“线面垂直判定定理”:从历史看证明、找模型*

高振严[1],何伟淋[2]

(1.上海市行知中学,201900;2.华东师范大学教师教育学院,200062)

摘　要:历史上数学家给出过的多种线面垂直判定定理的证明可以让学生体会数学严谨求实、不断创新的精神,对于培养学生的逻辑推理能力有一定的价值。从 HPM 视角设计“线面垂直判定定理”一课的教学:通过身体与地面的位置关系,引出线面垂直的概念;激发需求后,利用实物操作验证(演示),引出线面垂直的判定定理;引导学生利用历史上的勾股定理方法和等腰三角形三线合一方法证明线面垂直的判定定理,并播放微视频,印证学生的方法,介绍其他的方法;在练习巩固的过程中,介绍鳖臑这一中国古代数学中的线面垂直模型。课后反馈表明,这样的教学取得了较好的效果。

关键词:HPM　线面垂直判定定理　证明　模型

“线面垂直”是沪教版高中数学教材第 14 章第 3 节“空间直线与平面位置关系”第一课时的内容。教材基于重视几何直观,适当引入公理化思想体系以及合情推理与逻辑推理并重的考量,从现实情境中的旗杆与地面垂直引入线面垂直的概念,然后直接给出线面垂直的判定定理,没有进行严格证明(人教版教材和苏教版教材也没有进行严格证明,只是给出了折纸的验证)。这种“直观感知、操作确认、归纳总结”的方式虽然能够减轻学生的课业负担,有助于培养学生的直观想象能力,但是会让学生将信将疑,不利于培养的学生逻辑推理能力。

其实,历史上数学家曾先后给出过多种线面垂直判定定理的证明。这些证明可以让学生体会数学严谨求实、不断创新的精神,对

于培养学生的逻辑推理能力有一定的价值。有鉴于此，我们尝试从 HPM 视角设计本节课的教学，并且拟定如下教学目标：(1)通过判断命题掌握线面垂直的定义，通过探索证明理解线面垂直的判定定理；(2)培养数学抽象、直观想象、逻辑推理能力，体会化归的数学思想；(3)感悟数学文化，激发学习兴趣，提升学习信心。

一、历史材料梳理

(一)线面垂直的概念

《几何原本》第 11 卷最早给出了线面垂直的定义："一直线和一个平面内所有与它相交的直线都成直角时，则称此直线与平面成直角。"18 世纪，法国数学家克莱罗(A. A. Clairaut，1713～1765)在《几何基础》中首先给出线面垂直定义的直观解释，即"一条直线不向平面上的任何一面倾斜"，从而引出线面垂直的定义，即"直线与平面上任意直线垂直"。

(二)线面垂直判定定理的证明

欧几里得通过构造两个三棱锥，证明五组三角形全等，从而证明线面垂直判定定理，过程严谨但烦琐。克莱罗给出了判定定理的直观解释，但是未给出其严格证明。18 世纪，法国数学家勒让德(A. M. Legendre，1752～1833)采用了勾股定理与中线定理相结合的方法来证明判定定理。19 世纪，苏格兰数学家普雷菲尔(J. Playfair，1748～1819)在《几何基础》中采用了等腰三角形法来证明定理；塔潘(Tappan)在《平面与立体几何》中采用了对称法来证明定理；巴尔托尔(Bartol)在《立体几何基础》中采用了引理法。20 世纪，法国数学家阿达玛(J. S. Hadamard，1865～1963)采用了另一种引理法。

(三)中国古代数学中的线面垂直模型

《九章算术·商功》给出了堑堵、阳马和鳖臑的体积计算公式。堑堵是底面为直角三角形的直棱柱，阳马是底面为长方形、一条棱垂直于底面且过底面顶点的四棱锥体，鳖臑是四个面均为直角三角形的三棱锥。若将一个正方体斜剖，就得两个堑堵；若斜剖一个堑堵，就得一个阳马和一个鳖臑。堑堵、阳马和鳖臑都可以看作线面垂直的模型。

二、教学设计与实施

(一)形象感悟，引出概念

教师先通过身体与地面的位置关系，让学生直观感受线面垂直，再通过身体的倾斜变化，让学生初步认识线面垂直就是直线不能向任何一个方向倾斜，从而启发学生说出线面垂直的概念，并对学生的不同观点引导分析，最后得出正确的概念——

师　同事都说我看起来比较高，但我的身高实际上没那么高，大家知道原因吗？

(学生摇头。)

师　这大概是因为我的腰挺得比较直。我现在站在教室里，如果把我的身体看成一条直线，把地面看作一个平面，那么直线与平面的位置关系是什么？

生　(齐)垂直。

师　为什么垂直呢？或者说，直线与平面垂直指的是什么？

(学生思考。)

师　如果我把身体前倾或后仰或左摇或右摆，那么身体还和地面垂直吗？

生　不垂直。

师　所以换一种方式理解，线面垂直就是直线不能向平面的任何一个方向倾斜，也就是直线和平面的任何一个方向——

生　垂直。

师　下面请大家总结线面垂直的概念。

生　如果直线 l 与平面 α 上所有的直线都垂直，则称直线 l 垂直于平面 α。

生　如果直线 l 与平面 α 上任意一条直线都垂直，则称直线 l 垂直于平面 α。

生　如果直线 l 与平面 α 上无数条直线都垂直，则称直线 l 垂直于平面 α。

师　前两位同学给出的概念等价吗？

生　等价。平面上所有的直线与任意一条直线意义相同。

师　那么，第三位同学得出的概念与前两位同学得出的概念等价吗？

生　不同。

师　为什么不同？

生　无数条直线不一定包括所有的直线。

师　那么第三位同学给出的概念合理吗？

生　不合理。可以找出一条直线和平面上无数条平行直线垂直，但是该直线并不与该平面垂直。

师　非常好！所以我们最终得出线面垂直的概念：如果直线 l 与平面 α 上所有的直线（或任意一条直线）都垂直，则称直线 l 垂直于平面 α。这个概念源自古希腊数学家欧几里得的《几何原本》。

（二）再次判断，激发需求

教师让学生重新判断身体与地面的位置关系，进而说明用定义很难证明线面垂直，从而激发寻找线面垂直判定定理的需求——

师　学习了线面垂直的概念。我想再问大家一个问题：我现在站在这里，和地面真的垂直吗？

生　不一定。

师　对的，直观的观察并不能说明直线和平面垂直，所以要判断直线和平面是否垂直，需要进行严格的数学证明。那么如何证明呢？可以用定义证明吗？

生　不可以。

师　为什么？

生　有无数多条直线，不可能一一验证。

师　对的，我们面临的困难是要验证的直线有无数条。所以，要证明直线和平面垂直，我们需要寻找一个更为简捷的判定定理：如果要验证的直线是有限条，那么就可以一一验证了。

（三）直观验证，引出定理

教师从最简单的情况出发，逐步引导学生利用实物操作验证（演示），直观地得出线面垂直的判定定理——

师　我们从最简单的情况开始：假如直线 l 与平面 α 上的一条直线 l' 垂直，那么直线 l 是否垂直于平面 α？

生　直线 l 可以在平面 α 上与直线 l' 垂直，所以一条不可以。

师　两条是否可以？

生　两条平行的不可以，原因与一条相同。

师　两条相交的呢？可以用铅笔或书本演示看看。

（学生用三支铅笔演示，如图 1。）

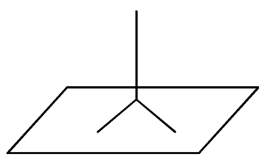

图 1

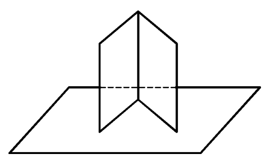

图 2

师　用铅笔演示的结果好像可以，但还是有缺陷：不稳定、不精确。（演示，如图 2）大家看，将翻开的课本直立于桌面上，将课本的底边看作桌面上两条相交的直线，将课本的棱看作与底边两条相交直线垂直的直线，很显然，棱与桌面垂直。由此就形象地验证了，如果一条直线与平面上两条相交的直线垂直，则该直线与平面垂直。这个直观验证的办法源自 18 世纪法国数学家克莱罗的著作《几何基础》。

（四）基于历史，证明定理

师　验证了线面垂直的判定定理，怎么证明

它呢？

（学生思考。）

师　已知 $AB\perp AC$，$AB\perp AD$，AE 为平面 ABC 内（加重语气）任意一条直线，则根据线面垂直的概念，证明的目标就是——

生　$AB\perp AE$。

师　这也可以说明立体几何中的线面垂直与平面几何中的线线垂直是相互转化、相互依赖的。（出示图3）连接 BC，连接 BD，设 CD 与 AE 交于点 E，下面该怎么证明呢？你有什么思路？

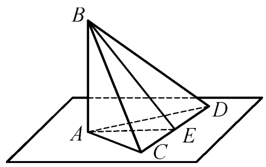

图 3

生　勾股定理。

生　等腰三角形三线合一。

生　向量。

师　没错，这些都是平面几何中证明线线垂直的常见思路。历史上数学家也用前两种思路证明了线面垂直的判定定理——向量方法因为出现得比较晚，所以早期没被想到。我们先看勾股定理的证法，它是证明 $AB^2+AE^2=BE^2$。我们总可以实现 E 为 CD 的中点，由此我们就可以利用三角形中线长或者平行四边形对角线长的有关结论，你想到方法了吗？

生　由平行四边形定理可知：$2AC^2+2AD^2=CD^2+4AE^2$，$2BC^2+2BD^2=CD^2+4BE^2$，两式相减，得 $2(BC^2-AC^2)+2(BD^2-AD^2)=4(BE^2-AE^2)$。因为 $AB\perp AC$，$AB\perp AD$，所以 $BC^2-AC^2=AB^2$，$BD^2-AD^2=AB^2$。综上，$2AB^2+2AB^2=4(BE^2-AE^2)$，即 $AB^2=BE^2-AE^2$，即 $AB^2+AE^2=BE^2$，所以 $AB\perp AE$。

师　在近代的数学教材中，利用等腰三角形三线合一的思路证明的方法流传最为广泛。下面我们尝试用该方法证明，首先我们要构造三角形使 AB、AE 所在直线一条为底边，一条为中线，然后我们要证明所构造的三角形为等腰三角形，从而根据等腰三角形三线合一即可证明 $AB\perp AE$。那么，我们如何构造符合要求的三角形呢？

生　（出示图4）作点 E 关于点 A 的对称点 E'，连接 BE'、AE'，得 $\triangle BEE'$，此时 AB 为中线，AE 所在线段 EE' 为底边。

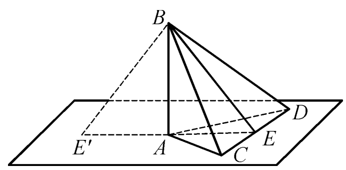

图 4

师　非常好，你的想法和最早证明这个定理的欧几里得的想法非常接近。但是，仅仅作点 E 的对称点并不能证明 $BE=BE'$，我们还需要作点 C、D 关于点 A 的对称点 C'、D'，构造两个对称的三棱锥来证明定理。欧几里得通过证明五组三角形全等最终证明了定理，方法比较复杂。我们能不能尝试将欧几里得的方法加以简化？刚才构造的是以 AB 为中线的三角形，还可以怎么构造？

生　以 AE 为中线。

师　如何构造？

生　作点 B 关于点 A 的对称点 B'，连接 AB'、$B'E$，则 $\triangle BEB'$ 以 AE 为中线。

师　（出示图5）仅仅在 $\triangle BEB'$ 中不能证明 $BE=BE'$，还需要连接 $B'C$、$B'D$。由此可得的已知条件是什么？

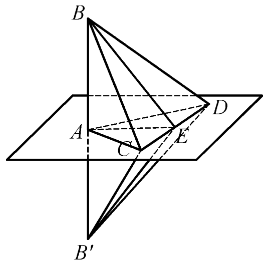

图 5

生　$B'C=BC$，$B'D=BD$，$B'A=BA$。

师　如何证明 $BE=B'E$？

生　可以采用三角形全等。

师　好，请同学们尝试书写一下证明过程。

生　（板书）证明：已知 $B'C=BC$，$B'D=BD$，$CD=CD$，可得 $\triangle BCD\cong\triangle B'CD$，所以 $\angle BCE=B'CE$。又因为 $B'C=BC$，$CE=CE$，所以 $\triangle BCE\cong\triangle B'CE$，所以 $B'E=BE$。又因为 AE 为三角形的中线，所以 $AE\perp AB$。

（教师带领学生倒序分析上述证明过程，从而理清证明的逻辑思路。然后，教师播放关于线面垂直判定定理历史的微视频，将欧几里得的证明、勒让德的证明、等腰三角形法、对称法、引理法以及一种错误的证明做进一步展示，让学生了解定理证明的各种方法由繁及简的历史进程；又将其与学生的证明方法相对应，提升学生对数学的亲近感。）

师　同学们可以在课后探究向量方法的证明。

（五）练习巩固，渗透文化

教师出示如下例题，引导学生完成，帮助学生巩固线面垂直的概念以及判定定理，体会线面垂直与线线垂直的相互转化、相互依赖的关系。

例题　如图 6，几何体 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$BC\perp AC$，$AM\perp PB$，$AN\perp PC$。

（1）证明：$BC\perp$ 平面 PAC；

（2）证明：$PB\perp MN$。

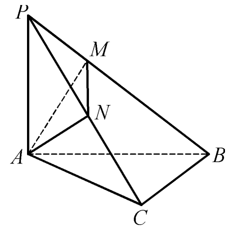

图 6

然后，教师揭示例题图形所具有的文化内涵，让学生感受数学的文化魅力：“同学们看，它的四个面全部是直角三角形，中国古代数学把这种类型的三棱锥称为鳖臑。鳖臑是指甲鱼的前肢骨，它的形状可以抽象成三棱锥。”同时，教师展示甲鱼的前肢骨，让学生真实感受鳖臑的原型，进一步体会数学抽象与直观想象。

三、学生反馈

课后，我们收集了全班 46 名学生对本节课的反馈信息。

关于线面垂直概念的理解，74% 的学生理解了线面垂直是直线与平面上所有直线垂直，以及只要直线垂直于平面内两条相交直线，就有直线垂直于平面。

看到“线面垂直”时，学生想到的内容有：数学关系类（35%），如“线线垂直”“线垂直与面内任意（所有）直线”；生活实际类（17%），如路灯、灯塔等；数学定理类（15%），如勾股定理、等腰三角形的性质等；数学家；数学老师。

关于线面垂直判定定理的证明，67% 的学生认为有必要去了解线面垂直判定定理的证明方法；46% 的学生认为证明方法有点难，但大概能理解，37% 的学生认为证明方法难，不太能理解。

关于线面垂直判定定理的应用，59% 的学生能够通过线面垂直判定定理利用两把三角尺让一根木棒垂直于桌面；61% 的学生知道如何利用一根铅垂线和一把三角尺检验地

板是否水平。

关于本节课的数学思想，63%的学生体会到对称思想和转化构造方法。

关于本节课印象最深的内容，学生的高票回答有：讲解方法（33%）和证明方法（33%）。

四、教学反思

本节课数学史的教育价值体现如下：让学生经历从线面垂直的概念到判定的生成过程，体现“知识之谐”；在证明判定定理的过程中，让学生从不同的角度开拓证明的思路，体现“方法之美”；从得出线面垂直的定义到证明线面垂直的判定，学生都是在教师的启发引导下逐步完成的，这可让学生体会探究的乐趣，锻炼数学抽象、直观想象、逻辑推理能力，体现“探究之乐”和“能力之助”；线面垂直判定定理的证明经历了漫长的历史以及不断优化的过程，让学生感受数学家严谨求实、不断创新的精神，而鳖臑模型的名称来源于生活，让学生感受数学家细致、敏锐的观察、发现能力，体现“文化之魅”；让学生知道自己的证法与历史上数学家的证明相似，增加学习兴趣与信心，体现“德育之效”。

总之，在整个教学设计过程以及研讨活动中，笔者觉得，数学史能加深学生对概念及定理的理解，大大开阔学生的视野，发展学生的思维；丰富的数学史料和多样的呈现方式能让课堂不再单调、枯燥，从而让学生的头脑始终处于比较兴奋的状态。

当然，在本次教学实践中还存在一些不足之处。首先，在讨论线面垂直判定定理证明路径的过程中，笔者始终坚持让学生动手操作并演示报告，这虽然让学生对定理的认识更加深刻，但是从课堂整体层面考虑却降低了整堂课的效率，此处应该适当融入信息技术，提高课堂效率。其次，笔者选取的数学史料偏多，导致本节课的容量较大。

* 本文系本刊连载的汪晓勤教授团队开发的 HPM 案例之一，也系华东师范大学 HPM 工作室开发的系列课例之一。

参考文献：

[1] 蒋明建. 谈新课程中面面平行、线面垂直判定定理教学的困惑与思考[J]. 中小学数学（高中），2013(3).

[2]【古希腊】欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正，朱恩宽译. 西安：陕西科学技术出版社，2003.

[3] A. A. Clairaut. *Eléments de Géometrie* [M]. Paris：Lambert & Durand，1741.

[4] 沈中宇，汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方几何教科书中的线面垂直判定定理[J]. 中学数学月刊，2017(1).

[5] 郭书春. 九章算术译注[M]. 上海：上海古籍出版社，2009.