentiam quamcunque elevatione componuntur, ſunt itidem pares ut $x^{\frac{4}{5}}$, $(ax^2+bx^{\frac{2}{3}})^n$

XVIII.　Secundo functiones impares obſeruo, quae prorſus ſui negatiuas producunt, ſi x, abit in $-x$. Cuiusmodi ſunt x ipſum, x^3, x^5 etc. omnes potentiae, quarum exponentes ſunt numeri impares, vel fractiones, quarum numeratores et denominatores ſunt numeri impares, nec non functiones, quae harum potentiarum additione vel ſubtractione, etiam eleuatione ad exponentis imparis dignitatem componuntur, vt, $x^{\frac{3}{5}}$, $(ax^3+bx^{\frac{5}{7}})^3$

欧拉论文片段

若用 $-x$ 代替 x，函数变号，则称这样的函数为奇函数（拉丁文 functiones impares）．欧拉也列举了三类奇函数：

- $f(x)=x^{2n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；
- $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$（m,n 均为奇数，$n>1$）；
- 上面两类幂函数经过加、减、乘、除、乘方运算所得到的函数及其奇数次幂，如 $f(x)=(ax^3+bx^{\frac{5}{7}})^n$（$a,b$ 为常数，n 为奇数）．

接下来，欧拉讨论了奇偶函数的性质：

- 两个奇函数的乘积为偶函数，如：$x^3\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{10}{3}}$；
- 一个奇函数与一个偶函数的乘积为奇函数，如：$x\cdot\sqrt{a^2+x^2}$；

此外，欧拉还引入倒函数的概念．若 $f(x)\cdot f(-x)=1$，则称函数 $f(x)$ 为倒函数．例如函数

---

① 函数记号 $f(x)$ 是欧拉后来给出的，这里，为了读者阅读方便，我们使用了这个记号．

$$f(x)=\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^n$$

欧拉指出，指数函数 $f(x)=a^x$ 以及有关复合函数 $f(x)=(a^2+x^2)^{x^3}$ 都是倒函数；更一般地，以偶函数为底、奇函数为指数的幂指函数为倒函数.

法国数学家达朗贝尔(J. R. D'Alembert, 1717－1783)在狄德罗(D. Diderot, 1713－1784)主编的《大百科全书》第7卷(1757年出版)关于函数的词条中说："古代几何学家，更确切地说是古代分析学家，将某个量 x 的不同次幂称为 x 的函数."[2] 类似地，法国数学家拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736－1813)在《解析函数论》(1797)开篇中也说，早期分析学家们使用"函数"这个词，只是表示"同一个量的不同次幂"，后来，其涵义被推广，表示"以任一方式得自其他量的所有量"，莱布尼茨和约翰·伯努利最早采用了后一涵义[3]. 在1727年的论文中，欧拉在讨论奇、偶函数时确实没有涉及任何超越函数. 因此，最早的奇、偶函数概念都是针对幂函数以及相关复合函数而言，欧拉提出的"奇函数"、"偶函数"之名显然源于幂函数的指数或指数分子的奇偶性：指数为偶数的幂函数为偶函数，指数为奇数的幂函数为奇函数.

2 《无穷分析引论》中的奇、偶函数概念

1748年，欧拉出版他的数学名著《无穷分析引论》，将函数确立为分析学的最基本的研究对象. 在第一章，他给出了函数的定义、对函数进行了分类，并再次讨论了两类特殊的函数——偶函数和奇函数.

欧拉给出的奇、偶函数定义与1727年论文中的定义实质上并无二致，但他讨论了更多类型的奇、偶函数，也给出了奇函数的更多的性质[4]. 在偶函数情形中，我们看到欧拉：

(1)将 $f(x)=x^{2n}$ 中的 n 扩充到了负整数；

(2)将指数为偶数或偶分子奇分母分数的幂函数"经过加、减、乘、除、乘方运算所得到的函数及其任意次幂"扩充为满足条件的幂函数"以任何方式组成的函数"，由此可以推断，欧拉此时已经考虑到了超越偶函数(至少是像 $y=a^{x^2}$ 这样的函数)，尽管他并没有给出具体的例子；

(3)给出更多无理函数的例子：

$$Z=\frac{a+bz^{\frac{2}{7}}+cz^{-\frac{4}{5}}+dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha+\beta z^{\frac{2}{3}}+\gamma z^{-\frac{2}{5}}+\delta z^{\frac{4}{7}}};$$

(4)增加了由方程所确定的偶函数(并未给出隐函数之名)，如由二次方程 $y^2=ax^4y+bx^2$ 确定了 x 的(二值)偶函数 $y=f(x)$；

(5)将 z 的偶函数另外定义为 y 的函数 $Z=f(y)$ 和 $y=z^2$ 的复合函数.

奇函数情形相类似.

关于奇、偶函数的性质，欧拉增加了奇函数的性质：

(1)如果 y 是 z 的奇函数，那么，z 也是 y 的奇函数，用我们今天的语言来表达就是：一个奇函数的反函数仍为奇函数(欧拉并未考虑到反函数的存在性问题)；

(2)在一个关于 y 和 z 的二元方程中，如果各项中 y 和 z 的指数之和同为奇数或同为偶数，则 y 为 z 的奇函数，如，由方程 $y^2=ayz+bz^2+c$ 所确定的函数 $y=f(z)$ 是 z 的奇函数.

3 欧拉的困惑和失误

欧拉认为，函数 $f(x)=x\cdot\sqrt{a^2+x^2}$ 与函数 $g(x)=\sqrt{a^2x^2+x^4}$ 是等价的，所以，尽管奇函数与偶函数的乘积为奇函数，但有时这样的乘积也可能会是偶函数.

鉴于此，欧拉提出，要使一个偶函数的幂仍为偶函数，就必须对幂指数进行限制，特别，如果指数为分数，那么它的分母就不能为偶数. 欧拉举了一个例子：函数

$$f(x)=\frac{a^2}{x^2}+2a+x^2\ (a\text{ 为常数})$$

显然为偶函数，但函数

$$f(x)=\left(\frac{a^2}{x^2}+2a+x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{a}{x}+x$$

为奇函数.

类似地，在将偶函数定义为函数 $Z=f(y)$ 和 $y=z^2$ 的复合函数时，欧拉特别增加了一个限制条件：$Z=f(y)$ 中不能含有 $\sqrt{y}$ 之类的根式. 欧拉举了一个反例：函数 $Z=y+\sqrt{ay}$ (a 为常数)和 $y=z^2$ 的复合函数并不是 z 的偶函数，因为复合的结果是 $Z=z^2+z\sqrt{a}$.

显然，欧拉未能区别函数 $f(x)=x$ 和 $f(x)=\sqrt{x^2}$.

4 法文和英文中的"奇、偶函数"

虽然达朗贝尔在《大百科全书》中给出了函数

的定义，并介绍了有理函数、无理函数、齐次函数、相似函数[2]，但只字未提“奇函数”和“偶函数”这两种特殊函数.

1786 年，法国人裴奇(F. Pezzi)将《无穷分析引论》第 1 卷译成了法文，“奇函数”和“偶函数”分别被译为“fonction paire”和“fonction impaire”，这是两个数学名词在法文中的首次出现.

1792 年，法国数学家勒让德(A. Legendre，1752—1833)向科学院提交论文“关于椭圆超越性”[5]，讨论形如 $\int \frac{P(x)dx}{R(x)}$ 的积分. 其中 $P(x)$ 为 x 的多项式，而 $R(x)$ 是形如 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ 的无理函数. 勒让德将只含 x 的偶次幂的多项式

$$P(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

称为 x 的偶函数，将只含 $\sin\varphi$ 的偶次幂的函数

$$P(\sin\varphi)=a_0+a_2\sin^2\varphi+a_4\sin^4\varphi+\cdots+a_{2n}\sin^{2n}\varphi$$

称为“$\sin\varphi$ 的偶函数”. 这里，勒让德可能沿用了裴奇的译名或直接翻译了欧拉的名词. 这里我们需要指出的是，将“偶函数”、“奇函数”的拉丁文翻译成对应的法文，并不会产生不同的译法，因为最迟在笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)的《几何学》中已经有了法文的“偶数”(nombres pairs)和“奇数”(nombres impairs)之名[6].

然而，拉格朗日在 1797 年出版的《解析函数论》中尽管谈到了函数概念的历史演变过程，给出了函数概念的定义，但并未提及“奇函数”和“偶函数”概念. 可以推断，“奇函数”、“偶函数”这两个名称在 18 世纪末的法国并未得到普遍使用；或者说，函数的奇偶性还没有受到当时法国数学家的普遍关注.

1796 年，法国数学家拉贝(J. B. Labey，1750？—1825)将《无穷分析引论》全书译成法文[7]，其中，拉贝同样将“偶函数”和“奇函数”分别译为“fonction paire”和“fonction impaire”.

1809 年，苏格兰数学家华里司(W. Wallace，1768～1843)将勒让德的论文译成英文[8]，发表在《数学文库》(Mathematics Repository)上. 华里司很自然地将“function paire”译为“even function”. 这是“even function”这个词在英语世界中的首次出现. 不过，在英国著名数学家胡顿(C. Hutton，1737—1823)于 1815 年出版的《数学与哲学辞典》中，虽然有“函数”和“微积分中的函数”这两个词条[9]，但奇、偶函数概念却付之阙如. 而德摩根的《代数学基础》[10](伟烈亚力和李善兰译为《代数学》)虽对函数进行了清晰地分类，但仍只字未提奇、偶函数. 在美国，数学家罗密士(E. Loomis，1811—1889)的微积分畅销书《解析几何与微积分基础》[11](李善兰与伟烈亚力译为《代微积拾级》)虽然给出了隐函数、显函数、增函数、减函数之名，但同样不含奇、偶函数之说. 这说明，奇、偶函数概念以及华里司所引入的新名词在 19 世纪上半叶的英语世界里尚未得到广泛传播和普遍关注. 相应地，两个概念也就不见于中国晚清的西方数学译著. 直到 20 世纪初，两个概念才传入中国. 1938 年出版的《算学名词汇编》和 1945 年出版的《数学名词》中都收录了两个名词.


INTRODUCTION

À

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

PAR LÉONARD EULER;

Traduite du latin en français, avec des Notes & des Éclaircissemens,

PAR J. B. LABEY,

Professeur de Mathématiques aux Écoles Centrales du Département de la Seine.

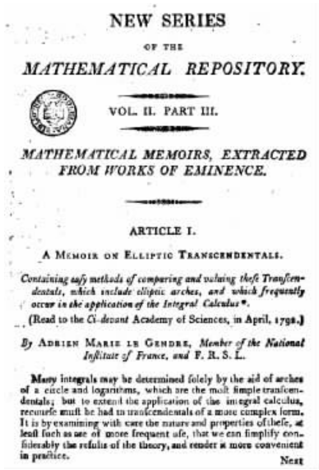
TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez BARROIS, aîné, Libraire, rue de Savoye, nº 23.

L'An Quatrième de la République Française. (1796.)

《无穷分析引论》法文完整版(1796)书影


NEW SERIES

OF THE

MATHEMATICAL REPOSITORY.

VOL. II. PART III.

MATHEMATICAL MEMOIRS, EXTRACTED FROM WORKS OF EMINENCE.

ARTICLE I.

A MEMOIR ON ELLIPTIC TRANSCENDENTALS.

Containing easy methods of comparing and valuing these Transcendentals, which include elliptic arches, and which frequently occur in the application of the Integral Calculus.*

(Read to the *Ci-devant* Academy of Sciences, in April, 1792.)

By ADRIEN MARIE LE GENDRE, *Member of the National Institute of France, and* F. R. S. L.

Many integrals may be determined solely by the aid of arches of a circle and logarithms, which are the most simple transcendentals; but to extend the application of the integral calculus, recourse must be had to transcendentals of a more complex form. It is by examining with care the nature and properties of these, at least such as are of more frequent use, that we can simplify considerably the results of the theory, and render it more convenient in practice.

Next

《数学文库》书影

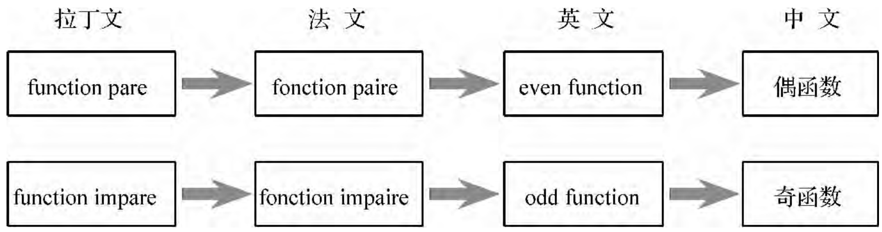
5 结语

通过对历史文献的考察，我们可以得出以下结论：

(1)欧拉最早命名"奇函数"和"偶函数"，其依据是幂函数的指数的奇偶性；最初的奇偶函数概念只是针对代数函数而言，尽管欧拉后来有所扩充，但仍未涉及三角函数、反三角函数等.

(2)以欧拉为代表的早期数学家在偶函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的理解上存在困惑，将其与 $y=x$ 混为一谈.

(3)"奇函数"、"偶函数"这两个名称的传播路径如下图所示：



据此，我们获得如下启示：

(1)"为什么称一个数学概念为某某"，这样的问题毫无例外都属于"历史上的为什么"，而不是"逻辑上的为什么"，这是数学教学不能割裂数学历史的证据之一.

(2)"偶函数"和"奇函数"这两个名词最初源于幂函数的指数的奇偶性，但今天，它已不再局限于代数函数，三角函数、反三角函数(注意，中学里我们并不考虑函数的幂级数表达式)这样的超越函数与"奇"、"偶"之间并没有直接的关联，名称与内涵实际上已经发生了分离. 这就是数学上所谓的"旧瓶装新酒现象". 了解这种现象，有助于我们更好地理解和讲授数学概念.

(3)早期数学家在函数奇偶性理解上的困惑源于对函数概念理解的局限性. 历史是一面镜子，历史相似性的存在告诉我们，如果我们能够走进另一个时代、另一种文化的数学家的心灵之中，那么我们更能从容地走进同一个时代、同一种文化的学生的心灵之中.

参考文献

1 Euler, L. Problematis traiectoriarum reciprocarum solution [J]. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 1729, 2: 90—111

2 D'Alembert, J. R.. Fonction [C]. In: D. Diderot (ed.). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (Vol. 7). *http://fr.wikisource.org/wiki/L% E2%80% 99Encyclop% C3% A9die/ Volume _7 # FONCTION*

3 Lagrange, J. L. *Théorie des fonctions analytiques* [M]. Paris: De L' Imprimerie de la République. 1797. 1—2

4 Euler, L. Introductio in Analysin Infinitorum [M]. Lugduni: Apud Bernuset, 1797

5 Legendre, A. M. *Memoire sur les transcendantes elliptiques* [M]. Paris: chez le C. du Pont et le C. Firmin Didot, 1792

6 Descartes, R. *La Geometrie* [M]. Paris: A. Hermann, 1885

7 Euler, L. *Introduction à l'analyse infinitésimale* (traduite par J. B. Labey) [M]. Paris: chez Barrois, 1796

8 Legendre, A. M. A memoir on elliptic transcendentals [J]. *Mathematical Repository*, new series, 1809, 2: Part III, 1—34; 1814, 3: Part III, 1—45

9 Hutton, C. *A Mathematical & Philosophical Dictionary* [M]. London: S. Hamilton, 1815. 560—561

10 De Morgan, A. *Elements of Algebra* [M]. London: Taylor & Walton, 1837

11 Loomis, E. *Elements of Analytic Geometry and of Differential and Integral Calculus* [M]. New York: Harper & Brothers, 1851

更正 我刊2014年第2期所刊文章"运用天球模型画太阳周日视运动轨迹并研判"的作者单位应为"安徽省潜山野寨中学 246309"，特此更正并向汪和平老师致歉！