【课堂研究·特设专栏：HPM课例研究（之八）】

HPM视角下的复数概念教学

张 冰[1]，卢成娴[2]，沈中宇[3]
（1. 上海市通河中学，上海 201900；
2. 华东师范大学 教师教育学院，上海 200062；
3. 华东师范大学 数学科学学院，上海 200241）

【摘 要】“复数的概念”是沪教版高中数学教材第十三章“复数”的开篇。在教学实践中，大部分教师采取的教学设计尚未充分体现“知识之谐”“方法之美”“探究之乐”“能力之助”“文化之魅”“德育之效”等各类价值。基于以上考虑，文章试图在问题情境的探索和相关历史的追溯中引入复数的必要性，让学生经历数系扩充的过程，学习复数的相关概念，感悟人类的理性思维在数学发展和社会发展中的重要性，从而实现数学史的多元价值。

【关键词】HPM视角；复数概念教学；多元价值

一、引言

“复数的概念”是沪教版高中数学教材第十三章“复数”的开篇。教材采用简明扼要的引入方式，为解决负数的开方问题引入虚数单位，从而给出复数的概念。因此在教学中，教师既要解决为什么要引入虚数、如何引入复数的概念、复数为什么不能规定大小等问题，还要解决虚数除了解方程，还有什么用途的问题[1-3]。

在教学实践中，教师大致采用了以下几种教学设计：一是教科书里的引入方式，即直接从一元二次方程的求解问题引入虚数[4]；二是先讲解数系的扩充，然后给出方程求解问题[5-6]；三是利用卡尔丹（G. Cardano）或莱布尼兹（G. Leibniz）的二元二次方程组求解问题[3][7-10]；四是从三次方程的求根问题引入复数概念[11-12]。前两种教学设计遵循复数概念的逻辑序，而后两种教学设计则遵循了复数概念的历史序。将数学史融入数学教学，可以构建“知识之谐”、彰显“方法之美”、营造“探究之乐”、实现“能力之助”、展示“文化之魅”、达成“德育之效”[13]等价值，但已有的教学设计尚未充分体现以上各类价值。此外，学生未接触过三次方程求根公式，故用三次方程引入复数概念往往会受到学生的质疑，且已有的教学设计不够自然。基于以上考虑，本节课试图在问题情境的探索和相关历史的追溯中引入复数的必要性，让学生经历数系扩充的过程，学习复数的相关概念，感悟人类的理性思维在数学发展和社会发展中的重要性，从而实现数学史的多元价值。

为此，研究者将本节课的教学目标拟定如下。

（1）通过求解卡尔丹“分十”问题和邦贝利（R. Bombelli）三次方程，了解虚数产生的历史原因，体会引入虚数的必要性，在求解过程中借助几何画板直观感受根的分布，培养直观想象素养。

（2）理解复数及其相关概念，如虚数单位、虚数、纯虚数、复数的实部和虚部。

【作者简介】张冰，中学高级教师，主要从事高中数学课堂教学研究；卢成娴，华东师范大学硕士研究生，主要从事数学史与数学教育研究；沈中宇，华东师范大学博士研究生，主要从事数学史与数学教育研究。

（3）感知数系扩充的过程和基本方法，能正确地对复数进行分类，掌握数集之间的从属关系。

（4）了解复数的数学史及其应用，感悟数学家不断探索、勇于创新的理性精神，培养动态的数学观。

二、历史材料及其运用

复数概念的起源最早可以追溯到公元3世纪，古希腊数学家丢番图（Diophantus）在《算术》中已经遇到了“不可约”的一元二次方程，但虚数概念的真正历史始于16世纪的意大利。本节课根据学生的认知水平，重点选取了复数发展史上四个关键的时间点。

1. 卡尔丹与“分十”问题

1545年，意大利数学家卡尔丹在《大术》中提出一个著名问题：将10分为两部分，使它们的乘积等于40。在这个问题的解决过程中，他承受着良心的谴责，找到了$x=5\pm\sqrt{-15}$这两个当时并不被人们所接受的数，也因此成为数学史上第一个写下负数平方根的人。他称这样的数为“诡辩式的数”，由此可见他并未完全理解和接受复数[14]。

2. 邦贝利与三次方程求解

1572年，意大利数学家邦贝利在《代数》一书中，讨论了三次方程的解。对于方程$x^3=15x+4$，邦贝利发现它有三个实数解4和$-2\pm\sqrt{3}$，如果利用三次方程$x^3+px=q$的求根公式$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$求解，却得到含负数开平方形式的解$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$。面对这一问题，邦贝利产生了一个“疯狂”的想法：既然$2+\sqrt{-121}$与$2-\sqrt{-121}$只相差一个符号，那么设$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$，$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}$，便可解出$a=2$，$b=1$，得到$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$，从而解决了矛盾。这项工作标志着复数的产生。邦贝利还规定了复数的运算法则，为复数理论奠定了基石[15]。

3. 吉拉德与代数基本定理

1629年，荷兰数学家吉拉德（A. Girard）在其著作《代数新发明》中提出了代数基本定理——每个n次方程都有n个根，并给出了方程根与系数之间的关系。为保证根的个数，吉拉德表示我们应该接受虚根，至少可以将它作为方程的形式解。

对此，法国数学家笛卡儿（R. Descartes）则认为，虽然可以想象n次方程都有n个根，但是这些“虚”根是不能对应到任何数的。于是笛卡儿给它们取了一个名字——“虚数”（imaginary number），意思是“想象中的数”[16]。

4. 欧拉与虚数单位的引入

1777年，瑞士数学家欧拉（L. Euler）在一篇论文中第一次引入$i=\sqrt{-1}$。从18世纪开始，虚数被广泛地用于解决各种函数问题。在此之后，高斯（C. F. Gauss）、哈密尔顿（W. Hamilton）等数学家逐步完善了复数的相关理论[17]。

5. 复数在科技领域的应用

除了数学学科内部的应用之外，复数也在其他科技领域扮演着重要的角色。如电工学用复数表示交流电，量子力学用复数表示波函数，在空气动力学、流体动力学、弹性理论、位势理论、热流、静电通量、周期现象等方面都用到复数。复数还在航空、航海和机翼理论中发挥作用[16]。

三、教学设计与实施

1. 问题驱动，情境引入

问题1　1545年意大利数学家卡尔丹在《大术》中提到这样一个问题——将10分为两个部分，使它们的乘积等于40，这两个数分别是多少?

生1：设其中一个数为x，则另一个数为$10-x$。列方程$x(10-x)=40$，即$x^2-10x+40=0$，但因为$\Delta=-60<0$，所以方程无解。

师：这个方程无解，说明卡尔丹要找的两个数根本不存在。当年，卡尔丹也是这样认为的，但后来他承受着良心的谴责，竟然找出了两个数，分别是$(5+\sqrt{-15})$和$(5-\sqrt{-15})$。先抛开这两个数的合理性，我们来检验一下它们是否符合方

程条件。把这两个数$(5+\sqrt{-15})$和$(5-\sqrt{-15})$加起来等于多少?

生(齐答):10。

师:这两个数$(5+\sqrt{-15})$和$(5-\sqrt{-15})$的乘积是多少?

生(有些迟疑):40。

师:这两个数似乎完全符合卡尔丹问题的两个条件!那么卡尔丹是怎么找出这两个数的?

生2:应该是通过求根公式找出来的。由求根公式得$x=\frac{10\pm\sqrt{-60}}{2}$,化简可以得到$x=5\pm\sqrt{-15}$。

师:有道理!但这其中有一个问题,你们发现了吗?

生3:将-60开平方了。

师:可以这样操作吗?

生(齐答):不可以,负数不能开平方。

师:的确如此,所以当年卡尔丹虽然找出了这样的两个数,但他也承认,这是他的“癫狂”之举,因为这样的两个数是不存在的。

问题2 27年之后,意大利另一个数学家邦贝利研究了一个三次方程$x^3=15x+4$。这个方程有解吗?

生(齐答):这个方程我们不会解。

师:既然二次方程有求根公式,那么三次方程也有。意大利的数学家塔塔格里亚(N. Tartaglia)研究出了三次方程$x^3+px=q$的求根公式,即$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$。

生4:对照公式将$p=-15$,$q=4$代入,就可得出这个方程的解:$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$。

师:这个解有什么问题吗?

生(齐答):有,又出现了负数开平方。

师:这个三次方程的解,重现了卡尔丹解题中负数开平方的问题。既然卡尔丹方式无解,那么邦贝利的三次方程也无解,这个观点你们同意吗?

生(大部分):同意。

生(小部分):不同意,这个方程有解的。

师:有解?你们有什么发现吗?

生5:计算器上的计算结果显示,这个方程有解。

师:这个方程有几个解?

生5:三个。

师:分别是哪三个解?

生5:一个是4,另外两个分别是-0.27和-3.73。

(教室里一片哗然)

师:我们利用作图软件GeoGebra,一起来看看三次函数$f(x)=x^3-15x-4$的图像(见图1)!

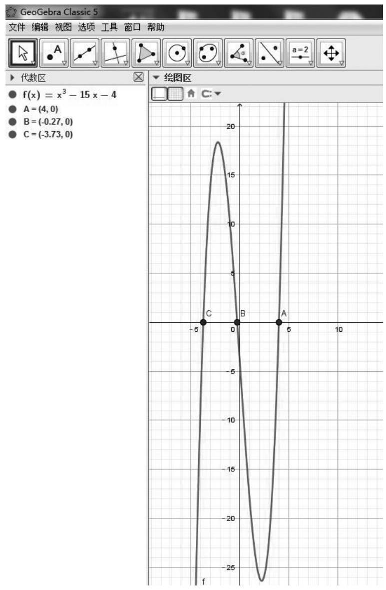

图 三次函数$f(x)=x^3-15x-4$的图像

师:通过观察图像,你们发现了什么?

生(恍然大悟):函数图像与x轴有三个交点,说明这个三次方程真的有三个实根!

师:是的,当年邦贝利不仅发现了三个实根,而且还写出了它们的精确形式——4,$-2\pm\sqrt{3}$。今天我们的同学用计算器计算也发现了这三个实根,老师也通过作图软件更加清晰地呈现了这三个实根。也就是说,邦贝利的这个三次方程的确存在三个实根!如果说当年卡尔丹拒绝承认那样的两个数的存在尚属情理之中,那么在邦贝利这个三次方程中,面对确实存在的三个实根,我们就必须认真对待负实数开平方这件事了!

2. 温故知新，扩充数系

问题3　让我们继续回到卡尔丹的那个二次方程。同学们如何理解“方程无解”?

生6　“方程无解”就是方程没有实根的意思。

师：是的。确切地说，是那个方程无“实数”解。

师：从这几个方程的求解过程中，我们意识到一个问题——所谓的方程无解，是指在某一个数集内无解，一旦这个数集扩充了，原来无解的方程可能就变得有解了，原来没有办法进行运算的方程可能进行运算了。

问题4　每一次数系扩充，都有哪些特点?

师：下面几个方程的解（见表1）让我们看到了数集的一次次扩充，但如果仅仅因为解方程的需要而对数集进行扩充，那未免太狭隘了。事实上，历史上每一次数集的扩充，也都来自社会发展的需要。远古人类为了计数，用绳子、树枝、石头等表示个数，创造了自然数，又把表示“什么也没有”的“零”也归入自然数，于是形成了自然数集；打猎归来，为了分配的需要，如何用数表示每一份，于是创造了分数；后来人们发现在描述一些相反意义的量时，如海平面以上或海平面以下，原来有的数又不够用了，于是负数诞生了。至此，数集就扩充到了有理数集。再后来，人们又发现有些正方形的对角线，或者说是直角三角形的斜边，既不能用整数表示，也不能用分数表示，就开始猜想在有理数之外，是否还存在着别的数。几百年之后，无理数终于得以见天日，形成了我们迄今为止学到的最大数集——实数集。这让我们清晰地看到了，数集的扩充不仅仅是数学内部的需要，也是社会发展的需要。

表1　数系的扩充

方程	N			
$x+1=0$	负整数	Z		
$2x-1=0$		分数	Q	
$x^2-2=0$			无理数	R
$x^2-10x+40=0$，$x^3=15x+4$				?

师：从运算的角度来看，在数集的一次次扩充过程中运算也发生着变化。引入负整数之后，原来自然数集中已有的加法、乘法运算还能成立吗?

生（齐答）：成立。

师：数系扩充之后，还能完成原来数集中所不能完成的某些运算吗？比如说?

生（齐答）：可以，比如减法运算。

师：引入分数之后，原来整数集中的那些加法、减法、乘法运算，继续成立；同时又能完成原来整数集中不能完成的什么运算?

生7：除法运算。

师：是的。引入无理数之后，在原有的加、减、乘、除运算基础上，还可以增添什么运算?

生7：开方运算。

师：从这些可以看出，数系一次次的扩充都有一些共同的原则。那么，什么叫扩充？数系的每一次扩充，都发生了什么变化?

生（齐答）：有新的数产生。

师：对，引入新数是第一条原则，但引入的新数应具备某些要求？从刚才的分析中，你们看出来了吗?

生8：原来不能进行的运算，在引入新数之后，就可以进行了。

师：好的，这样我们就总结出了数系扩充的又一个原则，即原有的运算及性质仍然适用，同时能解决原数集中不能实施的某些运算。这是每一次数系扩充都要遵循的原则。

问题5　今天我们课堂上研究了卡尔丹的二次方程和邦贝利的三次方程。在求解过程中，我们遭遇了什么困难？又碰到了什么运算障碍?

生9（思索片刻后）：负数开平方。

师：负数在实数范围内不能进行开平方运算，也就是说负数开平方已经超越了实数集的范围。你们能给出一个解决问题的方案吗?

生（齐答）：引入新数!

师：同学们有这样的想法，很好！事实上，历史上很多数学家为了解决这个问题，早就付出了不懈的努力!

3. 以时为经，追溯历史

教师按照几个重要的时间点，通过微视频的形式（如图2），让学生重温那段漫长的岁月。微视频主要介绍了复数的发展历史，从卡尔丹第一次写下“负数平方根”到邦贝利通过“构造数”解决 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$ 的矛盾，再到吉拉德从代数基本定理角度认为我们应该接受虚根，接着笛卡儿将“虚”根取名为“虚数”，欧拉引入记号 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，最后高斯和哈密尔顿完善了复数的相关理论。

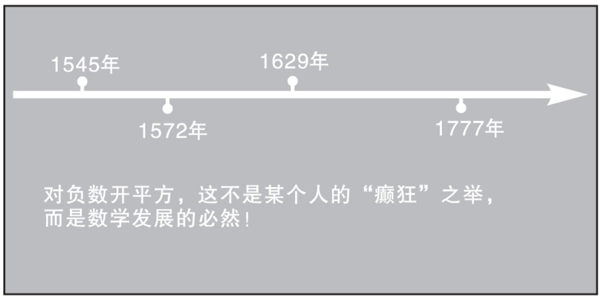

图2 微视频片段

至此，关于复数的意义及其合法性的怀疑已经延续将近250年。从这漫长的过程中，我们发现：对负数开平方，这不是某个人的“癫狂”之举，而是数学发展的必然！

4. 定义生成，概念辨析

师：为了解决负数开平方问题，人们引入了一个新数 i，并规定 $\mathrm{i}^2=-1$。作为一个引入的新数，它遵循数系扩充的一般原则，即原来数系中已有的运算和性质仍然成立，并且能解决原来数系中不能解决的某些运算。这个新数 i 和实数一样可以进行四则运算，原来的加法和乘法运算律仍然成立。这样卡尔丹方程两个根中出现的 $\sqrt{-15}$ 可以用什么来表示？

生（齐答）：$\sqrt{-15}=\sqrt{15}\times\sqrt{-1}=\sqrt{15}\mathrm{i}$，卡尔丹方程的两个根为 $x=5\pm\sqrt{15}\mathrm{i}$。

师：至此，我们正式解决了卡尔丹的问题。不仅如此，我们把所有形如 $a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$ 的数称为复数。其中，a 叫作实部，b 叫作虚部，i 叫作虚数单位。1813年高斯首次将这种实数与虚数“复合”而来的数定义为复数（complex number），$a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$ 称为复数的代数形式。所有像这样的数组成的集合，称之为复数集，用大写字母 **C** 表示。一个新的数集又诞生啦！

问题6 大家想一想，这个崭新的复数集与以前学的实数集，有什么联系？又有什么不同？

生1：多了一个数 i。

师：只是多了一个数 i 吗？

生1：多了 $b\mathrm{i}$，它包含了很多的数。

师：复数集从实数集扩充而来，它一定包含了全部的实数，在什么时它表示实数？

生2：当 $b=0$ 时，表示实数。

师：当 $b=0$ 时，$z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$ 表示的就是 $z=a(a\in\mathbf{R})$，它是一个实数；当 $b\neq0$ 时，复数 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$ 表示的一定不是实数，我们称这样的数为虚数。在所有的虚数中，有一类很特别，你们发现了吗？

生（齐答）：当 $a=0$ 时。

师：当 $a=0$，$b\neq0$ 时，这个复数是不是虚数？

生（齐答）：是虚数。

师：这样的数也是虚数。当 $a=0$ 时，我们称它为纯虚数。此外，还有一种很特殊的情况，你们想到了吗？

生3：当 $a=0$，$b=0$ 时，复数 z 表示的是实数0。

师：按照刚才的讨论，我们可以将复数进行分类：

$$z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})\begin{cases}b=0，实数(a=0,实数0)，\\ b\neq0，虚数\begin{cases}a=0，纯虚数，\\ a\neq0，非纯虚数.\end{cases}\end{cases}$$

从中，我们清楚地看到实数集和复数集之间的关系，即复数集中包含了所有的实数。那么实数集是复数集的什么？

生（齐答）：子集。

师：确切地讲，应该是什么？

生（齐答）：真子集。

师：引入虚数后，实数集和虚数集就合并为复数集，数系就从实数集扩充为复数集了。

5. 讲解例题，理解概念

例1 如图3所示，请说出下列集合之间的关系。

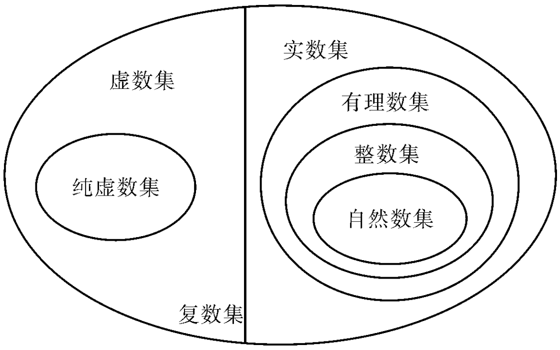

图3 数集之间的关系

例2 指出下列复数是实数还是虚数，并说出它们的实部和虚部：$-1+2\mathrm{i}$，$5-\sqrt{2}\mathrm{i}$，π，$6\mathrm{i}$，4，$-1+\sqrt{3}$，0。

例3 实数 m 为何值时，复数 $z=(m-1)(m+2)+(m-1)(m+1)\mathrm{i}$ 分别是：(1) 实数；(2) 虚数；(3) 纯虚数；(4) 零。

设计例2和例3旨在让学生熟悉复数的分类标准，在解决问题的过程中内化复数的相关概念。

6. 提炼知识，课堂小结

师：通过本节课的学习，你们有哪些深刻的体会和收获？

生1：了解了数集的发展历程。

生2：学会了数系扩充的原则。

生3：知道了虚数单位 i 的引入。

生4：知道了复数的有关概念。

师：除此之外，其实复数在我们的生活中还有很多应用。比如，在电工学，复数表示交流电；在量子力学，复数表示波函数，能更加清晰地反映微观粒子的本质属性。另外，复数在空气动力学、流体动力学、航空、航海等领域也有广泛的应用。今天只是复数开篇的第一课，在以后的高等数学学习中，我们还将会进一步学习复数。

四、学生反馈

课后，研究者收集了全班45名学生对本节课的反馈信息。约95.5%的学生喜欢将数学史融入课堂；约97.8%的学生表示听懂了这节课。由此可见，本节课建立在让学生理解的情况下融入数学史，从而让学生喜欢历史，并体会到其对学习数学的帮助。

其中，对于题目“设集合 $S=\{$复数$\}$，$A=\{$实数$\}$，$B=\{$纯虚数$\}$，下列正确的是哪一个？$A\cup B=S$，$(\complement_S A)\cap B=B$，$A\cup(\complement_S B)=A$，$\complement_S A=B$”，约91%的学生能正确回答。对于“当你看到‘复数’时，你会想到什么？”的问题，学生给出了159个回答，主要有：从代数形式的角度认识复数（28个），认为复数是 $a+b\mathrm{i}$；认为复数是一个符号（47个），如 $\mathrm{i}^2=-1$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 等；认为复数是数系扩充的结果（60个），如 $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$、新的数集 $\mathbf{C}$ 等；从历史和情感角度认识复数（24个），如数学史以前从来没学过等。对于“这节课你印象最深的是什么？为什么它会让你印象深刻？”的问题，学生的回答主要有：复数的定义（18个），如 $\mathrm{i}^2=-1$ 等；负数能开平方（11个），如“从未想过一个数的平方可以为负数”“负数竟然可以开方”等；数系的扩充（8个），如“我知道了实数集不是最大的数集”“实数和虚数可组成更大的数集—复数集”等；数学史（18个），如“虚数发现的历史让我了解到了发现虚数的过程坎坷”“历史上数学家的故事展示了创新思维，令人脑洞大开”“数学的历史十分有趣”等。

课后访谈表明，学生对在数学教学中所接触的数学史知识感到很新鲜，通过对数学发展的了解，知道了概念的来源，而数学史的融入也活跃了课堂气氛，激发了他们的求知欲。作为“复数”一章的开端，这是一个好的开始。

五、结语

在本节课中，数学史的融入体现了多元的教育价值。在概念引入的设计上，教师重构复数的历史，由卡尔丹“分十”问题到邦贝利三次方程问题，引导学生经历知识发生的过程，体会引入虚数的必要性。特别是在求解三次方程的过程中，一部分学生利用求根公式，算出含负数开方形式的根，认为三次方程无解；但也有部分学生利用计算器，快速找到三次方程的三个根。在学生陷入无解与有解的矛盾之中时，教师借助作图软件从图像角度让学生看到三个真实存在的根，进而引发学生强烈的认知冲突，激发他们解决负数开方问题的强烈动机，使数系的扩充显得自然而迫切；再从不同方程的求解入手，揭示数系扩充所遵循的原则。本课例较成功地实现了虚数概念的历史序、逻辑序和学生心理序的有机统一，从而构建了“知识之谐”。

微视频“复数的历史”向学生展示了不同时空数学家对虚数的探索以及虚数概念缓慢而艰辛的产生和发展过程。这既有助于学生树立动态的数学观，又揭示了虚数概念背后所蕴含的数学家的理性精神，因而展示了“文化之魅”，达成了“德育之效”。

但是，与许多HPM课例类似，本课例也还有很大的完善空间，如小结环节处理得还比较粗糙。如果教师能进一步引导学生对复数概念的历史进行深入反思，充分挖掘复数产生的育人价值，而不是仅仅强调复数的应用，那么数学史的教育价值，特别是德育价值，将能够得到更有效的体现。

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017年版）[S]．北京：人民教育出版社，2018．

[2] 严信一．“复数”教学中的一些问题[J]．数学通报，1979（4）：15－18．

[3] 张小明，汪晓勤．复数概念的HPM教学案例[J]．中学数学教学参考（上半月·高中），2007（6）：4－7．

[4] 林运来．从看似“鸡肋”的内容“做足”学生对数学的理解：以《数系的扩充与复数的引入》为例[J]．数学通讯，2015（10）：1－4．

[5] 张媛媛．“数系的扩充”问题驱动的教学反思[J]．上海中学数学，2011（9）：43－45．

[6] 韩玮，连春兴．教法之道贵在本质自然：以复数教学为例[J]．中小学数学（高中版），2011（7/8）：23－25．

[7] 陆明明．《数系的扩充》的教学设计与教学体会[J]．数学通报，2011（10）：20－23．

[8] 吴现荣，宋军．HPM视角下数系的扩充与复数的引入教学[J]．数学教学，2016（10）：39－42．

[9] 李广修．《数系的扩充》教学实录与反思[J]．中学数学月刊，2011（10）：30－32．

[10] 彭林，吴宏宇．将数学史融入《数系的扩充与复数的概念》的教学设计[J]．中小学数学（高中版），2012（7/8）：91－94．

[11] 李昌官．布卢姆认知目标新分类指导下的数学教学设计：以“数系的扩充与复数的概念”教学设计为例[J]．数学教育学报，2012（3）：67－71．

[12] 王海青．数学史视角下“数系的扩充和复数的概念”的教学思考[J]．数学通报，2017（4）：15－19．

[13] Wang X Q，C Wang K. A categorization model for educational values of the history of mathematics[J]．Science & education，2017，26（7－9）：1029－1052．

[14] 陈莎莎，汪晓勤．HPM视角下的复数概念教学：同课异构案例分析[J]．中国数学教育（高中版），2017（11）：20－24．

[15] Kleiner I. Thinking the unthinkable：the story of complex numbers[J]．Mathematics teacher，1988，81（7）：583－592．

[16] 赵瑶瑶．复数的历史与教学[D]．上海：华东师范大学，2007．

[17] Curcio L. I for imaginary numbers：non－existing roots[J]．Lettera matematica，2017，5（2）：125－129．