上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 3 期

莫里斯·克莱因

(Morris Kline, 1908–1992)

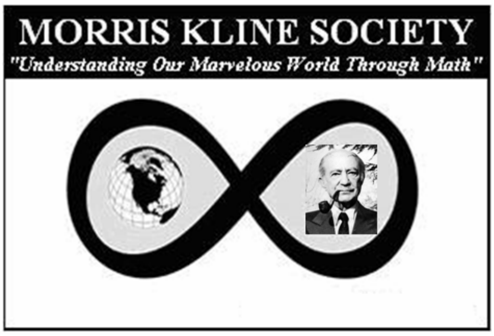
《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

江南五月，生机盎然。

在各位作者和编委会的共同努力下，《上海HPM通讯》第3期与大家见面了。

本期的封面人物是M·克莱因，20世纪美国著名数学史家、数学哲学家和数学教育家。M·克莱因一生著作颇丰，著有《古今数学思想》(Mathematical Thought from Ancient to Modern Times)、《西方文化中的数学》(Mathematics in Western Cultures)、《数学：确定性的丧失》(Mathematics: The Loss of Certainty)、《数学与物理世界》(Mathematics and the Physical World)等等，影响深远。



长期以来，M·克莱因对数学哲学进行了深入研究，从多方面、多层次提出了许多新颖、独特的观点。在美国轰轰烈烈的"新数学"运动中，M·克莱因从数学哲学、数学历史的角度阐述了自己对数学教育改革的态度——本期的经典文献选取的就是他于1958年发表在美国《数学教师》杂志上的一篇颇有影响力的文章。1973年，M·克莱因还发表了长达173页的专论《为什么约翰尼不会做加法：新数的失败》(Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Mathematics)，此书成为对"新数"的总结性的批判。

伟人虽已逝，精神永长存。克莱因的数学教育思想，对我们当前的数学教学还有十分重要的指导和借鉴意义。让我们向大师学习，在HPM的道路上不断前进。

目　录

CONTENT

文献研究

为什么称未知数为“元”？

汪晓勤

(华东师范大学数学系，上海，200241)

数学教学中，我们常常会遇到两类不同的“为什么”，一是“逻辑上的为什么”，如：“为什么等腰三角形两底角相等”、“为什么三角形内角和等于两个直角”、“为什么 $\sqrt{2}$ 是无理数”等等， 对于这类“为什么”，我们可以通过逻辑推理的手段来解决；二是“历史上的为什么”，如：“为什么要将圆分成 360 等分，每一等分所对圆心角为 1 度”、“为什么平面直角坐标系将平面所分成的四个部分叫‘象限’”、“为什么称无限不循环小数为无理数”等等，对于这类“为什么”，逻辑的手段不再有效，只有通过历史知识才能解决。

那么，面对“历史上的为什么”，教师持何种反应？这类“为什么”会引起教师怎样的反思？为了回答上述问题，笔者在上海市十二五市级共享课程“数学史与数学文化”的 BBS 讨论区，发了这样一则帖子：

最近，去某初级中学交流，一位资深数学教师告诉笔者：学生在课堂上问一位年轻教师：为什么未知数叫“元”？教师答：大概因为古人认为“天圆地方”呗！如果是你，如何向学生解释？

多少有些出乎意料，这个问题引起了在线教师的热烈讨论。

1 教师对“为什么未知数叫‘元’”的反应

为什么未知数叫“元”？这是一个典型的“历史上的为什么”。在线的所有教师都表示从没有想过这个问题。以下是部分教师的反应。

T1：这个问题真有意思。说实话，教了那么多年的数学，从没想过这个问题，也没学生问过我。

T2：如果学生问我，还真回答不出来。教学过程中，总想着如何让学生易于理解，但却忽略了名词本身的解释，值得反思。

T3：一直把它作为专用名词，真没考虑过为什么，也真没有学生来问过，看来自己的数学史功底很不够，缺乏了一种追根溯源的追问精神。

T4：这个问题从来都没有思考过，看到这个问题的时候自己也纳闷，看来真的是活到老，

学到老。

T5：从来没有考虑过为什么这么说，就像 1+1=2 一样，认为是理所应当。

在线教师的给出的解释大致有以下几类：

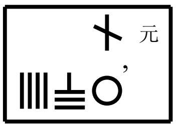
- 古时候常用通假字，而 “元”通“源”，解方程其实就是“追本溯源”。这一解释来自百度。
- “元”也就是变量，一元方程含一个变量，二元方程含两个变量。这一解释也来自百度。
- 符号代数的创始人韦达曾用元音字母 A、E、I 等表示未知数，故未知数叫“元”。
- “元”是个量词，与“一元钱”、“二元钱”中的“元”相类似。
- “元”是明代徐光启翻译《几何原本》时创用的一个数学术语。
- “元”是从日本传入中国的一个数学术语。
- “元”不过是人们约定俗成的一个数学术语。

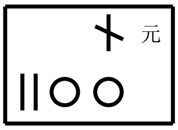
所有上述解释都不是用“元”表示未知数的真正原因。认同第一种解释的教师最多，其中一位教师写道：“百度来的，有问题找百度！”可见，中学数学教师在遇到疑难问题时，过于依赖网络，对于网上所说是否正确，缺乏正确的判断。

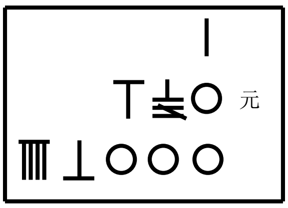
2 用“元”表示未知数的历史

实际上，用“元”这个字表示未知数，源于我国宋元时期的天元术。所谓天元术，就是在解代数问题时，先“立天元一为某某”，再根据题设条件，建立等式，最后通过移项、合并同类项，得到一个方程。“立天元一为某某”，就是我们现在的“设某某为 x”。

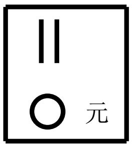
今天我们所能见到的天元术著作，只有李冶(1192-1279)的《测圆海镜》和《益古演段》、朱世杰(1249-314)的《算学启蒙》和《四元玉鉴》。我们以《测圆海镜》卷二最后一题为例：“或问：出西门南行四百八十步有树，出北门东行二百步见之。问城径几何？”《测圆海镜》全书共含 170 个问题，均围绕“勾股容圆”而设，即都与直角三角形内切圆有关。这里，西门、北门是指圆城的西门、北门。李冶给出的解题过程是[1]：

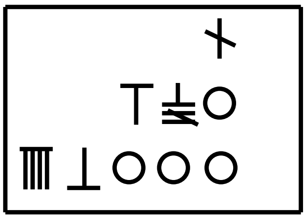
“立天元一为半径。置南行步在地，内减天元半径，得 

为股圆差。又置乙东行步在地，内减天元，得下式 

,为勾圆差。以勾圆差增乘股圆差，得 

，为半段黄方幂，即城幂之半也。又置天元幂以倍之，得



，亦为半段黄方幂。与左相消，得  ,如法开之，得半径，合问。”

以上我们看到的就是“原汁原味”的天元术。易于用今天的代数语言对上述解题过程作出解释。如图 1，设圆城半径为 x，则 $AE=480-x, BD=200-x$ 。因 $\frac{AE}{EH}=\frac{GF}{FH}$，故得 $(480-x)(200-x)=2x^2$ ，即 $x^2-680x+96000=2x^2$ ，移项相消后得方程 $-x^2-680x+96000=0$ 。

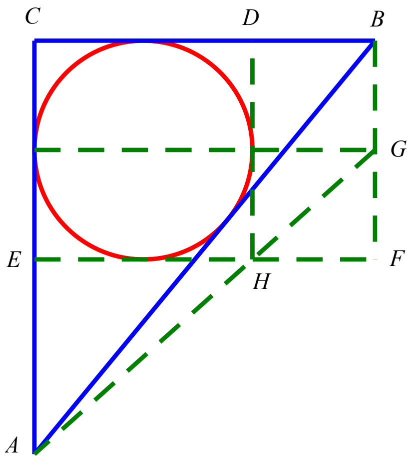


图 1　《测圆海镜》中的圆城问题

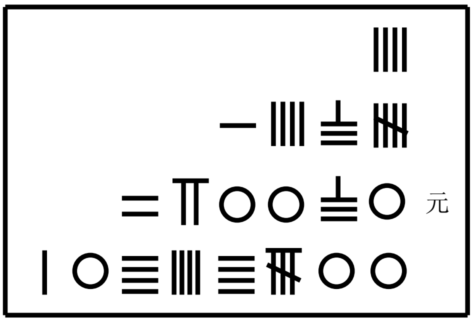


图 2　三次多项式的表示法

从李冶的天元术解题过程可见，多项式的写法是：只列出各项系数，按幂的次数从低到高的顺序，由下至上排列。一次项系数旁标一“元”字(有时也在常数项旁标一“太”字)，上面依次为二次项系数，三次项系数，等等，而下面为常数项。例如，图 2(采自《测圆海镜》卷六)表示的就是三次多项式 $4x^3-1484x^2+270080x-10444800$ (注意，斜杠表示负号)。方程总是化成右边等于零的形式，因此只需写出左边的多项式；只不过此时不再出现“元”字，因为最下面一个数总是常数项，不会产生歧义。

朱世杰在《四元玉鉴》中将天元术拓广为四元术，除了天元，又引入地元、人元、物元，用以解决多元高次方程组。

清末，李善兰(1811-1882)和伟烈亚力(1815-1887)合译英国数学家德摩根(A.de Morgan, 1806-1871)的《代数学》，创用“多元一次方程”这样的术语[2]。该术语是西方数学术语与中国传统数学术语完美结合的典范。在《代数学》和另一部微积分教材《代微积拾级》中，李善兰用“天”、“地”、“人”、“物”分别代替英文字母 x、y、z、w (前二十二个字母分别用天干地支来代替)，于是，“天”、“地”、“人”、“物”成了表示未知数的符号，而“元”即为未知数的统称。

从上面的历史考察可以看出，用“元”表示未知数，实源于天元术，追本溯源之说虽貌似有理，实属臆测；“元”这一称谓并非舶来品，亦非约定俗成，与元音字母更是风马牛不相及。教师对于“元”的错误解释，或对于网上说法的盲从，源于数学史知识的缺失。

3 未知数在国外的称谓和表示法

在关于“元”的词源的讨论过程中，有教师还提出这样的问题：“外国人管未知数叫什么呢？他们有没有特别的称谓？”

在今天的英文中，与“未知数”对应的术语是 unknown numbers，一般用 x 来表示。但是，在历史上，不同国家或地区确有不同的未知数称谓或表示法。古代印度数学家婆罗摩笈多(Brahmagupta, 598-670)和婆什迦罗(Bhāskara, 1114-1185)等用梵文中不同颜色名的首音节来表示不同未知数[3]。阿拉伯数学家花拉子米(Al-Khwarizmi,780-850)称未知数为“物”或“根”。我们来看他的《代数学》中的一个问题：“将 10 分成两部分，各自乘，所得乘积之和等于 58。”花拉子米的解法如下：

“设其中一部分为物，则另一部分为 10 减物。将 10 减物自乘，得 100 加 1 平方减 20 物。将物乘以物，得 1 平方。将两个乘积相加，得 100 加 2 平方减 20 物，等于 58。……得 21 加 1 平方等于 10 物。”[4]

12 世纪，英国学者罗伯特(Robert of Chester)将花拉子米的著作译成拉丁文，传入欧洲。罗伯特将“物”译为 res。13 世纪初，斐波纳契在《计算之书》中完全沿用了“物”这一称谓。如：

“将 10 分成两部分，使其平方和为 $62\frac{1}{2}$。设第一部分为物，自乘得平方。第二部分为 10 减物，……自乘得 100 加平方减 20 物。加上第一部分的平方，得 100 加 2 平方减 20 物等于 $62\frac{1}{2}$ 第纳尔……”[5]

14 世纪，意大利作者将拉丁文 res 译成意大利文 cosa，从此，代数学被称为“物术”(regola della cosa)，与中国的天元术异曲同工。15-16 世纪，“物术”相继传入德国、法国和英国，cosa 又被译成 coss。

为什么我们今天常用 x 来表示未知数？学术界有多种解释。

● 西班牙语起源说：阿拉伯语中，“物”发音 shay，译成西班牙文，就是 xay，简写后就成了今天的 x。法国初中数学教材采用此说。

● 拉丁语起源说：拉丁语 res 前两个字母 re 的草写，成了 15 世纪德国数学手稿中未知数的符号“”。该符号为 16 世纪德、法、英三国的有关作者所沿用。这个符号演变后，就成了今天的 x。

● 笛卡儿发明说：解析几何学的发明者之一笛卡儿在《几何学》中用字母表中前几个字母(如 a, b, c)表示已知数，后几个字母(如 x, y, z)表示未知数。但该书后半部分，x 比 y 和 z 出现得更频繁。一个故事说：《几何学》还在排版的时候(那时候用的是活字印刷术)，印刷者发现，由于 y 和 z 的使用频率比 x 高的缘故，铅字 y 和 z 不够用了，他问笛卡儿，使用 x、y、z 中的不同字母来表示方程中的未知数，意义上是否有差别，笛卡儿回答说：随便使用三者中的哪一个，并没有差别。于是，印刷者就放心地频繁使用铅字 x 了[6]。

美国数学史家卡约黎(F.Cajori，1859-1930)认为，除了笛卡儿发明说，其他解释都没有依据[7]。

4 教师的反思

“元”的词源问题引起很多在线教师的深入反思，主要包括以下四个方面。

4.1 关于本问题性质的认识

讨论过程中，教师意识到所讨论的问题属于“历史上的为什么”，只有通过数学史才能解决。

T6：要找出这个问题的答案来，的确得从数学史的角度去研究。老师课堂上提出这个问题，让学生课后自行探索和发现会更好。

T7：通过这个问题的讨论，我感到教数学就必须要对数学史与数学文化有一个比较全面的了解，这样才能对一些概念的来龙去脉有所认识，才能在教学过程中回答学生有关数学史的有趣问题。

4.2 关于数学史教育价值的认识

一些教师意识到数学史的德育价值；另一些教师则指出，数学史能够激发学生的学习兴趣；提出“历史的为什么”，可以激发研究兴趣，甚至改变他们的数学观。

T8：我们教材里的许多概念名词，都是译名，是译者从无到有创造的，不少名词都出自徐光启和利玛窦翻译的《几何原本》。比如：点、线、直线、平行线、曲线、角、直角、锐角、钝角、三角形等，其中大多沿用至今这些译名大家都觉得十分恰当，并且还影响了日本，朝鲜各国。在课堂上，这样的介绍一定可以提高学生的民族自豪感。我们常常觉得在数学课堂里渗透两纲教育很难，其实，只要做个有心人，就可以去贯彻教育方针。

T9：通过 BBS 的讨论，我深刻体会到了“了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤”，在初中数学教学中，教师要有意识地渗透数学文化史，让学生觉得数学不仅仅是为了解题，还有很多有趣的内容，从而使学生喜欢数学、学好数学。作为教师，我现在需要做的是对数学史有进一步的理解与探究。

4.3 关于教材和教参中的数学史

不少教师就数学史知识，对教材和教材提出自己的建议。

T10：如果教参用一句话提醒我们教师关注此类问题，也许就能让更多的教师注意到数学史的意义。上海现行初中数学教材，关于数学史和数学文化有所涉及，但内容极少，如八年级下第 138 页，在代数方程一节的第一页，提到《九章算术》中有方程章，总共不到 50 字。教材编写者有必要多向学生提供一些数学史知识片段。

T11：教材中数学史内容呈现方式单一，主要以数学家简介和“阅读材料”的形式出现。这部分内容在师生眼里只是补充材料，可学可不学，可看可不看。结果，常常牺牲了这些数学史料在数学课上应有的地位和价值。建议专家们专为中学编写有关数学史教材，供教师开设选修课时使用。

4.4 关于教师的数学文化素养

所有教师都感到自己数学文化素养的不足。

T12：去年刚刚教过一元一次方程，我只知道“元”是未知数的意思。细细想来，其实专业的数学教师要与其他懂数学的不同。非专业数学教师按照教科书照本宣科也能教孩子数学知识，而我们专业数学教师需要有更高的追求。数学文化素养的提升便是其中之一。

T13：我们教师对教材体系中的“隐性数学文化”知之甚少。大部分教师只知道概念、法则、公式，但对于数学思想方法、数学常识、数学渊源等隐性文化知识知之甚少。所以我要通过这次培训学习，补上这一课。

5 若干启示

通过对“为什么未知数叫元”这个问题的讨论，我们得到诸多启示。

● 数学史在中学的境遇是“高评价、低应用”，究其原因，除了数学教师数学史知识匮乏外，教师未能感受到数学史的需求，也是不可忽视的原因。这类“历史上的为什么”能让教师深切感受到数学教学与数学史之间无法割裂的联系，感受到自身数学史素养的不足，从而产生学习数学史的动机。虽然数学史课程在教师培训中已占有一席之地，但要改善培训效果，就必须在教学中加强历史与教育之间的关联。

● 数学教材虽有数学史阅读材料，但这些材料所发挥的作用十分有限。其原因之一是它们并未针对“历史上的为什么”来编写。虽然教材提到了代数学的历史，但教师仍对“元”的词源一无所知；虽然教材中介绍了无理数的由来，许多教师仍将无理数理解为“没有道理”、“非理性”或“没有秩序”的数；虽然教材介绍花拉子米的《代数学》，但教师对“代数学”的词源同样不甚了了。因而阅读材料很少真正解决教师在教学中遇到的难题或他们感兴趣的问题。

● 宋元时期的天元术对于一名专业数学史研究者来说，不过是个常识，可在中学数学教育界却鲜为人知。因此，需要我们在数学史书斋和数学课堂之间架起一座桥梁。研究和传播教育取向的数学史，编写相关培训教材，加强大学与中学之间的交流与合作，理应成为未来 HPM 研究工作的重要组成部分。

参考文献

[1] 李冶，1994. 测圆海镜. 见郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇数学卷(第一分册). 河南教育出版社, 767

[2] 棣么甘，咸丰九年(1859). 代数学 (李善兰，伟烈亚力译)，卷三. 上海: 墨海书馆

[3] Colebrooke, H. T.,1817. *Algebra with Arithmetic and Mensuration,from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London: J. Murray, 139-144

[4] Rosen, F.,1831. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. London: Parbury, Allen, & Co., 39

[5] Siegler, L. E.,2002. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag, 560

[6] Derbyshire, J.,2006. *Unknown Quantity: A Real and Imaginary History of Algebra*. Washington: Joseph Henry Press, 93

[7] Cajori F.,1951. *A History of Mathematical Notations* (Vol. 1). La Salle: The Open Court Publishing Company, 381-383

双曲线的历史渊源

姚 瑾

(华东师范大学数学系，上海, 200241)

摘　要：从圆锥曲线的起源到发展，有一大批数学家为之做出了巨大贡献。双曲线是圆锥曲线的一个重要分支，数学家们也发现了很多关于她的性质。而且较早的数学教材中也有涉及双曲线作图方法，通过作图让后人体会双曲线的定义。

关键词：双曲线; 历史; 性质

1 圆锥曲线的历史

圆锥曲线的起源，希腊人没有给出确切的说法，但是能够确定与倍立方问题有关[1]。早在古希腊时期，数学家希波克拉底(Hippocrates, 约公元前 470-公元前 410)就已经将倍立方问题归结为求二次比的问题：对于一个棱长为 a 的立方体，在 a 和 $2a$ 之间确定 x 和 y，使得 $a:x=x:y=y:2a$。用现在的术语讲，这等同于同时解下列三个方程中的两个方程：$x^2=ay$, $y^2=2ax$ 和 $xy=2a^2$，其中前两个是抛物线方程，而第三个则是双曲线方程。

梅内赫莫斯(Menaechmus，公元前 4 世纪)是研究满足上述代数性质的曲线的第一人。他指出，通过这些曲线的交点可以确定 x 和 y，从而可以解决被立方体问题。我们无法确定他是如何研究这些曲线的，他很可能应该用了欧几里得的方法。要确定曲线 $y^2=2ax$ 上的点，只能反复应用《原本》卷 6 命题 13 的方法。先把长度为 $2a$ 和 x 的线段并为一个长度为 $2a+x$ 的线段，再以 $2a+x$ 为直径作一个圆，在两线段的节点处作一个长为 y 的垂线(这时 y 满足方程)。如果取 x 的不同值，并连接所有对应垂线的重点，即可作出所求的曲线。虽然可以用欧几里得方法作出曲线上的每一点，但是并不能作出完整的曲线。无论如何，作为一种工具，圆锥曲线理论已经被引入到解决某些几何问题中。

古希腊数学家是如何发现他们用以解决倍立方问题的曲线可以通过取圆锥的截线来产生呢？这一点很模糊，据推测，或许是梅内赫莫斯本人通过观察由一族圆所产生的曲线，认出可以作为某个圆锥的水平截线图[2]。美国史学家纽格伯尔(O.E.Neugebaue, 1899-1990)还推测，日晷更有可能是梅内赫莫斯等发现圆锥曲线的本源[3]。

对于梅内赫莫斯，波耶尔(B.Boyer)[4]在他的《*History of Analytic Geometry*》中作了如下评价：

梅内赫莫斯是一位开拓者，他发现了所有科学和数学学科中最重要的一族曲线，但是由于当时缺乏代数思想和符号表示，他的探索之路充满困难。他的著作早已失传，甚至他给

这些曲线所取的名字也不为人知。

梅内赫莫斯是第一个将圆锥曲线放在平面上进行研究，当这些曲线被构造出来后，不难发现这些曲线也是平面截圆锥所得交线。不管圆锥曲线的起源是平面几何还是立体几何，梅内赫莫斯所作的工作中最杰出的部分并不是曲线本身，而是它能够使圆锥曲线在这两者之间相互转化。

欧几里得(Euclid, 约公元前 330-前 275)在《原本》卷 6 中把圆锥定义为以已知直角三角形一直角边旋转所得的立体，然后按照圆锥顶角大小把圆锥分为直角、钝角、锐角圆锥，用垂直于母线的平面截圆锥后得到的截线：“直角圆锥的截线”(抛物线)、“锐角圆锥的截线”(椭圆)和“钝角圆锥的截线”(双曲线)(阿基米德及其后人已经使用了这三个带引号的词)。

其后，阿波罗尼斯（Apollonius, 公元前 250-前 175 年）在其所著《圆锥曲线》中，做了许多改变，特别是推广了圆锥曲线的概念，给出了与前人略有不同的三种圆锥曲线的定义：

他认为没有必要限于用垂直于母线的平面截正圆锥来定义圆锥曲线，只要改变截面的角度就可以得出这三类曲线。

对此，我们配以图解(如图 1)：

(1) 若 EG 平行于轴线三角形的一边，那么截线是抛物线；

(2) 若 EG 与轴线三角形的两边相交，则截线是椭圆；

(3) 若 EG 与轴线三角形的一边以及另一边 CA 的延长线相交，则截线是双曲线。

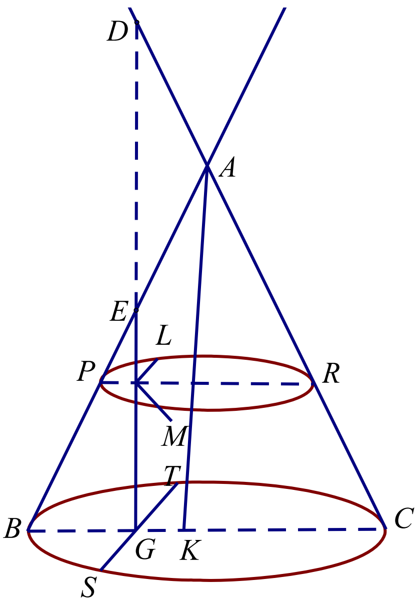


图 1

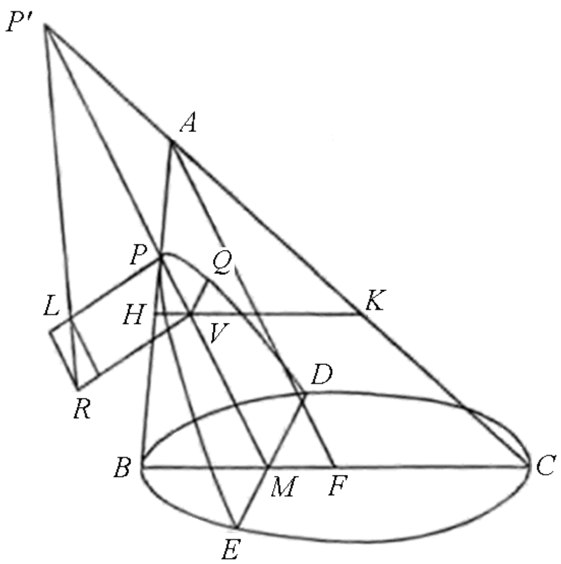


图 2

2 数学著作中的双曲线

在《圆锥曲线》[5]一书中，卷 I 有两组共 11 个定义和 60 个命题，包含了三种截线和二

相对截线的形成和它们的主要性质。以下几个命题则是关于双曲线的部分基本性质：

卷 I 命题 12(如图 2)：作 PM 不平行于 AC, 交 CA 延长线于圆锥外一点 P' 。在截线所在平面作 PL 垂直于 PM, 使得 $PL: PP' = BF \cdot FC: AF^2$, 其中 AF 为过点 A 且平行于 PM 交 BC 于 F 的直线。那么如果 VR 平行于 PL, $P'L$ 交 VR 于 R, 可以证明：$QV^2 = PV \cdot VR$。

该命题是截面与圆锥曲面的两支都相交, 且和底圆相交, 得到的截线被命名为 *hyperbola*(*hyperbole*)。

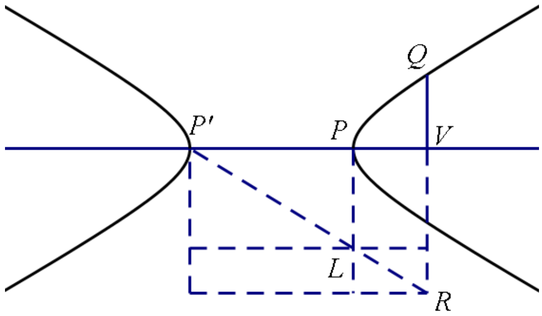


图 3

阿波罗尼斯利用了欧几里得的比例论得出了这个性质：作 HK 过 V 且平行于 BC, 因此：$QV^2 = HV \cdot VK$。于是, 由相似三角形可知：$HV: PV = BF: AF$；$VK: P'V = FC: AF$ ，故友

$$HV \cdot VK: PV \cdot P'V = BF \cdot FC: AF^2,$$

因此，$QV^2: PV \cdot P'V = PL: PP' = VR: P'V = PV \cdot VR: PV \cdot P'V$, ∴ $QV^2 = PV \cdot VR$.

阿波罗尼斯利用欧几里得的比例论得出了此截面的一个面积性质：以横线为一边作矩形贴合到竖直边上去, 使其面积等于对应的纵线上正方形, 且此矩形比以横线和竖直边所夹矩形超出一个与横截直径和竖直边所夹的矩形相似的矩形。

用现代的记法表示的话, 则另 $QV = y$, $PV = x$, $PL = p$, $PP' = d$, 则此命题的结论就可以表示为 $y^2 = px + \dfrac{p}{d} \cdot x^2$, 这个表达式即为双曲线的方程。其中参数 p 只与截面有关。

卷 I 命题 14：如果一个平面不过顶点截两个对顶圆锥, 与两个圆锥的截线都是双曲线, 且两支双曲线有着同样的直径。

如图 4, BC 为截面圆, 令 $B'C'$ 为任意一截平行相对圆锥的截面圆。用一平面同时截圆锥的两部分, 交底面圆于 DE, 交 $B'C'$ 面于 $D'E'$, 于是 DE 平行于 $D'E'$ 。令 BC 为底面的直径, 且垂直平分 DE, 平面过 BC 和定点 A, 截平面 $B'C'$ 于 $B'C'$, $B'C'$ 为截面圆的直径。因此 $B'C'$ 平行于 BC, $D'E'$ 平行于 DE。

图中，FAF' 过 A 平行于 MM' , MM' 交 CA, $B'A$ 于 P, P' 。PL, $P'L'$ 在双曲线所在平面内垂直于 MM' , 并且满足以下比例：$PL: PP' = BF \cdot FC: AF^2$, $P'L'$: $P'P = B'F' \cdot F'C' : AF'^2$, 截面 DPE 的直径 MP 交 BA 于顶点外的点, 于是 DPE 是一条双曲线；而三角形 $AB'C'$ 垂直平分 $D'E'$ ，且 $M'P$ 交 $C'A$ 于比顶点 A 远的地方, 因此 $D'P'E'$ 也是一条双曲线。这两条双曲线

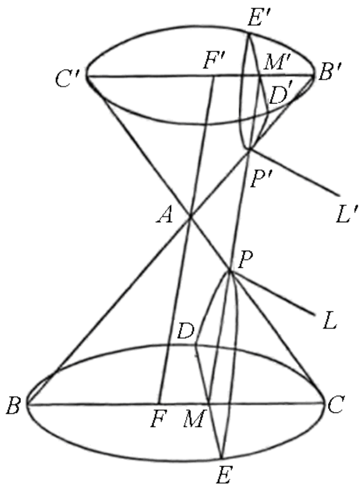


图 4

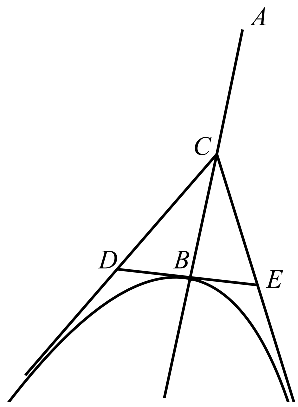


图 5

有着相同的直径 $MPP'M'$ 。由三角形相似：$BF:AF=B'F':AF'$, $FC:AF=F'C':AF'$ 。

$\therefore\ BF\cdot FC:AF^2=B'F'\cdot F'C':AF'^2$，因此，$PL:PP'=P'L':P'P$，$\therefore\ PL=P'L'$ 。

而在《圆锥曲线》的卷 II 一开始则讲到了超曲线渐近线的做法和性质：

卷 II 命题 1 中设有超曲线(双曲线的一支), 其直径为 AB, 中心为 C, 其竖直边为 p, 又设在端点 B 的切线为 EBD(如图 5), 且有 $BD^2=BC^2=\frac{1}{4}AB\cdot p$, 其中 $BC=CA$。则 CE 和 CD 不会与这段截线相遇, 把这两条直线叫做超曲线的渐近线。

而命题 14 则给出了渐进线的又一个重要的性质, “若渐近线和超曲线都无限延伸, 则它们将彼此靠近, 而且它们的距离可以小于任何给定的距离”。接着又证明了“二相对截线(双曲线)的两支有共同的渐近线”。

古希腊数学家帕波斯(Pappus, 约 290-350)在《数学汇编》(Mathematical Collections)中用到了圆锥曲线的交点准线性质, 又在卷 VII 中给出了轨迹定义及其证明：设一动点至一定点的距离与至一定直线的距离之比等于常数, 则动点的轨迹是圆锥曲线。当这个常数等于 1 时是抛物线, 小于 1 时是椭圆, 大于 1 时是双曲线。然后, 他还给出了圆锥曲线的一般形式。用现在的解析语言来表示：

“如果一个曲线的方程是 $x^2=r^2\left[y^2+\left(a-x\right)^2\right]$, 那么曲线是圆锥曲线。”

而在 17 世纪, 笛卡尔(Rene Descartes, 1596-1650)《几何学》中对圆锥曲线方程的研究导致了人们对圆锥曲线画法的探究。荷兰数学家舒腾给出了双曲线的作图方法[6](如图 6)：其中 C,F 为固定的两个点(焦点), $CD=GF$, $DG=CF$。装置中除 CD, DG, GF 外的部分为滑槽, 用于落笔画曲线。

在 19 世纪, 许多教科书中也有关于双曲线的作图方法。其中 *Robinson* 在 1862 年的《圆锥曲线与解析几何》[7]和 *Davies* 在 1867 年的《解析几何基础》[8]中都提到了双曲线同一画

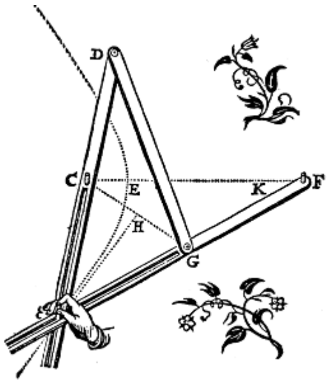


图 6

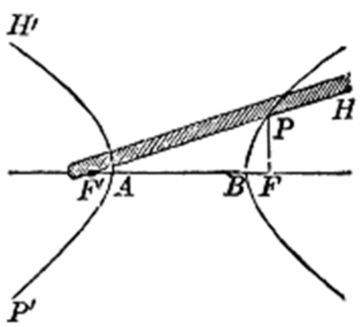


图 7

图装置(如图 7)。取一把长度大于 FF' 的尺子, 将其一端固定在焦点 F' 。在另一端连接一根绳子, 绳子的长度比尺子短, 差为 AB 的长度。将绳子一端连接在 H, 另一端连接在 F 点。在作图时, 笔紧贴直尺和细绳。该作图方法利用了双曲线的定义：到两定点的距离等于定长(小于两定点距离)。

法国数学家洛必达(M.de L'Hospital, 1661-1704))是第一位将解析几何知识融入圆锥曲线的数学家, 他在《圆锥曲线分析》推导出了双曲线的标准方程[2]：令定长为 $2t$, 焦点为 $f=(m, 0)$, $F=(-m, 0)$。则有 $Mf^2=(x-m)^2+y^2$， $MF^2=(x+m)^2+y^2$ 。于是

$$MF^2-Mf^2=(MF+Mf)(MF-Mf)=2t\cdot\frac{2mx}{t},$$

从而 $MF^2=\left(t+\frac{mx}{t}\right)^2=(m+x)^2+y^2$ 。这里利用了双曲线的焦半径公式 $MF=t+\frac{m}{t}x$ （其中 m/t 是离心率）。通过化简得到： $y^2=\frac{m^2-t^2}{t^2}x^2-(m^2-t^2)$, 取 $c^2=m^2-t^2$, 则有：

$y^2=\frac{c^2}{t^2}x^2-c^2$, 即为现在的标准方程。

1822 年, 比利时数学家旦德林利用一个圆锥的内切球, 直接在圆锥上作出了双曲线截面的焦点、准线, 从而导出了双曲线的定义。从而解决了古希腊圆锥曲面定义(截面定义)和双曲线轨迹定义之间的不连贯[9]。

旦德林的模型如图 8 所示, 一组对顶圆锥, 被一平面所截, 当截平面不平行于圆锥切平面时, 则有两个旦德林球与平面相交于两点 F_1 和 F_2, 交圆锥于圆 C_1 和 C_2。圆的平面交截平面 E 于两条平行线 l_1 和 l_2, 平面 Σ 过圆锥的轴且垂直于准线, 交 E 于双曲线的轴。在此平面 Σ 上的直线 g_0, 与过圆锥顶点 Z 的锥线平行, 交 E_1 于 D_1, 交 E_2 于 D_2。若 Σ 绕 g_0 旋转, 则其与 E 的交线, 如 B_1B_2, 还是平行于锥线轴, 即垂直于准线 l_1 和 l_2。平面 Σ_A 包含母线 ZA_1A_2,

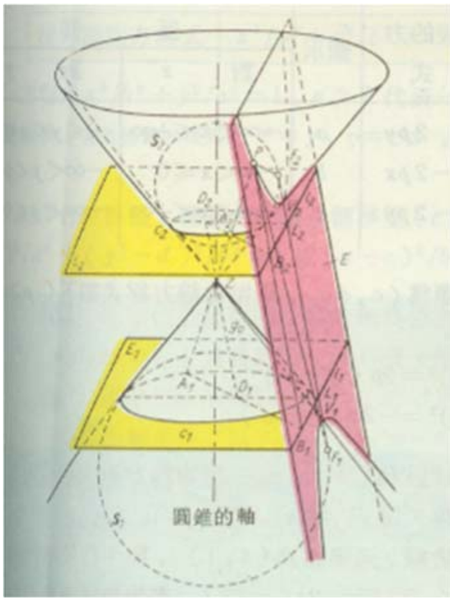


图 8

B_1B_2 与 A_1A_2 的交点 P 是准线上方的点。线段 PF_1 与 PA_2 等长且切于球 S_1；同理$|PF_2|=|PA_2|$。因 S_1 与 S_2 在 E 的同边，于是得图中双曲线上面一支 $|PF_1|-|PF_2|=|A_1A_2|$。

由此，旦德林就将双曲线的定义与圆锥曲面的定义联系了起来，为此后圆锥曲线的发展做出了巨大贡献。

参考文献

[1] Katz, 2004. 数学史通论(第 2 版)(李文林等译). 北京:高等教育出版社

[2] Coolidge, J. L, 1968. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Dover Publications.

[3] Dolan, W. W, 1972. Early Sundials and the Discovery of the Conic Sections. *Mathematics Magazine*, 45:8-12

[4] Boyer, C. B, 1956. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica

[5] Apollonius of Perga, 2007. 圆锥曲线论(朱恩宽等译). 西安:陕西科学技术出版社

[6] Maanen, J. Van, 1992. Seventeenth century instruments for drawing conic sections. *The Mathematical Gazette*, 76: 222-230

[7] Horatio N. Robinson, LL.D, 1862. *Conic Sections and Analytical geometry*. New York: Ivison, Phinney& Co.

[8] Charles Davies, 1867. *Elements of Analytical Geometry*. New York: A. S. Barnes& Co.

[9] Gellert Walter, 1980. 简明数学百科全书.(洪万生等译). 台北: 九章出版社

椭圆概念与方程推导的教材历史比较

邹佳晨

(华东师范大学数学系，上海, 200241)

摘 要：本文选取了 18 世纪以来 14 部代表性的历史上圆锥曲线的著作，从椭圆概念和方程推导两个角度加以纵向比较，并同美国现行 3 部中学教材做横向比较，得到了一些关于椭圆教学和教材编写的启示。

关键词：圆锥曲线；椭圆；数学史；教材比较

随着 17 世纪解析几何的创立，西方涌现了一大批解析几何视角下的圆锥曲线著作，其中呈现了各种各样的椭圆定义方式，椭圆方程的推导也可谓精彩纷呈。通过查阅这些著作，我们发现椭圆概念与椭圆方程推导主要有以下几种方式：

1 椭圆的定义方式

定义 1：到两定点距离之和为定值的点的轨迹为椭圆。

定义 2：到定点与定直线的距离之比为定值(小于 1)的点的轨迹为椭圆。

定义 3：从椭圆上两点分别向直径作两条线段与直径端点处的切线平行，则两线段的平方比等于直径上两条相应线段乘积之比。(汪晓勤, 2012)

2 椭圆方程的推导方式

方式 1：如图 1，设焦距 $|F_1F_2| = 2c$，点 $P(x, y)$ 为椭圆上任意一点。因 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$，

所以 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$，

即 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

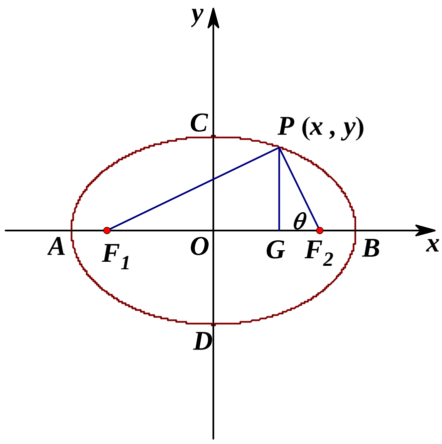


图 1

将上式两边平方，得

$$\left(x+c\right)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}+\left(x-c\right)^2+y^2\ a^2-cx=a\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}$$

两边再平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理得

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)。$$

因为$a^2-c^2>0$，所以设$b^2=a^2-c^2\left(b>0\right)$，得$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)。$$

方式 2：如图 1，设长轴$\left|AB\right|=2a$，短轴$\left|CD\right|=2b$，焦距$\left|F_1F_2\right|=2c$，点$P\left(x,y\right)$为椭圆上任意一点。因$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，故设$\left|PF_1\right|=a+z$，$\left|PF_2\right|=a-z$，其中 z 为待定参数。

于是 $\left|PF_1\right|^2=\left(a+z\right)^2=\left(x+c\right)^2+y^2$ (1)

$\left|PF_2\right|^2=\left(a-z\right)^2=\left(x-c\right)^2+y^2$ (2)

$(1)-(2)$ 得 $4az=4cx$，所以 $z=\dfrac{cx}{a}$

代入 (1) 得 $a^2+2cx+\dfrac{c^2x^2}{a^2}=x^2+2cx+c^2+y^2$

于是得椭圆方程 $y^2=b^2-\dfrac{b^2x^2}{a^2}=\dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$

或者整理得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$

方式 3：如图 1，设$\left|PF_2\right|=z$，因$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，故$\left|PF_1\right|=2a-z$。由余弦定理得

$$\left(2a-z\right)^2=z^2+4c^2-4cz\cos\theta=z^2+4c^2-4c\left(c-x\right)$$

解得 $z=\dfrac{a^2-cx}{a}$。

再由勾股定理，$z^2=\dfrac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}=y^2+\left(c-x\right)^2$，

整理可得方程 $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$。

方式 4：如图 1，设$\left|PF_1\right|=r_1$，$\left|PF_2\right|=r_2$，则由定义，$r_1+r_2=2a$，且

$$r_1^2=\left(x+c\right)^2+y^2 \tag{3}$$

$$r_2^2=\left(x-c\right)^2+y^2 \tag{4}$$

$(3)-(4)$ 得 $r_1^2-r_2^2=4cx$，即$\left(r_1+r_2\right)\left(r_1-r_2\right)=4cx$，也就是$2a\left(2r_1-2a\right)=4cx$。

于是得$r_1=a+\dfrac{cx}{a}$，代入 (3)，整理得方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

或者由 (3) 和 (4) 同时得到

$$r_1^2+r_2^2=2\left(x^2+y^2+c^2\right) \tag{5}$$

将$r_1=a+\dfrac{cx}{a}$，$r_2=a-\dfrac{cx}{a}$(联立$r_1+r_2=2a$，$r_1-r_2=\dfrac{2cx}{a}$得到)代入 (5)，

整理得方程 $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$。

方式 5：如图 2，

设$\dfrac{\left|PF_1\right|}{\left|PR\right|}=e$(离心率)，$\left|EF_1\right|=f$，

① 如果以点 F_1 为原点，由$\left|PF_1\right|^2=x^2+y^2$，

$$\left|PR\right|^2=\left(x+f\right)^2$$

得方程 $x^2+y^2=e^2\left(x+f\right)^2$。

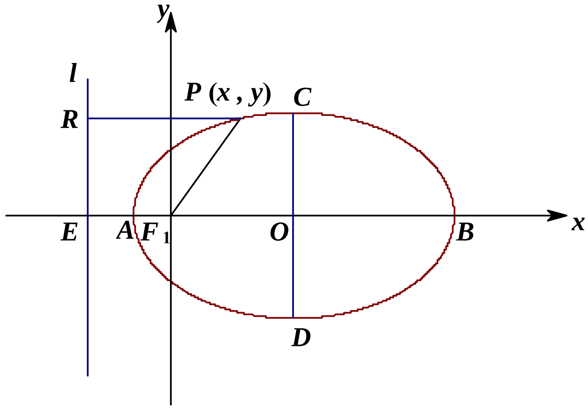


图 2

② 如果以点 E 为原点，得方程 $(x-f)^2+y^2=e^2x^2$

③ 如果以点 O 为原点，令 $a=\dfrac{ef}{1-e^2}$，$b=\dfrac{ef}{\sqrt{1-e^2}}$，经整理得方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

④ 如果以点 A 为原点，$|AF_1|=m$，点 P 的坐标为 (x,y)，则由 $|AF_1|=e|AE|$

得 $(x-m)^2+y^2=e^2\left(x+\dfrac{m}{e}\right)^2$，整理得 $y^2=\left(1-e^2\right)\left(\dfrac{2m}{1-e}x-x^2\right)$。

设 $\dfrac{m}{1-e}=a$，则所求椭圆方程为 $y^2=\left(1-e^2\right)\left(2ax-x^2\right)$。

方式 6: 如图 3，设 $\dfrac{|PF_1|}{|PR|}=\dfrac{|AF_1|}{|AE|}=\dfrac{|BF_1|}{|BE|}=e$，$|AB|=2a$，得 $|EO|=\dfrac{a}{e}$，$|F_1F_2|=ae$，

于是，点 $P(x,y)$ 的坐标满足 $|PF_1|^2=e^2|PR|^2$，$(ae+x)^2+y^2=e^2\left(\dfrac{a}{e}+x\right)^2$，

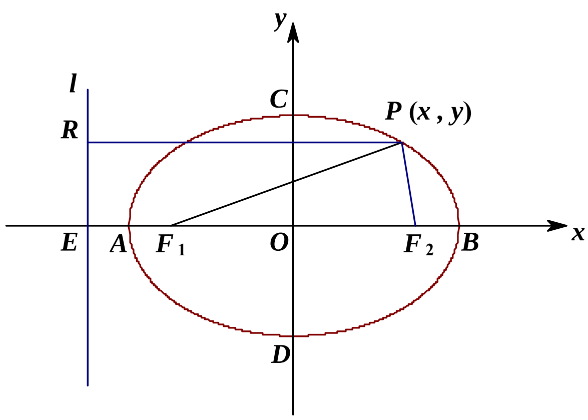


图 3

整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)}=1,$$

记$b^2=a^2\left(1-e^2\right)$，即得椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

3 教材比较

关于椭圆概念和方程推导的教材比较见表 1：

表 1 椭圆概念和方程推导的教材比较表

<table>
<tr><th>序号</th><th>作 者</th><th>书 名</th><th>出版年份</th><th>定 义</th><th>建系方式</th><th>推导方式</th><th>方 程</th><th>备 注</th></tr>
<tr><td>1</td><td>洛必达 (M. de L’Ho-spital)</td><td>《圆锥曲线分析》</td><td>1720</td><td>定义 1</td><td>中心为原点</td><td>方式 2</td><td>$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$</td><td>直接引入</td></tr>
<tr><td>2</td><td>斯蒂尔 (R. Steell)</td><td>《圆锥曲线论》</td><td>1745</td><td>定义 1</td><td>中心为原点</td><td>方式 3</td><td>$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$</td><td>直接引入</td></tr>
<tr><td>3</td><td>赖特 (J. M. F. Wright)</td><td>《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》</td><td>1836</td><td>定义 1</td><td>中心为原点</td><td>方式 4</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>直接引入</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">哈密尔顿 (H. P. Hamilton)</td><td rowspan="3">《圆锥曲线解析体系》</td><td rowspan="3">1843</td><td rowspan="2">定义 2</td><td>左顶点为原点</td><td>方式 5</td><td>$y^2=\left(1-e^2\right)\left(2ax-x^2\right)$</td><td>直接引入</td></tr>
<tr><td>中心为原点</td><td>坐标变换</td><td>$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$
$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>直接引入</td></tr>
<tr><td>定义 1</td><td>中心为原点</td><td>方式 4</td><td>$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$</td><td>求轨迹引入</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">海麻士(J. Hymers)</td><td rowspan="2">《圆锥曲线论》</td><td rowspan="2">1845</td><td rowspan="2">定义 2</td><td>左顶点为原点</td><td>方式 5</td><td>$y^2=\left(1-e^2\right)\left(2ax-x^2\right)$</td><td>直接引入</td></tr>
<tr><td>中心为原点</td><td>坐标变换</td><td>$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$
$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>直接引入</td></tr>
</table>

				定义 1	中心为原点	方式 4	$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$	求轨迹引入
6	杰克逊(I. W. Jackson)	《圆锥曲线基础》	1850	定义 1	中心为原点	方式 2	$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$	直接引入
7	柯芬(J. H. Coffin)	《圆锥曲线与解析几何基础》	1851	定义 3	中心为原点	用定义直接推导	$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$	直接引入
8	萨尔蒙(G. Salmon)	《圆锥曲线论》	1855	定义 1	中心为原点	方式 1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	直接引入
9	罗宾逊(H. N. Robinson)	《圆锥曲线与解析几何》	1862	定义 1	中心为原点	方式 2	$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$	直接引入
10	戴维斯(C. Davies)	《解析几何基础》	1867	定义 1	中心为原点	方式 4	$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$	用绳子画出椭圆
11	托德亨特(I.Tod-hunter)	《平面坐标几何在直线和圆锥曲线上的应用》	1888	定义 2	点 E 为原点(见图 2)	方式 5	$(x-f)^2+y^2=e^2x^2$	直接引入
					左顶点为原点	方式 5	$y^2=\left(1-e^2\right)\left(2ax-x^2\right)$	直接引入
					中心为原点	坐标变换	$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$ $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	直接引入
12	斯密(C. Smith)	《圆锥曲线初论》	1890	定义 2	中心为原点	方式 6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	直接引入
13	凯西(J. Casey)	《点、线、圆与圆锥曲线之解析几何论》	1893	定义 2	左焦点为原点	方式 5	$x^2+y^2=e^2(x+f)^2$	直接引入
					中心为原点	方式 5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	直接引入
				定义 1	中心为原点	方式 1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	练习中介绍
14	赛斯洛夫(L. P. Siceloff)	《解析几何》	1922	定义 2	中心为原点	方式 6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	直接引入
15	拉森(R. Larson)等编著	《代数二》	2007	定义 1	中心为原点	未推导	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	直接引入，给出方程

16	贝尔曼(A. E. Bellman)等编著	《代数二》	2009	定义 1	中心为原点	未推导	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	截面的方法引入，练习中介绍用绳子画出椭圆
17	CME 计划编著[①]	《微积分预备知识》	2009	定义 1	中心为原点	方式 1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	截面的方法引入[②]，并介绍用绳子画出椭圆

4 比较分析

4.1 椭圆定义方式比较

表 1 统计了 18 世纪-20 世纪初 14 部历史上圆锥曲线著作，以及美国现行的 3 部中学教材，共 17 部教材。椭圆定义方式汇总如表 2：

表 2 椭圆定义方式的教材比较汇总表

定义方式	数 量	比 例
定义 1	13	65%
定义 2	6	30%
定义 3	1	5%
合计	20	

从表 2 可以发现，定义 1(到两定点距离之和为定值的点的轨迹为椭圆)占 65%，说明这样的定义为大多教材所采用，我国现行高中教材就采用这样的椭圆定义方式。同时，我们也可以看到，定义 2(到定点与定直线的距离之比为定值(小于 1)的点的轨迹为椭圆)占 30%，大多集中在 18-19 世纪，说明这样的定义方式在历史上也占有一席之地，并且这种定义可以推广得到双曲线(定比值大于 1)、抛物线(定比值等于 1)，从而将圆锥曲线的定义统一起来。现行教材由于以定义 1 来引入椭圆，所以学生对定义 2 知之甚少，甚至有些高中教师也不知道椭圆有这样的“第二定义”了。定义 3(从椭圆上两点分别向直径作两条线段与直径端点处的切线平行，则两线段的平方比等于直径上两条相应线段乘积之比)仅占 5%，其实定义 3 是公元前

① CME 是教育发展中心公司下的数学教育中心(Center for Mathematics Education)的简称，该公司位于美国马萨诸塞州牛顿市(Newton, Massachusetts)，CME 项目是由美国国家科学基金支持，为期四年的综合高中数学课程计划，以问题解决为基础、学生为中心，围绕相关主题开展课程(该介绍参见 http://www2.edc.org/cmeproject/index.shtml)。

② 该教材还介绍了“旦德林球”法，说明用平面截圆锥与定义 1 的统一性。

3 世纪，古希腊数学家阿波罗尼斯(Apollonius of Perga，公元前 262-公元前 190)在《圆锥曲线》第 1 卷中明确给出的椭圆基本性质。随着解析几何的创立，这种纯粹几何视角下的定义方式，逐渐淡出了人们的视野。(Heath, 1896)

4.2 椭圆方程推导时直角坐标系的建立方式比较

椭圆方程推导时，建立直角坐标系的方式汇总如表 3：

表 3 椭圆方程推导建系方式的教材比较汇总表

建系方式	数 量	比 例
中心为原点	20	80%
左焦点为原点	1	4%
左顶点为原点	3	12%
其他	1	4%
合计	25	

从表 3 可以看出，以椭圆中心为原点，长轴、短轴所在直线分别为 x 轴、y 轴来建立直角坐标系推导椭圆方程，占绝大部分，为 80%。这样得到的椭圆方程有三种：$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$、$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$、$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(其中 a、b 分别为半长轴、半短轴)，我国现行高中教材就采用这样的建系方式来推导椭圆方程。

4.3 椭圆方程推导方式比较

前文归纳过椭圆方程的推导方式有 6 种，经过教材比较分析，汇总如表 4：

从表 4 可以看出，椭圆方程的推导方式上，可谓“百花齐放、各显神通”，各种方式都在采用，并没有特别明显的趋向性。目前我国高中教材中所采用的方式 1，历史上和美国现行教材都在使用；同时法国数学家洛必达(M. de L' Hospital, 1661-1704)的方法(方式 2)和英国数学家赖特(J. M. F. Wright)的方法(方式 4)都有多次采用；方式 5 主要是椭圆以定义 2(到定点与定直线的距离之比为定值(小于 1)的点的轨迹为椭圆)的方式来推导，由于选取不同的坐标系，采用次数较多；值得注意的是现行美国教材中有 2 部采用不推导的方式，直接给出椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，介绍长轴、短轴和焦点等知识点，注重椭圆概念和应用的教学。

表 4 椭圆方程推导方式的教材比较汇总表

推导方式	数 量	比 例
方式 1	3	12%
方式 2	3	12%
方式 3	1	4%
方式 4	4	16%
方式 5	6	24%
方式 6	2	8%
其他	4	16%
未推导	2	8%
合计	25	

4.4 椭圆方程表达形式比较

椭圆方程的表达形式在教材比较中汇总如表 5

表 5 椭圆方程表达形式的教材比较汇总表

椭圆方程	数 量	比 例
$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$	7	22.6%
$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$	7	22.6%
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	12	38.7%
$y^2=\left(1-e^2\right)\left(2ax-x^2\right)$	3	9.7%
其他	2	6.5%
合计	31	

从表 5 可以看出，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$这种椭圆方程的形式所占比例最大，为 38.7%，另外两种形式$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$和$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$可以看作是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的简单等价形式，合计比例达 83.9%，目前我国和美国中学教材都采用这种形式的椭圆方程。

4.5 椭圆概念引入方式比较

最后，我们来看一下椭圆概念的引入方式，如表 1，绝大多数历史上的教材都是直接引入椭圆的定义，建立直角坐标系，推导方程；很少采用“绳子画出椭圆”或“求轨迹”的方法，创设情境，引入椭圆概念；美国现行教材中有 2 部从“平面截圆锥”的方式引入椭圆概念，也介绍“绳子画出椭圆”的方法，其中一部教材还介绍了“旦德林球”法，说明两种定义的一致性，给我们提供了一定的思考。

5 比较结果

我国现行教材是以用绳子画出椭圆的方法引入椭圆概念“到两定点距离之和为定值的点的轨迹为椭圆”(定义 1)，以椭圆中心为原点，长轴、短轴所在直线分别为 x 轴、y 轴建立直角坐标系，采取“两次平方”的方法(方法 1)推导得出椭圆标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

通过对 17 部圆柱曲线教材(14 部历史上的教材，3 部美国现行教材)的比较分析，再对照我国现行教材，不难得出以下结果：

(1) 椭圆定义方式、坐标系建立方式和椭圆方程形式符合历史上教材的处理方式，具有历史相似性；

(2) 椭圆方程的推导，我们现在教材中所呈现的只是历史上众多方法的一种而已，或许有些历史上的方法更精彩；

(3) 椭圆概念的引入，历史上教材大多数并没有创设情境，而是直接引入，我国教材采用历史上部分教材“用绳子画出椭圆”来引入，没有采用椭圆最原始的概念(古希腊人是从平面截圆柱或圆锥发现椭圆及其他圆锥曲线的！)来引入，或许是一种无奈之举，因为解析几何的创立让人们更多从解析的角度来认识圆锥曲线了。然而“旦德林球”是这两种定义间的桥梁，或许可以从中找到从椭圆概念的起源来引入椭圆的一些方法。

参考文献

[1] Apollonius of Perga, Heath, T. L. (ed) 1896. *Treatise on conic sections*. Cambridge: At the University Press

[2] Bellman, A. E., Bragg, S. C., etc (ed.) 2009. *Algebra* 2. Boston: Pearson, 546-547, 568-572

[3] Casey, J., 1893. *A Treatise on the Analytical Geometry of Point, Line, Circle & Conic Sections*. Dublin: Hodges, Figgis, & Co., 201-204

[4] CME Project, 2009. *Precalculus*. Boston: Pearson, 465-478

[5] Coffin, J. H. 1851., *Elements of Conic Sections & Analytical Geometry*. New York: Robert B. Collins, 99

[6] Davies, C., 1867. *Elements of Analytical Geometry*. New York: A. S. Barnes & Co., 95-97

[7] Hamilton, H. P., 1843. *An Algebraic System of Conic Sections*. Cambridge: Cambridge University Press, 89-106

[8] Hymers, J. A., 1845. *Treatise on Conic Sections & the Application of Algebra to Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 60-68

[9] Jackson, I. W., 1850. *Elements of Conic Sections*. Albany: Gray and Sprague, 1-7

[10] Larson, R., Boswell, L., etc (ed.) 2007. *Algebra* 2. Boston: McDougal Littell, 634-636

[11] L'Hospital, M. de. 1720. *Traité Analytique des Sections Coniques*. Paris: Montalant, 22-25

[12] Robinson, H. N., 1862. *Conic Sections & Analytical Geometry*. New York: Ivison, Phinney & Co., 140-142

[13] Salmon, G. A., 1855. *Treatise on Conic Sections*. London: Longman, Brown, Green, & Longmans, 161-162

[14] Siceloff, L. P., Wentworth, G. & Smith, D. E. 1922. *Analytic Geometry*. Boston: Ginn and Company, 139-140

[15] Smith, C., 1890. *An Elementary Treatise on Conic Sections*. London: Macmillan & Co., 112-113

[16] Steell, R., 1745. *A Treatise of Conic Sections*. London: St John's Gate, 17

[17] Todhunter, I., 1888. *A Treatise on Plane Coordinate Geometry as Applied to the Straight Lines & the Conic Sections*. London: Macmillan & Co., 143-145

[18] Wright, J. M. F., 1836. *An Algebraic System of Conic Sections & Other Curves*. London: Black & Amstrong, 94-95

[19] 汪晓勤, 2012. 椭圆方程之旅. 上海 HPM 通讯, 1: 32-38

基于数学史的平均值概念的理解

吴　骏[1,2]

(1.华东师范大学数学系，上海 200241；

2.曲靖师范学院数学与信息科学学院，云南曲靖　655011)

平均数的理解具有多面性。StraussStrauss 和 Bichler 指出，平均数的理解包括 7 条性质：(1)平均数介于最小值和最大值之间；(2)平均数与数据之差的和为零；(3)平均数易受到不等于平均数的数据的影响；(4)平均数不一定是数据中的一个值；(5)平均数可能是一个在现实意义中不存在的非整数；(6)计算平均数时，要把数值为零的数据考虑在内；(7)平均数是被平均的那些数据的代表[1]。Marnich 认为，公平分享和中心平衡是平均数理解的两个重要方面[2]。事实上，描述一组数据的平均水平，除了使用应用较为广泛的平均数以外，还有中位数和众数，这 3 个表示集中趋势的统计量，统称为“平均值”。本文从数学史的视角来探讨平均值概念的理解，以期能对中学统计教学有所裨益。

1 利用平均数估计总数

在历史上，平均数最早是用来估计总数的。公元 4 世纪，在古印度有一个估计树枝上树叶和果实数目的故事：

一棵枝叶茂盛的大树长有两条大的树枝，Rtuparna 需要估计这两条树枝上树叶和果实的数目。他首先估计了根部的一条小枝丫上树叶和果实的数目，然后乘以树枝上所有树丫的数目，得到估计值为 2095。经过一夜的计算，证明 Rtuparna 的估计十分接近实际的数目[3-5]。

在这个例子中，尽管我们不能确定 Rtuparna 如何选择小树丫，但可以猜想他可能选择了一条平均大小的树丫，由此得到了恰当的估计。平均大小的树丫具有代表性,这可能是算术平均数的直觉使用，因为所选的小树丫代表了其余的所有树丫，其数量处于“中间”位置，应该不是太多，也不可能太少，否则所得总数将会变得太大或太小。用现代术语来说，选择一个代表值 a，再乘以枝条的数目 n，得到总数 $n\times a=\sum x_i$，其中 x_i 是每条枝丫上的叶子和果实数。这个例子启发我们，在教学设计时，应该把大数估计问题作为学生的认知起点，通过教学活动让学生再现这种方法，以培养他们对平均数的直觉能力。只有在学生已经发展了代

表性的思想之后，才教给他们平均数的计算方法，而不是让学生掌握了平均数的计算公式以后，再来理解平均数的代表性。

2 中点值是算术平均数的前概念

算术平均数的前概念可能是中点值，即两个极值的算术平均数。中点值在 9 世纪至 11 世纪阿拉伯人的天文、冶金和航海中有广泛的应用。托勒密(Ptolemy, 100-170)在《天文学大成》中写到：取最大值和最小值的平均数是一条法则[6]。一个雅典指挥官 Thucydides，在《伯罗奔尼撒人战争的历史》一书讲述了利用中点值计算船员人数的故事：

Homer 给出了船的数目是 1200 条，两种不同的船分别有 120 名和 50 名船员。他的意思是表达了各种船中船员的最大数目是 120 人和最小数目 50 人，因此可以取最大和最小数目的平均数，作为每条船上船员的平均人数，以此估算出全体船员的数目。

直到 16 世纪，算术平均数才被推广到 n 个数的情形：$a=\frac{1}{n}\sum x_i$。Stevin 在 1585 年发明的小数为这种计算提供了便利。天文学家在使用多个观测值的平均数是有用的，如估计行星的位置和月球的直径等，能把误差降低到一个相对较小的程度。

从现代的观点来看，中点值不是一个很有用的平均数，因为它对极端值太敏感。但学生在学习平均数时，可能会使用中点值作为求平均数的原始方法，因而应该把中点值的教学作为理解平均数的最初策略。

3 重复测量取平均数可以减小误差

对观测数据取平均数以减小误差这种方法在天文学中得到了发展。16 世纪末期，第谷(Tycho Brahe,1546-1601)把对一个数量重复观察和把观察数据分组的技巧介绍到科学方法中。他在 6 年时间里对某一天文量进行重复观测得到一组观察值。他先从 1582 年的观察值中，挑选了 3 个数据，再把 1582 至 1588 年的 24 个数据，两个数据组成一组，求出平均数，得到 12 个数据。最后，第谷求出这 15 个数据的平均数作为真实值的估计值[7]。由此可知，第谷使用算术平均数来消除系统误差。

辛普森(Thomas Simpson, 1710-1761)在 1755 年向皇家学会宣读的《在应用天文学中取若干个观测值的平均数的好处》文章中指出，在天文学界，取算术平均的做法并没有为多数人所接受。他们认为，当有多个观测值时，应选择其中那个“谨慎地观测”所得的值，认为这比平均数可靠。辛普森试图证明，若以观测值的平均数估计真值，误差将比单个观测值要小，且随着观测次数的增加而减小。辛普森对一种极特殊的误差分布证明了其结论。他假定在一

次天文测量中以秒来度量的误差只能取 0, ± 1, ± 2, ±3, ± 4, ± 5 这 11 个值，取这些值的概率则以在 0 处最大，然后在两边按比例下降，直到± 6 处为 0，即

$$P\{x=i\}=(6-|i|)r, i=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm5\text{。其中 } r=\frac{1}{36}\text{。}$$

根据所给的分布，可算得单个误差不超过 1 秒的概率为 $\frac{16}{36}$=0.1444，不超过 2 秒的是 $\frac{24}{36}$=0.1667。为比较起见 ，他又计算出 6 个误差的平均值不超过 1 秒的概率是 0.1725，不超过 2 秒的是 0.1967。可见，平均数的估计优于单个值。这个结果可视为第一次在一个特定情况下严格从概率角度证明了算术平均数的优良性[8]。

1809 年，高斯(C. F. Gauss, 1777-1855)在其数学和天体力学的名著《天体运动理论》中写到：如果在相同的条件下并具有同样的认真程度，任何一个数量通过几次直接的观测而确定，那么观测值的算术平均数提供了最可能的取值，即使不是太严格，但至少十分接近，使得它总是一个最安全的取值。

现在，人们已经习惯于把高斯的这个观点当作一个公理。在学生理解平均数的过程中，重复测量可能是一个有用的教学活动。此外，重复测量这种方法也被广泛运用于物理和数学的其它分支中。反之，历史和物理可以为引入平均数概念提供有益的帮助[9]。

4 平均数的补偿性

在希腊几何中，数的大小用线条来表示。如图 1，最长的线条长度为 10，最短的线条长度为 2，中间线条的长度为 6。亚里斯多德(Aristotle, 384-322 BC)给出了平均数的几何定义：a 和 c 中间的数 b 称为算术平均数当且仅当 $b-a=c-b$。他说，平均数既不能太多也不能太少。例如, 10 太多了，而 2 太少了，由于 10-6=6-2，因此, 6 是这两个数的平均数。数的线条表征直观地显示了平均数介于两个极值之间，是利用补偿策略求平均数的脚手架。

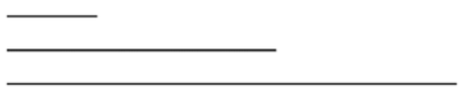


图 1 希腊几何中数的线条表征

我国《九章算术》方田章第 6 题：今有三分之一，三分之二，四分之三。问：减多益少，各几何而平？答曰：减四分之三者二，三分之二者一，并，以益三分之一，而各平于十二分之七。又有二分之一，三分之二，四分之三。问：减多益少，各几何而平？答曰：减三分之二者一，四分之三者四，并，以益二分之一，而各平于三十六分之二十三。

该题采用平分法来求解。平分指当各个分散参差不齐时，为使它们齐等，可减那个分数

所多的部分，增益这个分数所少的部分，即所谓的“移多补少”方法。第一问中的解答是从$\frac{3}{4}$减$\frac{2}{12}$，从$\frac{2}{3}$减$\frac{1}{12}$，将$\frac{2}{12}+\frac{1}{12}$加到$\frac{1}{3}$上，故得到它们的平均数为$\frac{7}{12}$。第二问同此[10]。

由此可见，借助于数据的线条表征，采用“移多补少”的方法可以直观地体现出平均数的补偿性。例如，图 2 给出了一组数据的线条表示，如何估计这组数据的平均数呢？可以选择一个中间位置的数据作为平均数的估计值，如线条长度为 40 的这个点，尽管这组数据的平均数比 40 多一点，在该点处做一条垂线，把右边线条中多余的部分补到左边(如图 3)。

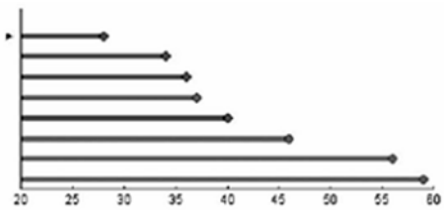


图 2 数据的线条表示

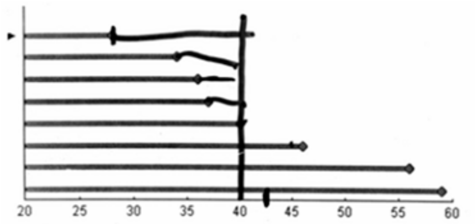


图 3 平均数的补偿性

5 平均数的公平分享

除了估计大数和几何定义外，平均数还起源于贸易、保险和海事法案背景中的公平分享。

公元前 1000 年，地中海的航海贸易就已经存在了。在遭遇暴风雨袭击时，小船需要扔掉一些超重的货物，以避免船翻或保全其余的货物，这种行为称为“抛弃货物”。从公元 700 年开始，商人和船主就认为货物和轮船的损失应该由他们共同平等地分担。这种思想已经成为了惯例，并写进了罗马法律，其中一项条款是：为了减轻船体的重量，必须扔掉超重的货物，这个损失应该由货主共同分担。

对于在具体情景中如何处理，如“应该按照什么比例进行补偿？”的问题，其中一条法案写到，应该把保存下来和已经丢弃的货物按照价值进行平均分配。这就涉及到计算平均数，当时的计算被称作所谓的“平均调解员”来负责，这是一种严肃的职业，在 19 世纪和 20 世纪初英国甚至还成立了“平均调解员协会”。

平均数在海事法案中指“在通常的事件中，平等分配消费或损失。”即把每个成员的一系列不等量的财产累加起来，再平均分配，让他们获得共同的或平均的数量。

可见，平均数的公平分享起源与人们直觉中的公平、公正、平等是相互联系的，这就意味着公平分享在教学背景下也是适合的，公平分享是学习平均数的前期良好准备。

6 平均数不一定具有实际意义

19 世纪以前，历史上的平均数是用来估计真实值的。在一些古老的例子中，平均数作为一种方法出现。另外，在天文学和测地学中利用平均数减小误差。平均数作为一个代表值或代替值经历了很多年的发展。1831 年，魁特奈特(A. Quetelet, 1796-1874)提出了“平均人”的概念，这是发明者虚构的一个人[11]。魁特奈特是首次使用平均数作为总体某一个方面代表值的科学家，这种从真实值到统计意义下代表值的转换是一个重要的观念性改变。在他汇编的统计资料中，不仅涵盖了个体的身高、体重这些物理特征，还包括了伦理特征，如犯罪倾向、酗酒倾向等。由此他提出可以建立在给定时间、给定社会中的代表性人物这种概念，即“平均人”。当然，按不同年龄、不同国家和不同阶级，可以分为不同的平均男人或女人。使用“平均人”的目的是为了理顺人们在社会中存在的各种差异，并在某种程度上归纳出社会的正常规律，即一种“社会物理学”。

平均数不一定等同于给出数据集合中的某个数据，尽管给出的数据都是整数，但平均数可能是一个在现实情景中没有意义的小数。如对“平均每个人每天看 1.5 小时电视和平均每个家庭有 2.5 个人”的理解，显然，这是两个不同的情景，半小时是存在的，而半个人却不存在。

7 在偏态分布中使用中位数作为平均值的代表

在历史上，中位数几乎是作为平均数的代替品而出现的。1874 年，费歇尔(G. T. Fechner, 1801-1887)借助于天文学中行之有效的方法，使用中位数来描述社会和心理现象。1883 年，高尔顿(F. Galton, 1822-1911)第一次使用“中位数”这个术语，取得了观念上的突破。与数学和统计历史经常发生的情况一样，高尔顿在使用这个术语之前就已经知道了这个概念，但他使用其他的术语，如最中间的值，中等的等，在 1874 年的一次演讲中他给出了下列的描述：“一个占据中间位置的物体具有这样的性质，即比它多的物体的数目等于比它少的物体的数目。”由于高尔顿研究的大多数现象几乎是对称的，所以中位数和平均数没有太大的区别。除了中位数容易计算和直观之外，高尔顿使用中位数还有另外一个原因。他研究的变量还有一种是用次序测量的，确实，对于有序变量，平均数不能计算，但中位数却能。与高尔顿同时代的埃其渥斯(F. Y. Edgeworth, 1845-1926)发现平均数对极端值的敏感性，而中位数比平均数更稳健(稳健性用于描述对极端值的不敏感性)，因此选择了中位数代替平均数。这可能源于埃其渥斯对经济学的兴趣，而经济学中大多是一些不规则的数据。现在，中位数对极端值的不敏感性是使用它的主要原因。随着统计学运用到越来越多的不规则数据中，中位数的使

用受到了人们的普遍欢迎。

第一个可能使用中位数的例子出现在 Edward Wright 关于航海的著作中。1599 年，在该书中，他描述了用指南针确定位置的方法：

在海上航行，指南针是一个重要的航海工具，可以用来确定轮船在海上的位置。但由于海浪的影响，指南针在轮船甲板上得到的观察数据会发生很大的变化，尽可能做到精确是很重要的。可以把指南针得到的观察值列成表格，在各种不同的数据中，位于最中间位置的数据是最可能接近真实值的数据[6]。

不幸的是，Edward Wright 在他的论著中没有给出任何数据的运用，因此，不可能绝对确信他使用了中位数，然而他在文中写到"一个又一个的数据被拒绝了"，这说明他可能采用了最中间的观测值，即中位数。

但在实际应用中，中位数还是被忽视了，而平均数是受欢迎的。历史上一个微小的进步可能需要几个世纪的历史发展，这对学生来说可能也是困难的。因此，中位数的引入应该遵循历史发展顺序，采用一组带有极端值的不规则数据，激发学生论证中位数代替平均数的合理性，从而达到对中位数的深刻理解。

8 众数表示重复计数中的准确值

第一个使用众数的例子，可能出现在雅典和斯巴达战争中发生的事。

在公元前 428 年冬天，普拉铁阿人被伯罗奔尼撒人和皮奥夏人包围。不久，他们开始出现粮食短缺，处于绝望之中。由于从雅典人那里获得援助已经没有希望了，也看不到其他安全突围的方法，他们和被包围的一些雅典人计划弃城而去，他们打算做梯子翻过敌人的城墙，希望能杀出一条血路。梯子的高度要与敌人城墙的高度一样，为此，可以数敌人城墙上砖块的层数来计算城墙的高度。在相同的时间，很多人数了砖块的层数，有些可能数错了，大多数人可能得到一个真实的数目，特别是那些距离城墙不太远，能看清城墙的人多次数的结果。他们再猜测出一块砖的厚度，从而计算出了梯子的高度[3]。

我们可以看出，在这个例子中，已经使用了众数的概念。在本例的情境中，很多人去数城墙砖块的层数，也就是对砖块重复计数，出现频率最高的值就是正确的。在这里，众数意指"大多数"，也就是最经常出现的那个数，但不一定超过一半。另外还有一个众数使用的例子，即关于选举的问题。在古希腊和意大利，选举机构已经作为一个基本形式存在很长的历史时期了。在原始的君主统治时期，往往通过一些喧闹的聚会来记录他们的观点。随着政治的发展，这些国家已经牢固建立了政府行事采纳大多数人意愿的原则。根据他们的宪法规定，几乎每一个重要的法案都要通过正式的投票来决定。

可以认为，在古代有一些重复记数或表示大多数的例子中，采用众数作为“准确值”。由此可见，当一组数据呈现明显的集中趋势时，宜采用众数作为其平均值的代表。此外，众数还是测量非数字类型的统计量。如美国 Pearson Prentice Hall 出版社 2008 年出版的初中数学教材中, sad, glad, glad, mad, sad 的众数是 sad 和 glad。

9 算术平均数和中位数的本质

18 世纪后期，在勒让德(A. M. Legendre, 1752-1833)发明最小二乘法之前，对天文学和测地学中观察误差数据的处理已经有一些重要的工作了。曾经一度流行的方法是由所要寻找的估计值和测量的观察误差值建立方程，根据一个方程解一个未知数的道理组合出未知数个数与方程个数相等的方程组，总方程的系统比原始方程的系统更稳定，最后求出这样一个总方程组的解，得到真值的估计值。大约 1755 年，波斯科维奇(R. Boscovich, 1711-1787)在研究地球真实形状的有关问题时才指出其不足，并清晰地用到了中位数[12]。他对一组观测值的最佳拟合直线方程附件了一个约束条件：绝对误差之和最小。简单说，即对于一组观测数据 x_i，使 $\sum|x_i - a|$ 达到最小的 a 是这组数据的中位数。这就是最小一乘法。

勒让德不是致力于找出几个方程再去求解，而是考虑误差在整体上的平衡，即不使误差过分集中在几个方程内，而是让它们比较均匀地分布于各个方程。勒让德认为：“赋予误差的平方和为极小，则意味着在这些误差间建立了一种均衡性，它阻止了极端情形所施加的过分影响，这非常好地适用于揭示最接近真实情形的系统状态[13]。”1805 年，勒让德发明了最小二乘法。算术平均数是对最小二乘法最简单的解释，即对于一组观测数据 x_i，使 $\sum(x_i - a)^2$ 达到最小的 a 是这组数据的算术平均数。

由上面的分析可知，算术平均数是到一组观测数据的距离的平方和最小，而中位数是到一组观测数据的距离之和最小，这正是算术平均数和中位数的本质。在最小二乘法中，体现了平均数是一组数据平衡位置的物理特征；在最小一乘法中，体现了中位数的稳健性。

综上所述，历史现象学为我们理解平均值概念开拓了广阔的视野但由于学生缺乏历史背景的相关知识，而且他们也可能了解了前人不知道的一些知识，因而，在实际教学中，需要遵循学生的认知发展规律，重构历史顺序，把历史现象学转化为教学现象学，采用自然的方式呈现所教的知识。

参考文献

[1] Strauss, S. & Bichler, E., 1988. The development of children's concept of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1): 64–80

[2] Marnich, M. A., 2008. *A knowledge structure for the arithmetic mean: relationships between statistical conceptualizations and mathematical concepts.* Doctoral dissertation, University of Pittsburgh

[3] Bakker, A., 2003. The early history of average values and implications for education. *Journal of Statistics Education* , 11(1): 1-24

[4] Bakker, A., 2004. *Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools.* Ph.D. thesis, The Freudenthal Inistitute, Utrecht

[5] Bakker, A. & Koeno, P. E., 2006. An Historical Phenomenology of Mean and Median. *Educatioal Studies in Mathematics*, 62(2)：149-168

[6] Eisenhart, C., 1974. "*The development of the concept of the best mean of a set of measurements from antiquity to the present day*," American Statistical Association Presidential Address, unpublished manuscript

[7] Plackett, R. L., 1970. "The Principle of the Arithmetic Mean," *Studies in the History of Statistics and Probability* (Vol. 1), eds. E. Pearson and M. G. Kendall, London: Griffin

[8] 陈希孺, 2002. 数理统计学简史. 长沙：湖南教育出版社

[9] Tzanakis, C. & Kourkoulos, M., 2004. "May history and physics provide a useful aid for introducing basic statistical concepts?" *Proc. of the HPM Satellite Meeting of ICME-10 & the 4th Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, F. Furinghetti, S. Kaisjer, A. Vretblad (eds), Upsalla, 425-437

[10] 郭书春, 2009. 九章算术译注. 上海：上海古籍出版社

[11] Stigler, S. M., 1999. *Statistics on the Table.* The History of Statistical Concepts and Methods, Cambridge, MA: Harvard University Press

[12] Eisenhart, C., 1977. "Boscovich and the combination of observations", in M.G. Kendall and R.L. Plackett (eds.), *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. 2, Charles Griffin, London

[13] Stigler, S. M., 1986. *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty Before* 1900*,* Harvard University Press, Cambridge, MA

HPM视角下“数系的扩充与复数的引入”课例研究*

方国青[1]　王芳[2]

(1. 浙江省义乌市大成中学; 义乌, 322000; 2. 浙江省义乌中学; 义乌, 322000)

1 问题的提出

人教A版普通高中数学课程标准实验教科书选修1-2的“数系的扩充与复数的引入”一节是从实数域扩充到复数域的开篇, 书中给出思考题“$x^2+1=0$ 在实数集中无解。联系从自然数系到实数系的扩充过程, 你能设想一种方法, 使这个方程有解吗? ”与学生访谈发现, 他们的真实感受是: 既然初中教材已经明确这个方程没有实根, 到了高中何必非得使它有根? 换言之, 以“使方程$x^2+1=0$有根”作为虚数的引入虽然简洁明了, 但还不足以让学生产生强烈的认知欲望, 这需要我们从数学史中寻求解决方案。

事实上, 历史上虚数的引入并非一帆风顺。在16世纪以前的数学家看来, 负数开平方就是一个“不可能”问题。12世纪印度数学家婆什迦罗(Bhaskara)认为$x^2+1=0$在实数范围内没有解, 他指出: “正数与负数的平方都是正数, 正数的平方根有两个, 一个正, 一个负。但是负数没有平方根, 因为它不是一个平方数。”[1]在欧洲, 12世纪西班牙犹太学者巴希亚(A. bar Hiyya, 1070-1136)、13世纪意大利数学家斐波纳契(L. Fibonacci, 1170-1250)、15世纪意大利数学家帕西沃里(L. Pacioli, 1445-1517)和法国数学家许凯(N. Chuquet, 1445-1488)在讨论一元二次方程的根时, 都遇到了$\Delta<0$的情形, 他们也不承认方程的负数开平方根的存在[2], 这一情形与学生学习虚数之前的认识相似。16世纪至17世纪数学家们对于卡尔丹公式“不可能”情形以及三次方程实根之间的矛盾感到困惑, 正是这种强烈的认知冲突驱使邦贝利(R. Bombelli, 1526-1572)以及后来的莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646-1716)等数学家对虚数进行深入研究并最终解决矛盾[3], 这才是研究负数开平方根问题的直接动因。

既然如此, 为什么高中数学教材没有呈现这一数学史实? 其主要原因是高中阶段并不要求学生掌握三次方程的求根问题。即使出现, 也可以通过因式分解转化为二次方程的求根问题。这样一来, 若照搬史实, 将超出教学要求。若忽略这一史实, 又容易引起学生不解。

---

* 本文系浙江省义乌市王芳数学教育工作室“HPM系列案例”之二。

如何还原虚数产生过程中的历史片段，以激发学生的学习动机，又不至于额外增加学习负担？

另外，由于现行教材大大缩减了复数的篇幅(如删去了复数的三角形式)，要求相应降低，学生难以充分感受复数的应用价值，不少学生学完了复数仍然觉得虚数“飘渺而无用”。其实，历史上人们对虚数也曾经产生过类似的怀疑和误解，笛卡儿以“虚数”命名的本意就是指它是虚无的。如何在引入虚数之后有效地利用学生学习时产生的质疑，使之形成正确的认识？这是本课教学必须面临的第二个问题。

因此，我们从 HPM 视角出发，借鉴数学史，对三次方程根的问题进行了合乎学生认知水平的教学处理，并将复平面知识顺势提前，使学生认识到“虚数是可以捉摸的”，再结合学生刚学过的物理学知识，使之体会到“虚数是有用的”。基于这些设想，开展了如下的教学实验。

2 课堂实录

2.1 引入虚数的必要性的探究

师：为欢庆元旦，我们要用 20 分米长的彩带制作一个面积为 24 平方分米长方形框架。请问该如何确定这个框架的长和宽？

生 1：设长为 x 分米，宽为 y 分米，则有 $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=24 \end{cases}$，解得 $x=6, y=4$。

师：1545 年意大利数学家卡尔丹在《大衍术》中也提到这样一个类似的问题“将 10 分成两个部分，使它们的乘积等于 40”，如何求这两个数？

生 2：方法一样。设其中一个数是 x，则另一个数为 $10-x$，得到 $x^2-10x+40=0$。但这里的 $\triangle=-15<0$，方程无解。

师：如何理解“方程无解”？

生 2：就是没有实根的意思。

师：对。当时卡尔丹也这么认为，但他运用二次方程的求根公式，却发现

$$(5+\sqrt{-15})+(5+\sqrt{-15})=10\text{，}(5+\sqrt{-15})\cdot(5+\sqrt{-15})=40\text{。}$$

生：怎么能这样？！(教室内一片质疑之声)

师：这确实令人匪夷所思。方程的根即函数图象与 x 轴交点的横坐标。对于函数

$f\left(x\right)=x^2-10x+40$，图象表明，方程两根之和为对称轴上点的横坐标的 2 倍，两数之积为图象与 y 轴交点的纵坐标。我们可以清楚地看到和与积所在的位置(如图 1)，却找不到这两个数……它们跑哪儿去了呢？

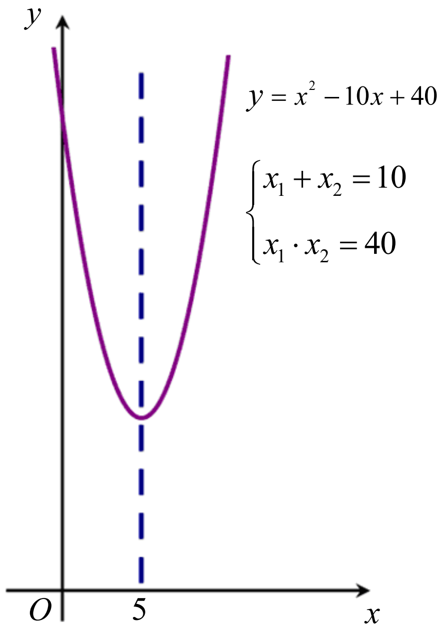


图 1

师：事情还远不止此。我们知道，一元二次方程的根有三种情形：(1)当 $\Delta>0$ 时有两个相异实根；(2)当 $\Delta=0$ 时有两个相等实根；(3)当 $\Delta<0$ 时没有实根。对照前两种情形，第三种显得不太和谐。你们认为这里的理想情形是怎样的？

生 3：最好 $\Delta<0$ 时也有两个什么根。可惜它们并不存在！

师：看来，我们已经开始希望它们存在了。我们曾经学习过一元二次方程的求根公式和韦达定理，其实三次方程有求根公式(也叫卡尔丹公式)和韦达定理，高中阶段这块内容不作要求。不过 16 世纪意大利数学家邦贝利解三次方程时遇到了一个奇怪的现象，我们不妨了解一二。他用卡尔丹公式(让学生看课前发放的学习材料)得到了方程 $x^3=15x+4$ 的三个根 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 或 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 。他又换个角度，把这个三次方程因式分解为 $(x-4)(x^2+4x+1)=0$，这里一个根 $x=4$，从 $x^2+4x+1=0$ 也解出了 $x=-2\pm\sqrt{3}$。你们发现了什么？

生：$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$ (众人脱口而出，又齐刷刷盯着这个等式，眼中充满疑惑和神奇)。

师：同一个方程，根当然相同，这是一个不争的事实。但这个式子无疑激起了我们的好

奇。一边是实数 4，一边是用两个负数的平方根组合而成的数，它们居然“站”到了一起。卡尔丹、邦贝利及他同时代的数学家也和你们一样对此感到惊讶，但解三次方程又必须弄清这个困惑。种种矛盾摆在我们眼前，你们觉得这些矛盾指向哪里?

生 4：矛盾就是负数开平方，如果负数可以开平方就好了。

师：但-121, -15, -16, -17, -17.7777……负数不胜枚举，我们显然无法逐个解决，怎么办?

生 5：只要 -1 能开平方，那么所有的负数都可以开平方。

师：我也赞同！现在的问题如何让 -1 可以开平方? 历史上出现这样的矛盾冲突不止一次。前事不忘，后世之师。从解方程的角度回顾数系的扩充，或许对我们会有所启发。

(1) 在自然数域 N 中 $x+4=1$ 无解，引入负整数后方程有解。N 扩充到 Z，可实施加法、减法和乘法；

(2) 在整数域 Z 中 $3x-2=0$ 无解，引入分数后，方程有解。Z 扩充到 Q，可实施加、减、乘和除法(除数不为零)；

(3) 在有理数域 Q 中方程 $x^2-2=0$ 无解，引入无理数后，方程有解。Q 扩充到 R，可实施加、减、乘法、除法和开方运算。

看来每一次数的概念扩充，都是在原来数集基础上“添加”新数得来。在新的数集中，原来的运算和性质仍然使用，同时解决了某些运算在原来数集中不可以实施的矛盾。今天我们遇到了负数开平方这个超越实数集范围的问题，怎么办呢?

生 6：我们也可以添加新数，对实数集进行扩充。

师：很好！刚才我们已经把问题聚焦于“-1 能开平方”，那么我们也可以引入这样一个新数“i”，使“$i^2=-1$”。这个新数 i 是 1777 年欧拉提出的，他用了“imaginary”一词的首字母，本意是它只是存在于“想象之中”。

教师作以下总结：引入这样一个新数 i，称之为虚数单位，并规定：

(1) $i^2=-1$；

(2) 实数可以与 i 进行四则运算，运算时原有的加法与乘法的运算律(包括交换律、结合律和分配律)仍然成立。

2.2 探索复数的一般表达形式

师：请同学们用实数 2, 3, 以及虚数 i 这三个数中的若干个进行四则运算，看看谁写的运算关系式更加丰富多彩。

生 7：2, 3, i, 2+i, 2-i, 3×i, 3÷i。

生 8：3i+2, 2i-3, 2i×3, 2i÷3。

生 9：i^2, i^3, 还有 2^i，3^i。

师：指数运算不属于四则运算, 但这位同学的想法很有意思。如果将 i 的次数从小到大排列成：$i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, \ldots$, 可以发现什么规律?

生 10：哦, 以 4 为周期, i, -1, -i, 1 循环出现。

生 11：可以总结成 $i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$。

师：至于 2^i，3^i 的值, 我们尚在探究中。此刻不由让我想起了在 1988 年美国举办的数学公式选美大赛的冠军——欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$，来自数学各个领域的五朵金花"i, e, π, 0, 1"在此同放异彩, 珠联璧合, 玄兮妙兮, 完美地体现数学家的智慧！

师：现在我们一起来看前面的几个数。能否通过适当的变换, 使它们具有共同结构?

生 12：对照 $2\pm i$，$3\pm i$，还有 $2=2+0\cdot i$，$i=0+1\cdot i$，$3\div i=\dfrac{3\cdot i}{i\cdot i}=0-3\cdot i$，都可写成"实数+实数×$i$"。

师：是的, 我们用字母 a,b 代表实数, 则它们都可以写成 $z=a+bi(a,b\in R)$，这就是复数的一般表示形式。其中 a 叫做复数的实部, b 叫做复数的虚部, i 称为虚数单位。

师生对上述各数进行归类分组, 总结成图 2 和图 3。

$$
\text{复数 } z=a+bi(a,b\in R)\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\\ \text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ (a=0,b\neq 0)\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq 0,b\neq 0)\end{cases}\end{cases}
$$

图 2

通过例题"当实数 m 为何值时, 复数 $z=m(m-1)+(m-1)i$ 是：(1)实数? (2)虚数? (3)纯虚数? (4) 0? (5) 6+2i ? "巩固上述知识, 并探讨复数相等的充要条件。

2.3 澄清"虚数不虚"

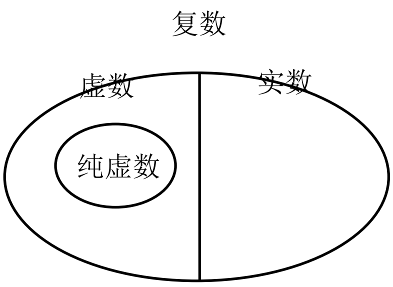


图 3

师：现在我们已经可以像卡尔丹一样来解决他问题：

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5+\sqrt{-15}\right)=\left(5+\sqrt{15}i\right)+\left(5-\sqrt{15}i\right)=10\ 。$$

对于邦贝利三次方程中的问题，也有

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\\&=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}\\&=\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}\\&=(2+i)+(2-i)\\&=4\end{aligned}$$

(首尾呼应解决数学家的问题，学生积极性很高)

师：我们知道，所有的实数都可以与数轴上的点一一对应，而复数的一般表达形式告诉我们，它由两个实数确定。我们是否也像实数一样，为复数建立一个与之对应的几何模型？

生 13：这样的话就需要再引入一根数轴……直角坐标系就是用两根数轴的，行吗？

师：看看能否一一对应(绘制图 3)，你们的想法与高斯不谋而合！我们称之为复平面。这样一来，虚数也能看得见啰！

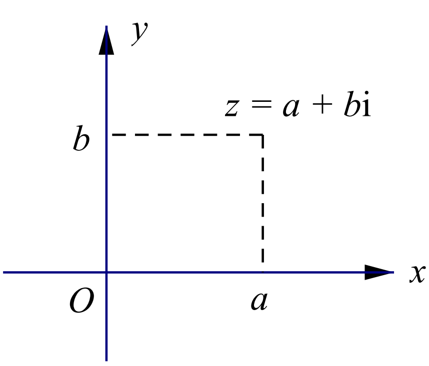


图 3

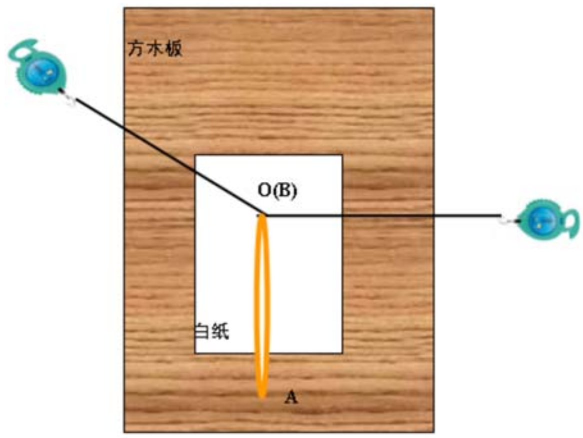


图 4

师：下面我们来看必修一人教版《高一物理实验手册》第 42 页中的一个实验(图 4)。

(1) 把方木板放在桌面上，用图钉把白纸钉在方木板上；

(2) 用图钉把橡皮条的一端固定在方木板上 A 点，橡皮条的另一端 B 栓上两根细绳；

(3) 用两把弹簧秤分别勾住两根细绳，沿两个不同方向拉橡皮条，使橡皮条的结点 B 拉到点 O，记下两根弹簧秤读数和两根细绳方向。

师：若已测得实验数为 $F_1 = 7N$, $F_2 = 25N$, $\cos\angle F_1OF_2 = -\frac{7}{25}$，请用力的合成探求合力的大小及方向。

学生用平行四边形法则做出力的合成图(图 5)，并计算出：

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{OF_1^2 + OF_2^2 - 2OF_1 \cdot OF_2 \cdot \cos\angle F_1OF_2} \\ &= \sqrt{7^2 + 25^2 + 2\times 7\times 25\times\left(-\frac{7}{25}\right)} \\ &= 24 \end{aligned}$$

故 $\angle FOF_1 = 90^\circ$，得合力方向与橡皮条方向相反。

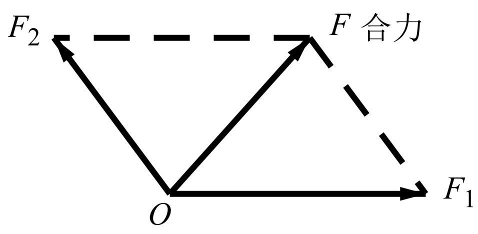


图 5

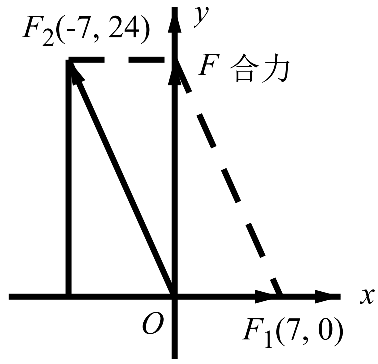


图 6

师：借助复平面，我们也可以这样处理。如图 6，$F_1 = 7 + 0\cdot i$，$F_2 = -7 + 24\cdot i$，则 $F_1 + F_2 = 24i$，结论也是相同的，但它的运算相对快捷。

师：高斯提出复平面的概念，终于使复数有了立足之地，也为复数的应用开辟了道路。请同学们课后参考书籍资料、网络资源完成一个复数学习总结报告。建议的学习方向有数系发展的历史轨迹与发展展望，数学大师谈虚数，复数与其他学科的联系，虚数在物理学多个领域中的应用。

3 课后调查

课后，我们采用问卷和访谈两种方式对学生进行了调查，结果表明：

(1) 虚数的引入方式。46%的学生认为三次方程求根公式中的负数开平方更易于接受，54%的学生认为三次方程求根问题虽没有学过，但教师在教学中已将难点弱化，并未增加思维负担。

(2) 概念的探究过程。82%的学生认识到数系的扩充经历了一个从无到有、从模糊到清晰、从矛盾冲突产生到问题解决的过程，76%的学生认识到每一个数学知识背后都包含诸多艰辛与曲折。

(3) 虚数概念的理解。21%的学生认为尚不能完全理解"虚数"这一新概念，正如欧拉所言："它们是不可能的数"、"只存在于想象之中"[6]；79%的学生认为虚数还是可用的，学习后对虚数所持的态度由怀疑转为接受；83%的学生认为虚数在物理力学中的简单应用有助于减弱其排斥心理，并体会到不同学科之间的神奇联系；8%的学生认为数学法则是一种人为的规定，这也与高斯所说的"对许多人来说，虚数似乎只是一种符号游戏"[4]相一致。

(4) 数系扩充的规律。81%的学生认为运算过程是系统化的传承过程，通过自我建构复数的代数形式，有助于他们认识复数；19%的学生认为教师直接给出形式更易于接受，不需要通过复杂的探究，通过练习强化记忆即可。

(5) 课后延伸学习。本课小结时教师为学生提供了一个学习指南，24%的学生查阅了虚数发展过程中的历史人物与事件，了解数学家如莱布尼兹对虚数的评价——"虚数是美妙而奇异的神灵隐蔽所，它几乎是既存在又不存在的两栖物"[3]以及爱因斯坦评价——"虚数不虚"。18%的学生查阅了解了狭义数与广义数，向量、张量、矩阵、群、环、域等概念，并写了数系展望小论文。36%学生了解复数可以作为二维复平面上的坐标点操作的运算工具，在物理学、水利学、地图学、航空学中应用十分广泛。22%学生了解了虚数角和乘方表示方式在处理交流电问题时很方便，虚数表示的质量和长度是一种描述具有负重力的物体的办法等物理学方面知识。

4 结论与反思

关于数系的扩充，在中学数学教学中主要有两个方面的难点：一个是在初中二年级学习的无理数，另一个便是本文所探讨的虚数。本文课例中，我们充分利用了有关虚数概念的历史史料，以探究的方式，与学生一起共同回答了有关虚数的几个重要疑问："为何要引入虚数"(邦贝利三次方程问题)、"为何称为虚数(虚数一词的来历)"、"怎样表示虚数"(高斯复平面)以及"虚数有何用"(邦贝利三次方程问题、数学与物理的渊源)等，整个教学过程自然、

流畅，也取到了良好的教学效果。同时，通过课后的拓展学习，学生们也有机会对从小学开始便接触的数的概念进行重新认识和思考，增长了知识，开阔了视野。

数学史是人类数学思想的发展史，蕴含了丰富的思想方法；同时，数学史还可以帮助我们预测学生在学习过程中可能存在的认识论障碍和容易出现的错误，并能为克服这种障碍提供有益的借鉴。对此，庞加莱指出："教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历，迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段" [5]；波利亚在《数学的发现》中也指出："只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识，作出更好的判断"[7]。越来越多的实践表明，沉寂的数学史实依然对学生的思维有着积极的启发意义，需要我们认真地思考、整理并将其再现于课堂，发挥蕴含于数学知识内的深刻的教育价值。

参考文献

[1] H. T. Colebrook.,1817. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*. London: John Murray, 135

[2] D. E. Smith.,1923. *History of Mathematics*. Boston: Ginn and Company, 261-262

[3] 汪晓勤，赵瑶瑶, 2006. 莱布尼茨与虚数. 湖南教育(数学教师), (8): 42-43, 37

[4] 汪晓勤，韩祥临, 2002. 中学数学中的数学史. 北京:科学出版社, 67-76

[5] Kline, M.,1970.Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, 77 (3): 264- 282

[6] Euler, L., 1810. *Elements of Algebra*. London: J. Johnson & Co.,61-62

[7] Pólya, G.,1965. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons, 132-133

数学文化

啊哈， Pi day

Liu Pan

(华东师范大学数学系，上海, 200241)

3 月 14 日，这是今天。今天是个有点特别的日子—— \pi day: 这缘自数学世界中一个最具传奇色彩的数字精灵 π ——它的有 3 位数字的近似小数正是 3.14。昨天在汪晓勤老师的 HPM 讨论班后说给第 2 期的《上海 HPM 通讯》写个稿。首先想到的是，或许可以来挑战一下这个数字的传奇。选择今天这个有着纪念意义的日子执笔写作，步入这一 π 的故事的迷宫，却不知何日可以完工走出来。

这篇文章的出发点很简单。只为在某一天为我们系一二年级的同学作一与 π 相关的数学讲座，以增添我们的《蚁趣》编辑部活动之旅的一些色彩。

我们的讲座可以如何设计，怎样开始呢？我心茫然。放在我面前的是，一张空白的 A4 纸，让我信笔涂鸦谱出如下的文字画片：

(i) $e^{i\pi}+1=0\ldots$ 最先想到的，会是 Euler 的这个公式。如此纯粹，如斯之美。犹记得第一次听闻“此中有美在焉”，好像是在汪老师的某一讲座上。待得后来才渐懂得，原来这里的世界真的很精彩——其间汇聚有数学王国几大领域间的和弦: e 蕴涵有分析学之入微，i 中谱写有代数学的方圆，π 间有着几何学的画壁；而 0 和 1 演绎有算术的纯粹。

(ii) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}\ldots$ 犹记得许多年前第一次阅读到它时心中的那一份惊奇——一个看是简单的无穷级数的求和，竟然可以和 π 联系在一起。

(iii) 隐约记得有看到这样的文字片断，说 π 可以和奇妙的幻方文化有联系——或许可寻觅一翻，领略一下其间的神秘。

(iv) $\pi(x)\sim\dfrac{x}{\ln x}\ldots$ 这是高斯的素数猜想，据说是小高斯在 15 岁的一个天才的发现…哈，这个和圆周率 π 却像是没有本质的联系，只不过借到 π 的符号。

(v) $3,\dfrac{22}{7},\dfrac{355}{113},\cdots$ 话说人们追逐 π 的精确值的故事是七彩的：许多学者都相信圣经时

代的 π 值为 3，$\dfrac{22}{7}$ 则是数学之神阿基米德在公元前 3 世纪给出的 π 的一个上限。而 $\dfrac{355}{113}=3.1415926\cdots$ 是我国南北朝数学家祖冲之所对 π 的近似值的一大贡献，这一纪录在千年之后才被欧洲数学家所打破，堪称古代中国数学的一大骄傲……

(vi) π 的故事其实说不尽：在巴黎罗浮宫的 31 号大厅有一处 π 的科学博物馆——古往今来当有不少轶事；\pi 节的由来当有何出处；德国数学家林德曼证明 \pi 是一超越数的断言，让一个古老的数学问题——“化圆为方”退出历史的舞台,这些在 \pi 之歌里是否有有趣的呈现 ... 一个极具魅力的数字，有着各种各样的花絮 ~

回眸处，π 是一个常数，代表着圆周长和直径的比值，其洋溢着其几何学的背景。如此我们的讲座不妨由上面的画片(ii)开篇。经由分析，代数，算术等几个侧面来展现这个数字蕴藏着一个神秘的“福地洞天”。或许对于一二年级的同学来说 这是一个不错的选择。

1 分析之入微

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

无穷级数的敛散性是现代大学数学学习的一大主题。形如上面的无穷级数无疑会是一个经典的例子。虽说证明其收敛性对绝大多数同学来说不会是难事，但若问这个无穷级数的确切值是多少则或许少有人问津。谁说不是呢？这样一个看似单纯的求和 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\cdots$ 竟然会和 π 神奇的联系在一起。

这一奇妙的联系由 Euler 所捕获，其详情可追溯到 17 世纪。那时，人们对无穷级数的求和兴趣变得极为浓厚。数学家雅各布·伯努利是此数学主题的一个伟大的推进者。在他的工作与影响下，许多数学家们乐此不疲… 只是有那么一个特殊的无穷级数，它的求和让他们黯然魂销。这个级数就是上面几次出现的 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\cdots$，而寻找这个无穷级数的确切值，则演变作那个时代一个著名的数学问题——巴塞尔问题。巴塞尔，瑞士的首府，也是数学家欧拉的出生地。

1735 年——距此问题提出 46 年后，年轻的欧拉成功地让这个级数演绎的梦境变得真实：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \tag{1.1}$$

让我们追随欧拉思想的步伐来读一读他是怎么做的…

若有一 m 次的多项式 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$,其恰有 m 个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_m$；则有 $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$ 。进而我们有

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=-\frac{a_1}{a_0},x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{m-1}x_m=\frac{a_1}{a_0},\ldots,x_1x_2\cdots x_m=(-)^m\frac{a_m}{a_0},$$

这正是韦达定理的精神之所在。欧拉天才的把这一多项式范畴的数学故事拓广到函数的空间… 数学因为无限而精彩。

让我们关注函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\end{cases}$,其恰有根 $n\pi,n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 于是欧拉说,

我们有 $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$,然后有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)+\ldots,\quad x\neq 0;$$

而下面的展开式则是数学分析的一个经典: $\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\ldots$

通过比较其上的两表达式中 x^2 前的系数, 我们有

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

Euler 的这一解法堪称简单与明晰的典范。他只是用两种方式来表达了函数 $\dfrac{\sin x}{x}$：一个作为无穷级数, 另一个作为无穷乘积。若问有什么不完美的地方, 或在于它在数学上的严密性值得商榷。数学同样因为无限而变得无常。

(1.1)式的严格证明可以在 *Proofs from The Book* 这一数学名著里找到[1]: 那里呈现有这一等式的三则证明, 其中一种源自 1956 年 William J. LeVeque 的一数论教科书, 其证明的设想如下:

设

$$I:=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy,$$

进而通过对重积分 I 的两个不同的估计来求得 Euler 级数的值:

一方面有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_1^1\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^n\,dxdy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 x^n y^n dxdy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 x^n dx\right)\left(\int_0^1 y^n dy\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} \\ &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \end{aligned}$$

另一方面经由一个很简单的坐标变换 $u=\dfrac{y+x}{2},v=\dfrac{y-x}{2}$，我们可算得积分 $I=\dfrac{\pi^2}{6}$。

巴塞尔问题开启了通往黎曼ζ函数的门：经由ζ函数的语言我们有 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

这是 Riemann zeta 函数的第一个非平凡值。其中

$$\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\ldots+\frac{1}{n^z}+\ldots$$

一个伟大的猜想—— The Riemann Hypothesis 如是说，ζ函数的非平凡的零点集可以让我们听到隐藏在素数世界中的音乐和弦 …

2 代数之方圆

这是一个 5×5 的数字方阵。如若说这看似无序的方阵也隐藏有 π 的神奇，你会相信么？[2]

2	4	3	6	9
6	5	2	7	3
1	9	9	4	2
3	8	8	6	4
5	3	3	1	5

其实这个方阵缘自一个传统的 5 阶幻方:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3

11	18	25	2	9

现在，我们将 $\pi = 3.14159265358979323846264 3\cdots$ 的数位上的数依次来代替这幻方中的每一个数，方阵中的数 1 代之以 π 的首位数字 3，数 2 代替以 π 的第二位数字 1， 数 3 代替以数字 4 … 如此可得到下面的数字方阵。而这新得到的数字方阵或多或少隐藏有幻方的一部分性质：且看其横行的总和(最后一列)是怎样与纵列的总和(最后一行)相等的。

2	4	3	6	9	**24**
6	5	2	7	3	**23**
1	9	9	4	2	**25**
3	8	8	6	4	**29**
5	3	3	1	5	**17**
17	**29**	**25**	**24**	**23**	

既然幻方的文化里有着代数学的影踪，我们不妨说有 π 的色彩在此留芳。

3 算术，几何与人文

π 和算术的联姻可由下面的一些故事片断读得[3,4,5]。

让我们来看看 $\pi = 3.141\cdots$ 的小数部分前三位数字: 141。它们之和 $1+4+1=6$，这是第一个完美数，也是一个三角形数。再看 $\pi = 3.1415926\cdots$ 的小数部分前七位数字：1415926。这七个数字之和是 28。28 是第二个完美数，也是第七个三角形数。

看，这是多么让人惊奇的对称 ！

经由数学的眼睛，666 是一个奇妙的数。这个数被称为魔鬼数。其有着圣经故事的背景——在圣经启示录 13:18 中如此写道:

“在这里有智慧：凡有聪明的，可以算计兽的数目；因为这是人的数目，他的数目是 666 ”。 然而，这个在圣经中被视为人间至恶的象征的魔鬼数，却有着许多奇妙的性质——首先它是一个 3 角形数:$1+2+3+\ldots+36=666$

(i) $M(666) = 6\times 6\times 6$——在 1 - 666 中与数 666 互素的数的个数是 216;

(ii) $666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$——666 是最小的 3 枚自然数的一个奇妙组合;

(iii) $666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$——前 7 个素数的平方和。

π 在算术里的奇特印象还体现它与数 666 间的联系：

3. 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359…

的前 144 位数字之和为 666。

魔鬼数 666 和圆周率 π 还有着如下的“心有灵犀”：

且看 $\pi = 3.14159265\cdots$ 的前九位数 314 159 256: 其间的后两组 3 位数和 212 一起，恰可构成一毕达哥拉斯三元组 (159, 212, 256)——$159^2 + 212^2 = 265^2$。 而这个新介入的数 212，和 666 一起，它们的比值却形成 π 的一个绝妙的近似值：$\frac{666}{212} = 3.1415\cdots$

缘于德国数学家林德曼在 1882 年的不寻常的工作，我们知道 π 是一个超越数——它不满足任何一个有理系数的代数方程。但人们追寻 π 的精确值的步履，历经千年依然不停。

让我们在 π 的原始近似值上驻足片刻吧。很多世纪以来，学者们相信圣经时代的 π 值=3. 在《圣经-旧约》有如下的记载(比如源出《列王纪 7:23》，说的是所罗门王神庙前的一个池塘)：

池为圆形，对径为十腕尺，池高五腕尺，其周长为三十腕尺(注：1 腕尺=从一个人的指尖到肘部的距离)。

$\frac{22}{7}$，这是数学之神阿基米德在公元前 3 世纪给出的 π 的一个上限。如若阅读一下 $\frac{22}{7} = 3.142857\cdots$,我们不由得佩服阿基米德的智慧，这使得 π 的近似值提高了 2 位小数。

$\frac{333}{106} = 3.1415\cdots$，这是数学家安德杨-安塞尼斯鲁发现的 π 的下限。

$\frac{355}{113} = 3.141592\cdots$，这是由我国南北朝数学家祖冲之所发现的 π 的这一近似值，堪称是古代中国数学的一大骄傲。祖冲之所得出的圆周率的值是介于 3.1415926 和 3.1415927 之间的纪录历经千年之久，才被欧洲数学家所打破。这简单的“之间”两个汉字里包含着一个无限丰富有趣的数字世界…

而在 21 世纪的今天，借助于现代计算机的力量，π 的精确值在万亿位之外。

让我们经由连分数的视野来看一看 π 的近似分数值会是一件很有趣的事。1770 年，德国数学家约翰-海因里奇-兰伯特建立了一个 π 的连分数[6]:

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}$$

问你有没有看出隐藏在其间的奇妙 ？… 原来此连分数的前几个近似分数值恰是 $3,\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\cdots$

袖里乾坤藏，不是么?

于有意无意——不经意间漫步到此，几番寻寻觅觅，几番掩卷沉思，…笔撰于此，却有几分不舍。若问何时何地来作这样的一个数学讲座，心间的遐想是, 6 月 28 日于 314 室…恰如在邂逅百分百的情境下,“friendship = 2 love”!

参考文献

[1] Martin Aigner, Guenter M. Ziegler, 2003. *Proofs from The book*. New York: Springer-Verlag

[2] M.Gardner, 1979. Mathematical Games. *Scientific American*, 9:22-28

[3] I. Peterson, 2001. *A Passion for Pi*. Washington, DC: MAA

[4] D.Castellanos,1988.The Ubiquitous Pi. *Mathematics Magazine*, Vol. 61:67-98, 148 -163

[5] D.G. Andersen. “ Pi Search ” [EB/OL]. http:// www.angio.net/ pi/piquery,2012-3

[6] P. Beckmann, 1971. *A History of Pi*. New York: St. Martin's Press

[7] 柳形上, 2011. 邂逅百分百. 蚁趣, (4)