

## 20 世纪初美国数学教科书中的几何应用

## ——以建筑为例

汪晓勤, 洪燕君

(华东师范大学 数学系, 上海 200241)

摘要: 20 世纪初, 在数学教科书中反映数学的应用价值, 是当时数学课程改革的途径之一. 就“建筑中的数学”这一主题而言, 以杜雷尔、贝兹、史密斯、帕尔默为代表的美国早期数学教育家们筚路蓝缕、精心搜求, 根据不同建筑物、建筑元素和装饰性图案, 编制出丰富多彩的作图问题、证明问题和计算问题, 揭示几何学与现实世界的密切联系, 凸显几何学的广泛应用和巨大价值, 展现几何学的迷人魅力, 从而大大丰富了中学几何课程的内涵, 为中学几何教学注入了鲜活的生命力. 这些早期教科书提供了丰富的教学素材和思想养料.

关键词: 几何教科书; 数学应用; 建筑; 顺应式

中图分类号: G40-059.3 文献标识码: A 文章编号: 1004-9894 (2016) 02-0011-04

## 1 引言

众所周知, 反映数学的应用价值, 发展学生的数学应用意识, 是中国中学数学课程的基本理念之一. 相应地, 如何在数学课程中体现数学的应用价值? 如何将数学应用融入数学课程? 成为了数学教育研究的重要课题之一<sup>[1-4]</sup>. 然而, 该课题并非只是到了今天才有. 事实上, 早在 20 世纪初, 数学应用就已悄然成为课程改革的重要工具之一了. 一些几何教科书已完全摆脱欧几里得《几何原本》的束缚, 将大量数学应用的素材融入其中.

那么, 这些教科书的编者为何要将数学应用融入数学教科书? 他们运用了哪些素材来体现数学的应用价值? 他们是如何运用这些素材的? 为了回答上述问题, 以建筑为数学应用的主体, 对美国 20 世纪第二个 10 年之内出版的 4 种数学教科书<sup>[5-9]</sup>进行深入考察. 4 种教科书的具体信息见表 1.

表 1 美国早期的 4 种中学数学教科书

| 教科书名称   | 编者          | 出版社                         | 出版年份      |
|---------|-------------|-----------------------------|-----------|
| 平面与立体几何 | 杜雷尔         | Charles E. Merrills Company | 1911      |
| 平面与立体几何 | 贝兹、韦布       | Ginn & Company              | 1912—1916 |
| 初级中学数学  | 温特沃斯、史密斯、布朗 | Ginn & Company              | 1917      |
| 平面与立体几何 | 帕尔默、泰勒      | Scott, Foresman & Company   | 1919      |

其中, 贝兹和韦布的平面几何教科书和立体几何教科书先后在不同时间分开出版, 但把它们合在一起考察. 下文中, 为了叙述方便, 用编写者来指代教科书.

## 2 教科书编写者的几何价值观

1901 年, 英国教育家培利 (J. Perry, 1850—1920) 在英国科学促进会格拉斯哥会议上发表演讲, 抨击当时英国数学教育, 倡议摆脱欧几里得的束缚, 重视实验几何和实际测量, 强调几何实际应用, 引发了著名的“培利运动”<sup>[10-11]</sup>. 受培利的影响, 美国数学家摩尔 (E. H. Moore, 1862—1932) 于翌年倡导实验教学法, 呼吁人们在数学教学中关注数学与

科学之间的联系, 重视数学的应用. 到 1904 年, “培利运动”的核心思想在美国被概括为 5 点, 其中之一是: “对绝大多数学生来说, 实用性要比哲学思辨重要得多”<sup>[12]</sup>. 同年, 德国著名数学家 F. 克莱因 (F. Klein, 1849—1925) 起草《米兰大纲》, 提出数学教学不应过分强调形式训练, 应重视应用; 在《高观点下的初等数学》中亦强调数学的实际应用<sup>[11]</sup>.

自此, 如何在数学教学中兼顾数学的逻辑思维训练价值和实际应用价值, 摆在了数学教育家们的面前. 1908—1909 年, 美国数学和科学教师联盟与美国教育协会联合设立“十五人委员会”, 致力于几何课程大纲的制订, 该委员会的目标就是在“形式主义”和“实用主义”之间寻求平衡. 在十五人委员会的最终报告中, 专门有一节介绍有关“建筑、装饰和设计”的实际应用问题<sup>[13]</sup>. 1911 年, 美国数学史家史密斯 (D. E. Smith, 1860—1944) 出版《几何教学法》, 通过大量的实际例子来说明几何定理的应用<sup>[14]</sup>. 无疑, 培利运动、F. 克莱因的数学教育主张、十五人委员会报告以及史密斯的著作, 都对当时的美国教科书产生了重要的影响.

杜雷尔 (F. Durell, 1859—1946) 是最早关注数学应用价值的教科书编写者之一. 他在《平面与立体几何》(1904) 前言里指出, 该教科书的目的是让学生不仅仅将几何学理解为一系列的演绎推理, 而且还要认识几何学的价值和意义<sup>[5]</sup>. 作为几何大纲“十五人委员会”成员之一的贝兹 (W. Betz, 1879—?) 及其合作者韦布 (H. E. Webb) 在《平面几何》前言中指出, 完全割裂历史和忽略时代的合理需求, 都无助于解决教育上的难题; 为了在传统和现实之间寻找平衡, 这本教科书试图赋予几何学以生命力, 并将之与现实联系起来; 同时也保持几何学小心求证的精神. 教科书开篇介绍了几何学的历史和价值, 强调: “一个人要想深入了解工程、建筑、设计、天文、测量、航海等领域, 几何学是不可或缺的”<sup>[6]</sup>. 史密斯则将几何学分成“直观几何学”和“证明几何学”, 认为几何学的应用主要包含在直观几何学之中<sup>[8]</sup>. 帕尔默 (C. I. Palmer, 1871—1931) 和泰勒 (D. P. Taylor) 在

收稿日期: 2015-12-20

基金项目: 国家社会科学基金“十一五”规划 2010 年度教育学重点课题——主要国家高中数学教材比较研究 (ADA100009)

作者简介: 汪晓勤 (1966—), 男, 浙江开化人, 博士, 教授, 主要从事数学史与数学教育研究.

其《平面与立体几何》的前言中指出,该教科书的目的是呈现几何学的基本知识及其应用.编者认为,在中学课程中,没有任何别的学科能比几何学更具实用价值<sup>[9]</sup>.

由此可见,在 20 世纪初美国 4 种教科书的编者眼里,几何学具有逻辑思维训练和实际应用的双重价值,他们都试图在两者之间寻求平衡.这就是为什么 4 种教科书中包含了那么多的数学应用素材的原因.对教科书中的数学应用素材作进一步考察,可以发现“建筑中的数学”是最突出、出现最频繁的主题.

### 3 建筑素材的分类和运用方式

#### 3.1 建筑素材的分类

对 4 种教科书进行统计分析,发现建筑素材可以分成如下几类:建筑物、建筑元素和装饰性图案 3 类.其中,建筑物包括实际建筑物(如金字塔、长城、帕特农神殿、比萨斜塔、凯旋门、林肯大教堂、总督宫、黄金宫等)、虚拟建筑物(如水塔、桁架桥、拱桥、桥墩、烟囱、粮仓、地窖等)、弧形铁轨和道路;建筑元素包括拱券、花窗、屋顶或教堂尖顶;装饰性图案包括花窗玻璃图案、地砖镶嵌图案、镶木地板图案、地板镶边图案、天花板图案、建筑上的脚线、涡卷形等.本文所指的建筑素材不包括建筑调查问题及针对虚拟建筑的测量问题等.

表 2 给出了各类素材在 4 种教科书中的分布情况.从表中可见,3 种素材在 4 种教科书中的比重互有不同,反映出编者不同的倾向性.贝兹和韦布使用的建筑素材最多,很多习题涉及花窗、拱券、装饰性图案的尺规作图、证明或计算.帕尔默和泰勒使用建筑素材的数量仅次于贝兹和韦布,其中,涉及虚拟建筑物、拱券和装饰性图案的问题居多.杜雷尔倾向于圆弧形铁轨和道路的设计以及某些装饰性对称图案的尺规作法.温特沃斯和史密斯使用的建筑素材最少,作者倾向于装饰性对称图案的尺规作法以及针对建筑物平面图的比例尺问题.

表 2 4 种教科书中的建筑素材统计

| 建筑素材  |         | 杜雷尔 | 贝兹-韦布 | 温特沃斯-史密斯 | 帕尔默-泰勒 |
|-------|---------|-----|-------|----------|--------|
| 建筑物   | 实际建筑物   | 2   | 13    | 1        | 7      |
|       | 虚拟建筑物   | 3   | 7     | 11       | 14     |
|       | 弯道或墙角   | 12  | 1     | 0        | 3      |
| 建筑元素  | 拱券      | 5   | 14    | 0        | 10     |
|       | 花窗      | 1   | 25    | 6        | 7      |
|       | 屋顶或教堂尖顶 | 6   | 1     | 1        | 4      |
| 装饰性图案 |         | 11  | 17    | 17       | 10     |
| 合计    |         | 40  | 78    | 36       | 55     |

#### 3.2 建筑素材的运用方式

4 种教科书运用建筑素材的方式可分为点缀式和顺应式两类.点缀式是指在正文中插入建筑物图片,其功能是美化和人性化教科书,并服务于有关主题,与文字相配.顺应式是指利用建筑素材来编制数学问题,其功能是反映几何学的实际应用.图 1 给出了两类方式在 4 种教科书中的分布情况.从图中可见,4 种教科书主要采用了顺应式,清楚地反映出了 4 种教科书注重几何学实际应用的特点.

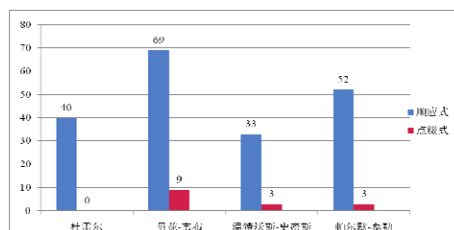


图 1 4 种教科书运用建筑素材的方式

### 4 顺应式建筑素材

#### 4.1 花窗与装饰性图案的设计

4 种教科书中,哥特式教堂的花窗与装饰性图案主要是一些由圆弧构成的旋转对称图形,分为三叶形、四叶形、五叶形、六叶形和八叶形.如图 2~4 所示.

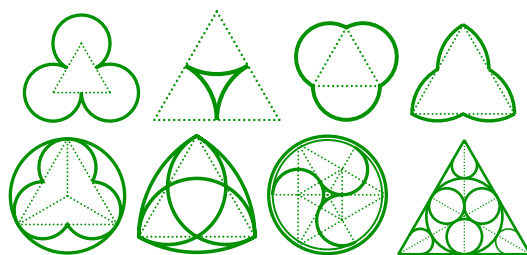


图 2 三叶形

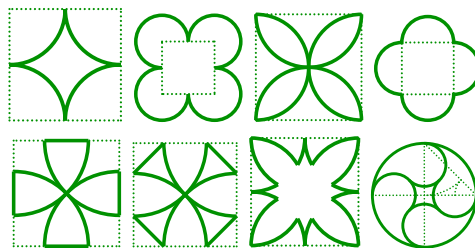


图 3 四叶形

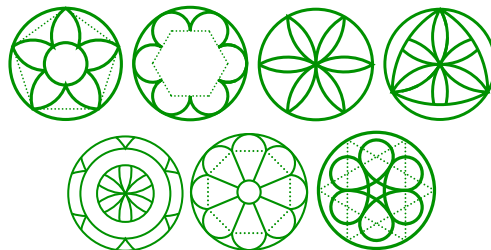


图 4 多叶形

4 种教科书中,各类图案多出现在习题中,要求学生用尺规作出图形并说明作法.从图中虚线可知相应作法.

由线段构成的花窗或装饰性图案相对较少.杜雷尔给出的各种装饰性图案中,有一幅图案如图 5 所示,这也是几何大纲十五人委员会报告中列举的图案.史密斯和温特沃斯在《初级中学数学》中采用了中世纪意大利某教堂的花窗图案,要求学生用尺规,并按自己喜欢的尺寸作出该图案,如图 6 所示.史密斯认为,这是中世纪最漂亮的花窗图案<sup>[14]</sup>.

#### 4.2 拱券与相关数学问题

拱券是教堂建筑的基本元素之一,4 种教科书中,有 3 种都采用了拱券来编制问题,尤其是贝兹、韦布与帕尔默、泰勒的教科书中,涉及多种类型的拱券,包括半圆拱、弓形拱、弓形尖拱、马蹄拱、等边拱、二心内心拱、二心外心拱、

四心拱、土耳其拱、波斯拱等。由这些拱的作图法，可以产生丰富多彩的几何问题，见表 3。

帕尔默和泰勒在其教科书中，还设置习题，让学生研究具体建筑物中的拱券。如，黄金宫是威尼斯的著名建筑，其二楼栏杆的上半部分是由波斯拱交错而成的，如图 7 所示。

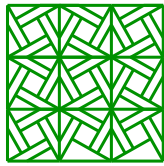


图 5 由线段构成的装饰性图案

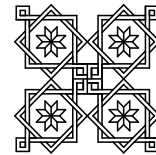


图 6 中世纪意大利教堂的镂空窗

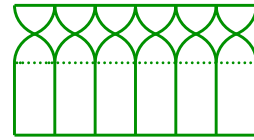


图 7 威尼斯黄金宫的拱券

表 3 拱形的作图与相应的数学问题

| 名称      | 图形 | 作法   | 问题                                  | 名称   | 图形 | 作法  | 问题                           |
|---------|----|--|-------------------------------------|------|----|---|------------------------------|
| 等边哥特拱   |    | 分别以 A 和 B 为圆心，以 AB 为半径作圆弧，交于 C。  | 已知 $AB=a$ ，求拱的面积（即由 AB 和两弧所围图形的面积）。 | 四心拱  |    | 四等分 AB 于 C、D。以 CD 为边作矩形，使 $CE=CB$ 。分别以 C、D 为心，CA、DB 为半径作小圆弧，以 E、F 为心，以 EH、FG 为半径作大圆弧。   | 已知 $AB=4a$ ，求 FG 或 EH。       |
| 二心外心桃尖拱 |    | 平分 AB 于 C，分别在 AC、CB 上作正方形，以 C 为心、CE 为半径作圆弧，交 AB 的延长线于 G、H，分别以 G、H 为心，GB、HA 为半径作圆弧，交于 I。            | 已知 $AB=2a$ ，求拱高 CI。                 | 土耳其拱 |    | 将 AB 八等分，分别在 AC 和 DB 上作等边三角形 ACE 和 DBF，分别以 C 和 D 为心，CA 为半径作圆弧，再过 E 和 F 作圆弧的切线，交于 G。   | 已知 $AB=8a$ ，求拱的高、周长和面积。      |
| 二心内心桃尖拱 |    | 三等分 AB 于 E、F，分别以 E、F 为心，EB、FA 为半径作圆弧，交于 D。   | 已知 $AB=6a$ ，求拱高 CD。                 | 波斯拱  |    | 分别三等分 AD、BD 于 G、H、I、J，分别过 H、J 作 AD、BD 的垂线，交 AB 于 M、N，连 MG 和 NJ 并延长，交过 D 且平行于 AB 的直线于 E、F。分别以 M、N、E、F 为心，以 MA、NB、EG、FI 为半径作圆弧。 | 证明拱面积等于三角形 ABD 面积。           |
| 马蹄形拱    |    | 平分 AB 于 C，作四分之一圆 CED，作三等分点 E，连 AE 并延长，交 AB 的中垂线于 F。以 F 为心，FA 为半径作圆弧，交 FC 的延长线于 O。以 O 为心，OA 为半径作优弧。 | 已知 $AB=2a$ ，求拱的高、周长和面积。             | 弓形拱  |    | 平分 AB 于 C，作矩形 CG，过三角形 GAD 内心 M 作 AD 的垂线，交 AB 于 E，交 DC 延长线于 H。取 $CF=CE$ 。分别以 E、F、H 为心，EA、HM 为半径作圆弧。                            | 根据作图法，证明 $EA=EM$ ， $HM=HD$ 。 |

4.3 拱券内切圆窗的设计

4 种教科书中，有 3 种教科书都含有等边拱或半圆拱内切圆窗的设计问题。图 8~10 所示。其中，图 9 中的第 2 个图形是史密斯《几何教学法》、十五人委员会报告以及史密斯与温特沃斯的另一部教科书《平面与立体几何》<sup>[15]</sup>中使用的图形。十五人委员会报告还介绍了一种等边拱内切圆窗的设计方法，如图 11 所示，其中 CE 和 CF 是圆心在直线 AB 上，半径为线段 AB 的圆弧。

帕尔默还设置习题，要求学生研究实际建筑物中的圆花窗，如威尼斯著名建筑总督宫的圆花窗，3 个圆窗两两相切，又与大的等边拱或小的波斯拱相切，如图 12 所示。

拱券内切圆问题多可通过代数方法解决，即假设内切圆已作出，根据拱的跨度，求内切圆的半径，获得尺规作图法。

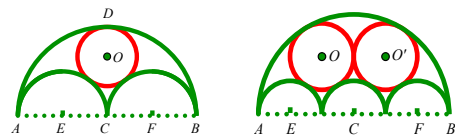


图 8 半圆拱内切圆窗的设计

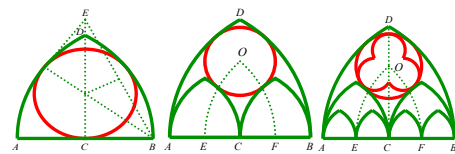


图 9 等边拱内切圆窗的设计

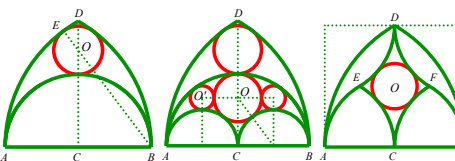


图 10 等边拱与半圆拱或波斯拱内切圆窗的设计

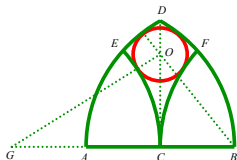


图 11 十五人委员会报告中的一种内切圆窗设计

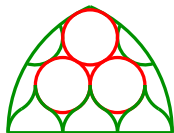


图 12 威尼斯总督宫的圆窗图

## 5 结 语

通过以上考察,可以得出结论:在数学教育发生剧烈变革的 20 世纪初,少数美国的教科书编写者已经将大量数学应用素材融入数学教科书之中,因此,在教科书中体现数学的实际应用价值,已经成为当时数学课程改革的途径之一.就“建筑中的数学”这一主题而言,以杜雷尔、贝兹、温特沃斯、史密斯、帕尔默为代表的美国早期数学教育家们筚路蓝缕、精心搜求,根据不同建筑物、建筑元素和装饰性图案,编制出丰富多彩的作图问题、证明问题和计算问题,揭示几何学与现实世界的密切联系,凸显几何学的广泛应用和巨大价值,展现几何学的迷人魅力,从而大大丰富了中学

几何课程的内涵,为中学几何教学注入鲜活的生命力.

一个世纪前的数学教育与今天的数学教育已不可同日而语,一个世纪前的数学教科书也早已尘封于被人遗忘的历史角落,但可从中汲取丰富的教学素材和有益的思想养料.

(1) 一个国家的数学教科书不能割裂这个国家的文化.4 种早期教科书中的大多数建筑素材都具有浓郁的西方建筑文化特征,从而更容易发挥数学文化的教育价值,更有效地反映几何学的实际应用,更能获得教师和学生的认同.在编写教科书时,应考虑渗透本国的历史文化元素.

(2) 在讨论如何在数学课程中体现数学的应用价值时,不应忘记数学应用的素材本身也需深入研究.早期美国教科书中的建筑素材都是研究、借鉴、挖掘甚至实地测量的结果.从不同知识领域中挖掘数学元素,应该成为数学教育研究的重要组成部分.

(3) 教科书所运用的有关数学应用性素材,其功能远不只是点缀,只有在更高水平上将其融入,才能发挥出更大的价值.根据有关应用性素材来编制数学问题,供学生探究,不失为理想的运用方式,值得效仿.

(4) 为了研究教科书中的数学文化内涵,不应仅仅局限于现行的教科书,那些逝去时代留下的教科书同样值得关注,理由很简单:数学教育不可能完全割裂历史.

## [参 考 文 献]

- [1] 王尚志,孔启平. 培养学生的应用意识是数学课程的重要目标[J]. 数学教育学报, 2002, 11(2): 43-45.
- [2] 汪国华. 数学应用意识的再认识及研究的方向[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1): 89-91.
- [3] 张维忠,章勤琼. 论数学课程中的文化取向[J]. 数学教育学报, 2009, 18(2): 15-17.
- [4] 章勤琼. 数学教育价值取向之辩[J]. 数学教育学报, 2010, 19(5): 21-24.
- [5] Durell F. *Plane and Solid Geometry* [M]. New York: Charles E. Merrills Co., 1911.
- [6] Betz W, Webb H E. *Plane Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1912.
- [7] Betz W, Webb H E. *Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1916.
- [8] Wentworth G A, Smith D E, Brown J C. *Junior High School Mathematics* [M]. Boston: Ginn & Company, 1917.
- [9] Palmer C I, Taylor D P. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Scott, Foresman and Company, 1919.
- [10] Cajori F. Attempts Made during the Eighteenth and Nineteenth Centuries to Reform the Teaching of Geometry [J]. *American Mathematical Monthly*, 1910, 17(10): 181-201.
- [11] Cajori F. *A History of Elementary Mathematics* [M]. New York: Macmillan, 1917.
- [12] Mock G D. The Perry Movement [J]. *Mathematics Teacher*, 1963, 55(3): 130-133.
- [13] National Education Association. Final Report of the National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus [J]. *Mathematics Teacher*, 1912, 5(2): 46-160.
- [14] Smith D E. *The Teaching of Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1911.
- [15] Wentworth G A, Smith D E. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1913.

## Mathematical Application in Early American Geometry Textbooks —The Case of Architecture

WANG Xiao-qin, HONG Yan-jun

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

**Abstract:** Early in the 20th century, it was a way of reforming the mathematics curricula to reflect mathematical application in textbooks. The materials about architecture were mostly used in some mathematics textbooks, such as those compiled by F. Durell, W. Betz, H. E. Webb, G. A. Wentworth, D. E. Smith, J. C. Brown, C. I. Palmer and D. P. Talyor. These early mathematics educators took pains in searching the materials from various buildings, architectural elements and ornamental designs and posed various interesting problems of construction, demonstration and calculation, which exposed the intimate connection between geometry and the real world, highlight the extensive application and great value of geometry and show the charming fascination of this subject. The mathematical application greatly enriched the geometry curriculum and instilled life into geometry teaching. The early mathematics textbooks in question supply us with abundant teaching materials and ideas.

**Key words:** geometry textbooks; mathematical application; architecture; accommodation approach

[责任编辑:张楠]