数学史与高等数学教学*

汪晓勤
（华东师范大学　数学系，上海　200062）

摘　要　文章考察了三等分角问题、笛卡儿叶形线、光的折射定律、化圆为方问题等四个历史名题与微积分中相关知识点之间的联系。由此说明，西方学者所总结的数学史对教学中的各种作用，都可以在高等数学教学中得到体现。大学数学教学取向的历史研究理应得到人们的重视。

关键词　割圆曲线　叶形线　折射定律　圆柱螺线
中图分类号　G642.0　　文献标识码　A

英国数学史家福弗尔（J. Fauvel，1947—2001）曾总结出应用数学史于数学教学的十五种理由，其中有[1]：（1）增加学生的学习动机；（2）改变学生的数学观；（3）因为知道并非只有他们自己有困难，因而会感到欣慰；（4）使数学不那么可怕；（5）有助于保持对数学的兴趣；（6）给予数学以人文的一面；（7）通过古今方法的对比，确立现代方法的价值；（8）为学生提供探究的机会；（9）过去的发展障碍有助于解释今天学生的学习困难。笔者曾提及，HPM视角下的高等数学教学可以体现（2）、（4）、（5）、（6）等方面的作用[2]。本文在此基础上，以四则数学史材料为例，进一步分析数学史在高等数学教学上的各种作用。

一、古希腊几何难题与两个重要极限之一

三等分角和化圆为方问题都是公元前5世纪古希腊辩士学派提出的几何难题，古希腊数学家以直尺和圆规来解这两个问题的尝试一次又一次地以失败告终。他们渐渐意识到，必须借助于尺规以外的其它方法才能解决它。

第一个意识到这一点的就是希皮亚斯（Hippias）。他是伯罗奔尼撒的厄里城人，是苏格拉底的同代人。他活跃于公元前5世纪后半叶，是著名的辩士学派的一名成员。据说他著述颇丰，涉及数学和演讲术，可惜都失传了。苏格拉底将他描述成“英俊、博学、自大、肤浅”。

希皮亚斯为解三等分角问题发明了割圆曲线这一新曲线。如图1所示，ABCD为一正方形，BED是以A为圆心的四分之一圆弧。假设半径绕点A从AB位置匀速转动到AD位置，而在相同时间内，直线BC从BC位置匀速平移到AD位置（端点B始终沿BA运动），则平动直线与转动半径的交点轨迹就是割圆曲线。因为平动直线与转动半径同时出发，经过同样的时间T同时到达AD位置，设其速度和角速度分别为v和ω，在对应于点F处，所用时间为t，则有

$$\frac{\omega t}{\omega T}=\frac{\angle BAE}{\angle BAD},\ \frac{vt}{vT}=\frac{BB'}{AB},\ \frac{\angle BAE}{\angle BAD}=\frac{BB'}{AB}$$

于是得

* 收稿日期　2008—04—02
作者简介　汪晓勤（1966—）男，浙江开化人，教授，主要从事数学史与数学教育研究。

$$\frac{\angle EAD}{\angle BAD}=\frac{FH}{AB} \tag{1}$$

于是，要三等分 $\angle EAD$，只需取 FH 的三等分点 F'（这是尺规能完成的），过 F' 作 $B''C''$ 平行于 AD，交割圆曲线于 L，连接 AL，交 BED 于 N，则有

$$\frac{\angle EAD}{\angle NAD}=\frac{FH}{LM}=\frac{FH}{F'H}=3$$

因此，AN 三等分 $\angle EAD$。但要用割圆曲线来解决化圆为方，问题就来了：由于转动半径与平动线段在 AD 位置完全重合而不再交于一点，割圆曲线与 AD 的交点 G 在哪里呢？这是希皮亚斯割圆曲线受到后世希腊数学家质疑的原因[3]。设 $\angle EAD=\theta$，$AF=\rho$，$AB=a$，则由（1）得：

$$\rho=\frac{2a\theta}{\pi\sin\theta} \tag{2}$$

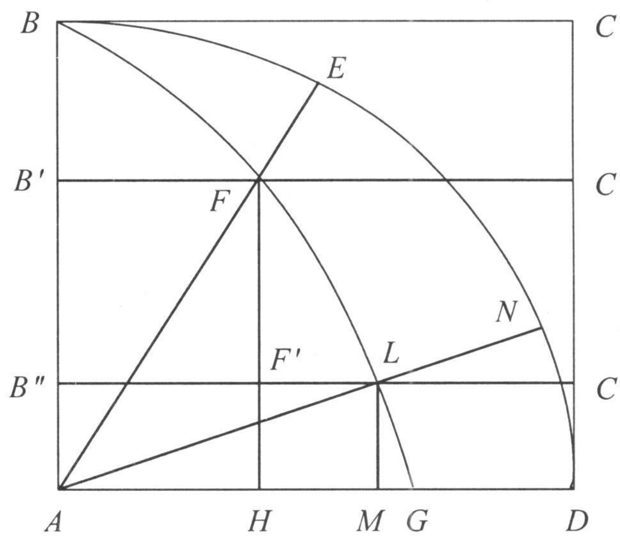

图 1

这就是割圆曲线的极坐标方程。由极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，我们有

$$AG=\lim_{\theta\to 0}\rho=\lim_{\theta\to 0}\frac{2a\theta}{\pi\sin\theta}=\frac{2a}{\pi} \tag{3}$$

于是，圆周率 π 等于两条线段 $2a$ 与 AG 之比，从而解决化圆为方问题。

但古希腊数学家都患上了“无穷恐惧症”，他们不敢直面实无穷，更不知道极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。为了得到 AG，希皮亚斯和迪诺斯特拉图（Dinostratus，圆锥曲线发明者梅内克缪斯的弟弟，鼎盛于公元前4世纪中叶）只能惨淡经营、拐弯抹角、小心翼翼地求助于繁琐的穷竭法。

二、笛卡儿叶形线与隐函数的导数

17世纪，由于研究光在曲面上的反射、曲线运动的速度以及曲线的夹角的需要，曲线的切线问题成为数学家们十分关注的问题。法国数学家费马（P. de Fermat，1601－1665）给出了如下方法：如图2，设曲线上有一点 $P(x, y)$，在点 P 附近取一点 $Q(x+e, f(x+e))$。假设点 P 处的切线 PT 已作出，且交 x 轴于点 A，PB 为 x 轴的垂线，B 为垂足。17世纪数学家将 AB 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的次切距。显然，如果我们能求得 AB 之长 s，也就确定了切线

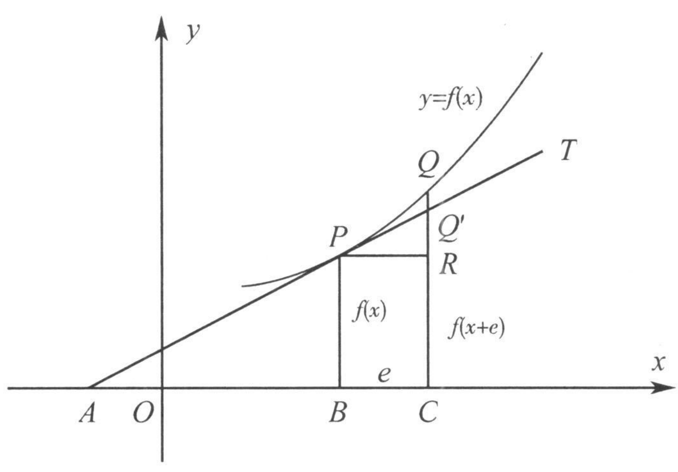

图 2

PT 的位置。利用直角三角形的相似性，得 $\frac{AC}{AB}=\frac{Q'C}{PB}$，当点 Q 离点 P 很近时，$Q'C\approx QC$，故得 $\frac{AC}{AB}\approx$

$\frac{QC}{PB}$,即 $\frac{s+e}{s}\approx\frac{f(x+e)}{f(x)}$,于是

$$s\approx\frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}=\frac{f(x)}{[f(x+e)-f(x)]/e}$$

在等式右边的分母里,约去 e,然后舍弃仍然含有 e 的项,即得 s 的精确值。如果运用极限工具,费马的方法相当于说,切线 PT 的斜率等于割线 PQ 的斜率当 $e\to 0$ 时的极限,即

$$\frac{f(x)}{s}=\lim_{e\to 0}\frac{f(x+e)-f(x)}{e}=f'(x)$$

同时代法国数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596—1690)在其《几何学》中则通过确定法线来求切线。如图3,以 x 轴上一点 $C(t,0)$ 为圆心、以线段 CP 为半径作圆,与曲线 $y=f(x)$ 交于点 $P(x,y)$ 附近的另一点 Q。当点 Q 和 P 重合,即方程 $(x-t)^2+f^2(x)=r^2$ 有二重根时,PC 就是曲线在点 P 处的法线,过 P 且垂直于 PC 的直线即为所求切线。笛卡儿写道:“我敢说,这是我所知道的、甚至也是我一直想要知道的最有用的、最一般的问题”[4],其自豪感跃然纸上。因此,当他了解到有一位名叫费马的律师兼图卢兹议会的议员竟“不务正业”,也做起数学研究,并设计了一种求切线的方法时,心中顿时感到鄙夷不屑,觉得人家的方法不用说也是低劣的,无法和自己的方法相提并论。于是,他向费马提出了一道难题:求方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所表示的曲线的切线。显然,笛卡儿的出发点不过是吓吓费马而已——上述曲线的图形他自己一开始连画都画不出来,更何况那个“业余爱好者”呢?也许,刚拿到这个问题时,费马真的傻了眼。但出乎笛卡儿意料的是,费马最终用自己的方法求得了该曲线的切线[5]。在事实面前,笛卡儿终于承认,费马的方法比自己的更好。业余数学家战胜了专业数学家!

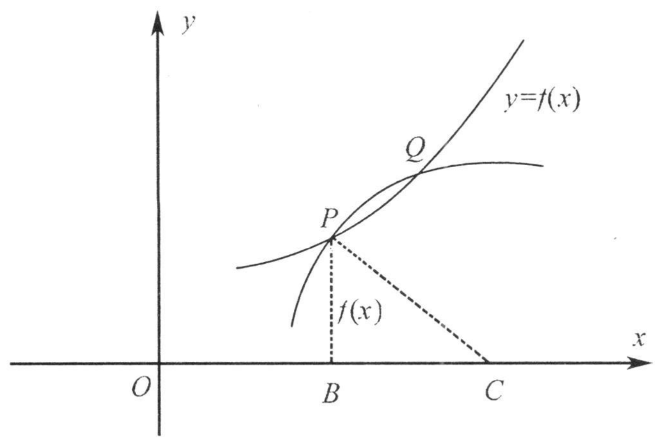

图 3

三、光的折射定律与函数的极值

古希腊人很早就知道了光的反射定律(如公元前3世纪的欧几里得),但最早研究折射现象的是托勒密(C. Ptolemy,前2世纪)。托勒密分别就空气和水、水和玻璃、玻璃和空气,对光的入射角和折射角进行测量,得出入射角与折射角成正比的错误结论。到了11世纪,阿拉伯物理学家和数学家阿尔·海森(Al-Hazen, 965?—1038)重新对折射现象进行研究。他制作仪器,测量入射角和折射角,发现托勒密的结论是错误的,但他自己未能发现折射定律。13世纪,德国学者维特罗(Witelo, 1235—1275)在阿尔·海森的基础上,进一步研究折射现象,但他仍然同样未能发现折射定律。16世纪初,德国著名天文学家和数学家开普勒(J. Kepler, 1571—1630)在研究望远镜的光学原理时,再次对折射现象进行研究。在《折光》(1611)中,开普勒给出[6]:对于两种固定的媒质,当入射角(i)较小时,入射角和折射角(r)之间的关系是 $i=nr$($i<30°$,n 为常数)。当光线从空气进入玻璃时,$n=\frac{3}{2}$。显然,与托勒密一样,开普勒的结果只是近似的,他还是没有发现真正的折射定律。

1601年,英国数学家哈里奥特(T. Harriot, 1560—1621)发现了折射定律,但没有发表;约20年后,荷兰物理学家斯内尔(W. Snell, 1591—1626)也独立发现了该定律,但也没有发表。哈里奥特和斯内尔都是通过实验得出该定律的,而没有给出理论的推导。最早正式发表折射定律的是笛卡儿。

在其出版于1637年的《折光》(《方法论》的附录之一)中,笛卡儿给出了该定律,但遗憾的是,笛卡儿的证明却是错误的!笛卡儿是否抄袭了斯内尔,学术界尚有争议。费马读了笛卡儿的著作后,对该定律进行了攻击。试想,错误的推导怎么会得出正确的结论呢?费马不相信笛卡儿的定律是正确的。直到24年后,费马利用他的最小时间原理才导出了折射定律。

1700余年的漫长而曲折的历史折射出了折射定律的艰难。1684年是一个值得纪念的年份,这一年,德国数学家莱布尼茨(G.W. Leibniz,1646—1716)发表了历史上第一篇微积分论文。论文中,莱布尼茨小试牛刀,给出了微分的一个应用。在两种媒质中分别有点P和Q,光从P出发到达Q,问光在界面上的入射点O在何处,光用时最短?

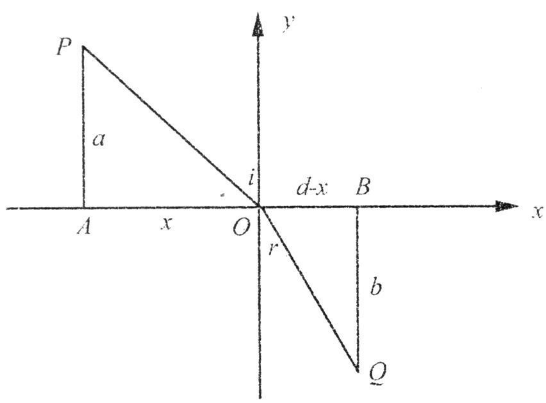

图4

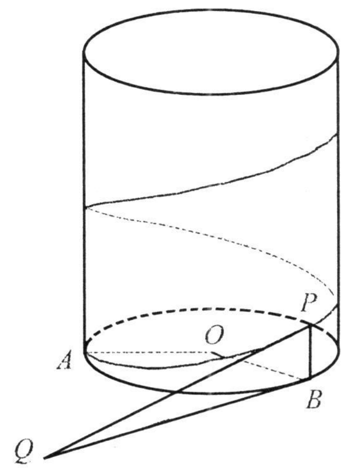

图5

设点P和Q到界面的垂线分别为PA和QB,垂足为A、B。PA=a,QB=b,AO=x,AB=d,两种媒质中的光速分别为v_1和v_2,于是,光从P到Q所需时间为

$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$$

由

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\frac{1}{v_1}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\frac{1}{v_2}=0$$

得

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}$$

这就是折射定律。莱布尼茨感叹:“熟悉微积分的人能够如此魔术般地处理的一些问题,曾使其他高明的学者百思而不得其解。”[7] 利用微分,莱布尼茨轻而易举地导出了折射定律。微积分之功用、微积分之魅力由此可见一斑!

四、化圆为方问题与空间曲线的切线

古希腊著名剧作家亚里斯多芬尼(Aristophanes,前5世纪)在喜剧《鸟》中提到:天文学家默冬(Meton)手执直尺和圆规,通过作图,把圆变成了方。由此可知,化圆为方在那个时代是家喻户晓、妇孺皆知的难题。阿那克萨哥拉身陷囹圄仍做苦心研究,又可见该问题的无穷魅力了。尽管希皮亚斯、迪诺斯特拉图已经利用割圆曲线解决了化圆为方的问题,但希腊人并未停下探求新解法的脚步。到了公元前3世纪,伟大的几何学家阿波罗尼斯(Apollonius,262 BC?—190 BC)在研究圆柱螺

线时发现,这种曲线的切线可以用来化圆为方。我们不知道阿波罗尼斯的具体方法,但纯几何方法的艰辛不难想见。借助于今天的微积分,我们可以验证其结果的正确性。

如图5,圆柱螺线的参数方程为:$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$,当 $t = \theta$ 时,曲线上对应的点为 $P(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$,圆柱螺线在 P 处的切线 PQ 的方程为

$$\frac{x - a\cos\theta}{-a\sin\theta} = \frac{y - a\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{z - b\theta}{b}$$

于是,PQ 与 xoy 平面的交点 Q 的坐标为 $Q(a\cos\theta + a\theta\sin\theta, a\sin\theta - a\theta\cos\theta, 0)$。又 P 在 xoy 平面上的投影为 $Q(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$,故线段

$$BQ = \sqrt{(a\theta\sin\theta)^2 + (-a\theta\cos\theta)^2 + 0^2} = a\theta$$

因此,我们验证了阿波罗尼斯的结论:圆柱螺线上一点 P 处的切线在 xoy 平面上的投影线段恰好等于弧的长度。因此,圆柱螺线上对应于 $t = 2\pi$ 的点处的切线的投影正好等于圆柱底面圆周长,于是化圆为方问题得以解决。

美国数学家和数学史家M·克莱因(M. Kline,1908—1992)曾经指出,数学教学的主要问题是动机问题,他将“为所教的数学提供动机和目的”作为课程的四个原理之一[8]。事实上,参考文献[2]提到的发生教学法的主要特征之一便是突出“主题之必要性”,即让学生认识到所引入的新主题乃是解决问题之需要,让他们产生足够的动机[9,10],这成了HPM视角下数学教学设计的理论依据之一。

一般的高等数学或数学分析教材在证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$(顺便指出,证明过程中所用到的不等式 $\sin x < x < \tan x$ 不过是欧几里得《几何原本》第6卷命题33而已)之后,往往只是给出求有关具体函数极限的例子,而没有在几何问题上的应用,极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 不过是一个抽象等式而已。关于一元隐含数求导,往往直奔主题,没有几何问题做铺垫,没有突出“主题之必要性”。对空间曲线的切线的处理也类似。这应验了M·克莱因所批评的“传统课程严重缺乏动机”[11]。历史名题的引入则十分有效地创造了动机,这应该是数学史最重要的教育价值之一。同时,历史名题也为课堂上的学生提供了探究的机会。

相应地,由于缺乏历史问题,学生往往会产生错误的数学观:数学是没有用的;正如半个世纪前Barzun所说,由于教学的背后没有历史感,数学课带给学生的感觉是“整个体系是天上掉下来的,只供天生的魔术师使用”[12]。古希腊几何难题、笛卡儿叶形线、光的折射定律等在突显微积分价值的同时,给学生提供了历史感,让他们认识到,数学和其他学科一样,是人类的文化活动,有其悠久的历史。

笛卡儿叶形线以及光的折射定律的历史告诉学生：数学家也会遭遇困难和挫折，也会犯错误，所以，学习上的困难和挫折人人有之，不必因此而丧失信心，从而，让他们觉得微积分并不那么可畏。同时，极限的历史让我们能够理解或预测今天学生在微积分学习中难以避免的困难。四个案例都有历史人物、有背景故事，展示了微积分的人文的一面，这有助于让学生对相关知识点产生兴趣。“古人不见今时月，今月曾经照古人”。同样，古人不见我们今天的微积分，但今天微积分所推导出的数学真理却同样是古人所孜孜以求的目标，而且殊途同归。我们仿佛可以穿越时空，和古人对话，这是多么奇妙的事！在“对话”中，我们可以让学生更深刻地理解、体会微积分方法的价值：没有微积分，化圆为方的解决是多么的笨拙，折射定律的导出是多么的艰

（下转第31页）

与老师之间的相互作用有机地联系起来，将知识的传授与能力的培养统一起来。采用探究式教学明显激发了学生学习的兴趣，课堂焕发出生机和活力。学生在老师的指导下，绝大部分都能自主学习教材内容，在自学中获取知识，发展思维；在小组讨论交流时能积极参与，互相交流自学情况，共同探讨存在疑问，主动回答同学和老师提出的问题。探究式教学模式使学生学会了联系现实生活实际来分析、解释经济金融问题，提高了学生的自学能力、口头表达能力和逻辑思维能力。实施探究式教学以来，学生在毕业论文选题中选择投资组合理论、期权定价理论等与金融数学相关课题的比例由2003级同学的32%提升到了2004级同学的67%，学生在相关问题上的关注度显著提高。同时探究式教学模式也转变了教师的传统教学思想，加强了教师对学生学法的研究，促进了教师深入钻研教材、认真设计课堂教学程序的意识。

参考文献：
[1] 黄健．探究式教学在运筹学教学中的应用[J]．科教创新，2007（22）：60—61.
[2] 杨承印，马艳芝．我国“探究教学”研究十年[J]．教育学报，2007（2）：46—49.
[3] 赵文亚，史彬茹．探究式教学模式研究[J]．教学与管理，2007（14）：117—118.

（上接第24页）
难。

可见，福弗尔所总结的数学史对教学中的各种作用，都可以在高等数学教学中得到体现，或在新知的引入中，或在定理或公式的应用中。然而，巧妇难为无米之炊，恰当的历史材料无疑是至关重要的。我们有理由相信，大学数学教育取向的历史研究必将引起人们更多的关注，同时成为数学史研究和数学教育研究的共同的一部分。

参考文献：
[1] Fauvel J. Using history in mathematics education[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 11（2）：3—6.
[2] 汪晓勤．HPM视角下的高等数学教学[J]．高等理科教育，2003（5）：10—12.
[3] Heath T. L. A History of Greek Mathematics[M]. London: Oxford University Press, 1921.
[4] Descartes R. The Geometry (trans. D. E. Smith & M. L. Latham)[M]. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1925.
[5] Boyer C. B. History of Analytic Geometry[M]. New York: Scripta Mathematica, 1956.
[6] Cajori F. A History of Physics[M]. New York: Macmillan, 1933.
[7] 爱德华 C. H. 张鸿林译．微积分发展史[M]．北京：北京出版社，1987.
[8] 汪晓勤．M·克莱因的数学教育思想与高等数学教学[J]．曲阜师范大学学报，2004，30（4）：106—110.
[9] Tzanakis C. Presenting the relation between mathematics and physics on the basis of their history[C]. In V. Katz (Ed.), Using History to Teach Mathematics: An International Perspective. Washington: The Mathematical Association of America, 2000. 111—120.
[10] Tzanakis C. & Arcavi A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey[C]. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 201—240.
[11] Kline M. A proposal for the high school mathematics curriculum[J]. Mathematics Teacher, 1966, 59（4）：322—330.
[12] Jones J. The history of mathematics as a teaching tool[C]. In: A. H. Hallerberg et al. (Eds.). Historical Topics for the Mathematical Classroom[A]. Washington D. C.: NCTM, 1969. 1—17.